

# El Principio de Inducción

Álgebra y Geometría I (LM, PM, LF, PF, LCC)

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura  
Universidad Nacional de Rosario

2026

## Motivación

Idea general: el principio de inducción matemática sirve para demostrar enunciados del siguiente estilo:

$$\forall n, P(n)$$

donde  $P(n)$  es una proposición abierta que depende del número natural  $n$ .

Por ejemplo, consideremos la proposición  $P(n)$  que dice que “la suma de los primeros  $n$  números naturales es igual a  $n(n+1)/2$ ”.

- ▶ Es decir, queremos probar que cualquiera sea  $n$  natural,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- ▶ Podríamos chequear casos particulares

- ▶ Para  $n = 1$  es cierto:  $1 = 1 \cdot 2/2$  ✓

- ▶ Para  $n = 2$  es cierto:  $1 + 2 = 3 = 2 \cdot 3/2$  ✓

- ▶ Para  $n = 3$  es cierto:  $1 + 2 + 3 = 6 = 3 \cdot 4/2$  ✓

- ▶ Para  $n = 4$  es cierto:  $1 + 2 + 3 + 4 = 10 = 4 \cdot 5/2$  ✓

- ▶ Pero esto no significa que hayamos probado la afirmación para TODO  $n$ .

## Principio del buen orden

Sabemos que  $(\mathbb{R}, \leq)$ ,  $(\mathbb{Q}, \leq)$ ,  $(\mathbb{Z}, \leq)$ ,  $(\mathbb{N}, \leq)$ . son conjuntos parcialmente ordenados. Algunos de ellos verifican la siguiente propiedad:

### Definición

- Un subconjunto de  $A$  de  $\mathbb{R}$  tiene *primer elemento* si existe  $a \in A$  tal que

$$a \leq x \quad \text{para todo } x \in A$$

y en tal caso decimos que  $a$  es **el** primer elemento de  $A$ .

- Un subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}$  se dice *bien ordenado* si todo subconjunto no vacío de  $A$  tiene primer elemento.

### PRINCIPIO DEL BUEN ORDEN DE LOS ENTEROS POSITIVOS:

Todo subconjunto no vacío de  $\mathbb{Z}^+$  tiene primer elemento.

## Observación

- ▶  $(\mathbb{Q}^+, \leq)$  **no es bien ordenado**, ya que si se supone que  $q$  es su primer elemento, llegamos a un absurdo ya que  $0 < \frac{q}{2} < q$ , y  $\frac{q}{2} \in \mathbb{Q}^+$ .
- ▶ cualquier subconjunto **finito** y no vacío de  $\mathbb{R}$  tiene primer elemento.
- ▶ Si  $a < b$  entonces los intervalos
  - ▶  $(a, b)$  y  $(a, b]$  no tienen primer elemento
  - ▶  $[a, b]$  y  $[a, b)$  sí tienen primer elemento
  - ▶ **Ninguno de estos cuatro intervalos es un conjunto bien ordenado.**
  - ▶ El conjunto vacío está bien ordenado (aunque no tenga primer elemento).
- ▶  $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{n : -n \in \mathbb{N}\}$  no tiene primer elemento (en consecuencia, no está bien ordenado).

# Principio de inducción matemática

Usando el principio de buena ordenación podemos demostrar

## Teorema (Principio de Inducción)

Sea  $P(n)$  una proposición abierta que depende del número natural  $n \in \mathbb{N}$  tal que

1.  $P(1)$  es verdadera;
2.  $\forall k \in \mathbb{N} \quad [P(k) \implies P(k+1)]$ .

Entonces  $P(n)$  es verdadera para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

## Demostración.

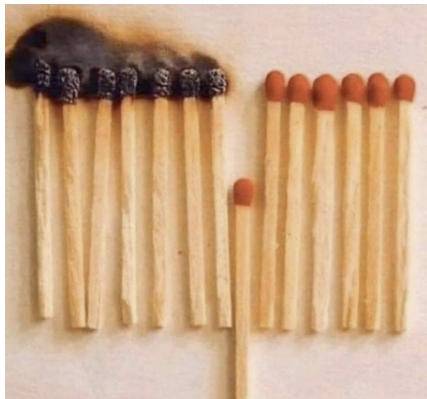
- Consideramos  $H = \{k \in \mathbb{N} : P(k) \text{ es falsa}\}$  (deberíamos probar que este conjunto es vacío). Supongamos que  $H \neq \emptyset$ . Luego, por ser  $H \subset \mathbb{N}$  (y suponer  $H$  no vacío),  $H$  tiene primer elemento, digamos  $m$ . Entonces,  $P(m)$  es falso y se tiene que  $P(m-1)$  es verdadero.
- Notemos que el ítem 1 nos dice que  $1 \notin H$ , luego  $m \geq 2$  y  $m-1 \geq 1$ .
- El ítem 2 nos dice que si  $P(m-1)$  es verdadero entonces  $P(m)$  es verdadero. Entonces  $m \in H$  y  $m \notin H$ . CONTRADICCION.

