MATEMÁTICA APLICADA 2 Segundo cuatrimestre 2014

Licenciatura en Física, Universidad Nacional de Rosario

Trabajo práctico n° 3: Funciones de Green

1. *a*) Encuentre la función de Green para el operador

$$L(u) = x^2u'' - 2xu' + 2u$$

en el intervalo $[1,2]$, con condiciones de contorno $u(1) = u(2) = 0$.
Ayuda: tanto x como x^2 son soluciones de $L(u) = 0$.

b) Utilice la función de Green obtenida para resolver la ecuación inhomogénea

$$L(u) = x^3 \text{ en } [1,2], \quad u(1) = u(2) = 0.$$

2. Problema 2.5 del Griffel
Construya la función de Green para el operador

$$\frac{d^2}{x^2} + k^2$$

donde la constante k es positiva y con condiciones de contorno $u'(0) = u'(1) = 0$.

3. Problema 2.7 del Griffel
Este problema muestra cómo la función de Green puede ser usada para tratar condiciones de contorno inhomogéneas. Considere la ecuación $u'' + u = f(x)$ con condiciones de contorno $u(0) = a, u(1) = b$. Transformamos el problema en uno con condiciones de contorno homogéneas tomando cualquier función $h(x)$ que satisfaga las condiciones dadas (por ejemplo, $h(x) = a + (b-a)x$) y escribiendo $u = h + \nu$. Entonces ν satisface la ecuación $\nu'' + \nu = F$, con condiciones de contorno $\nu(0) = \nu(1) = 0$, donde $F = f - h'' - h$ es una función conocida. Resuelva esta ecuación calculando la función de Green, y obtenga así la solución u del problema original. Esta técnica es claramente aplicable a problemas con otras condiciones de contorno.

4. Problema 2.8 del Griffel
Encuentre la función de Green del operador $\frac{d^n}{dx^n}$ para $x > 0$, con condiciones de contorno $u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-1)}(0) = 0$. Exprese la integral n-iterada de una función $f(x)$ como una integral simple.

5. Problema 2.10 del Griffel
La deflexión vertical $y(x)$ de una barra horizontal de longitud a, con ambos extremos empotrados y que soporta una carga $f(x)$, satisface la ecuación

$$\frac{d^4y}{dx^4} = cf, \quad y(0) = y'(0) = y(a) = y'(a) = 0,$$

donde c es una constante. Use la función de Green para encontrar y en función de f. ¿Es la fórmula resultante más útil que aquella obtenida por integración directa de la ecuación?

6. *Ecuación de difusión del calor*

La ecuación que describe cómo se reparte la temperatura en un medio en función del espacio y del tiempo es la llamada ecuación de difusión del calor que tiene la forma siguiente

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\nabla^2 f$$

en donde $f(\mathbf{r},t)$ es la temperatura en el punto $\mathbf{r} = (x,y,z)$ y en el tiempo t, y D es una constante característica del medio considerado y se llama coeficiente de difusión. Esta ecuación es bastante general y no sólo describe el problema de difusión del calor sino también, por ejemplo, la difusión de una substancia en un solvente (en ese caso f sería la densidad de la substancia).

En este problema nos proponemos resolver la ecuación de difusión en el caso en que no hay fronteras espaciales y se conoce la condición inicial en $t = 0 : f(\mathbf{r}, t = 0) = f_0(\mathbf{r})$ con f_0 una funcion conocida (distribución inicial de temperaturas).

a) Usando la transformada de Fourier $\widehat{f}$ de f con respecto a las coordenadas espaciales

$$f(\mathbf{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{f}(\mathbf{k},t) e^{2\pi i \mathbf{k}.\mathbf{r}} d\mathbf{k}$$

¿cuál sería la ecuación que verifica la funcion $\widehat{f}$?

b) La ecuación que obtuvo en el punto anterior es una ecuación diferencial con respecto a t de primer grado que se resuelve fácilmente. Resuélvala y exprese $\widehat{f}(\mathbf{k},t)$ en función de la transformada de Fourier $\widehat{f_0}(\mathbf{k})$ de la condición inicial $f_0(\mathbf{r})$.

c) Para obtener la solución en el espacio directo de los $\mathbf{r}$ hay que tomar naturalmente la transformada de Fourier inversa de la solución que encontró en el punto anterior. Pero antes de hacerlo note que la solución obtenida en el punto anterior se expresa como un producto de dos funciones de $\mathbf{k}$. Usando la regla para el producto de convolución y la transformada de Fourier

$$\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$$

muestre que la solución $f(\mathbf{r},t)$ del problema de difusión se puede expresar como un producto de convolución (para las variables espaciales $\mathbf{r}$) entre la condición inicial $f_0(\mathbf{r})$ y una cierta función $G(\mathbf{r},t)$:

$$f(\mathbf{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} f_0(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t) d\mathbf{r}'.$$

d) Dé una expresión explicita de $G(\mathbf{r},t)$.

e) Consideremos el caso especial en que la condición inicial es

$$f_0(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}).$$

que físicamente representa un caso idealizado en donde se calienta enormemente el origen O mientras el resto del material está frio. ¿Cuál sería entonces la solución $f(\mathbf{r},t)$?

f) Interpretación: la solución anterior como función del espacio es una gaussiana, pero su largo cambia con el tiempo. ¿Cuál es el largo espacial característico en el cual hay una temperatura apreciable en el tiempo t? La respuesta a esta pregunta muestra que el calor se propaga, en un tiempo t, una distancia proporcional a $\sqrt{t}$, comportamiento típico de todos los fenómenos de difusión.

7. Encuentre la función de Green $g(x,t)$ de la ecuación de onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \text{con condiciones iniciales } u(x,0) = 0 \text{ y } \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \delta(x).$$