# Principio de inducción matemática

Demostración.

(continuación)

- ▶ Resulta  $H = \emptyset$  y por lo tanto  $P(n)$  es verdadera para todo  $n \in \mathbb{N}$ .



## Ejemplo 1 –aplicando el Principio de inducción matemática

### Ejemplo

Probar que  $2^n > n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Consideramos

$$P(n) : 2^n > n.$$

- ▶  $P(1) : 2^1 > 1$  es verdadera.
- ▶ Probemos que  $P(k) \implies P(k+1)$  para todo  $k \geq 1$ .
  - ▶ Supongamos que  $P(k) : 2^k > k$  es verdadera. Esto es lo que se llama la **hipótesis inductiva (HI)**.
  - ▶ Para probar que  $P(k+1)$  es verdadera, observamos que

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \underset{\text{HI}}{>} 2 \cdot k = k + k \underset{(k \geq 1)}{\geq} k + 1.$$

- ▶ Luego por el Principio de Inducción,  $P(n)$  es verdadera para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

## Ejemplo

Probar que  $n^2 + 3 > n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Consideramos

$$P(n) : n^2 + 3 > n.$$

- ▶ Verificamos  $P(1)$ . En efecto,  $1^2 + 3 = 4 > 1$ .
- ▶ Dado  $n \geq 1$ , suponemos que  $P(n)$  es cierta y probamos  $P(n+1)$ . En efecto,

$$\begin{aligned}(n+1)^2 + 3 &= n^2 + 2n + 1 + 3 \\ &= n^2 + 3 + 2n + 1 \\ &> n + 2n + 1 && \text{(por HI)} \\ &> n + 1\end{aligned}$$

por ende  $P(n+1)$  es cierta.

- ▶ Por el Principio de Inducción,  $P(n)$  vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

## Símbolo sumatoria

Recordamos la notación

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Esta notación se lee **sumatoria** entre  $i = 1$  e  $i = n$  de los  $x_i$ .

Formalmente, dados  $n$  números (reales, complejos, etc.)  $x_1, \dots, x_n$  podemos definir la

suma  $\sum_{i=1}^n x_i$  como

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^1 x_i = x_1 \\ \sum_{i=1}^{k+1} x_i = \left( \sum_{i=1}^k x_i \right) + x_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

## Ejemplo 2–Usando el símbolo sumatoria y el P. de inducción matemática

### Ejemplo

Probar que para todo  $n \in \mathbb{N}$  y para todo  $c \in \mathbb{C}$  se cumple

$$\sum_{i=1}^n c = nc \quad (1)$$

► Probamos para  $n = 1$ :

$$\sum_{i=1}^1 c = c = 1 \cdot c$$

► Suponemos cierto para  $n$  y probamos para  $n + 1$ :

$$\sum_{i=1}^{n+1} c \stackrel{\text{def.}}{=} \left( \sum_{i=1}^n c \right) + c \stackrel{\text{HI}}{=} nc + c = (n+1)c$$

► Por el Principio de Inducción, (1) vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

## Ejemplo

Volvamos al ejemplo que vimos al principio. Probar que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se cumple

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad (2)$$

► Caso  $n = 1$ :

$$\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

► Caso  $n \implies$  caso  $n+1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i &= \left( \sum_{i=1}^n i \right) + (n+1) \stackrel{\text{HI}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n+1 \\ &= (n+1) \left( \frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Luego por el Principio de Inducción, (2) es verdadera para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Podemos modificar ligeramente el principio de inducción para demostrar afirmaciones que son verdaderas a partir de un cierto número natural  $n_0 \geq 1$ .

### Teorema

Sea  $P(n)$  una proposición abierta que depende del número natural  $n \in \mathbb{N}$  y sea  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Supongamos que

1.  $P(n_0)$  es verdadera;
2.  $P(k) \implies P(k+1)$  para todo  $k \geq n_0$ .

Entonces  $P(n)$  es verdadera para todo  $n \geq n_0$ .

## Demostración.

- ▶ Consideramos  $Q(n) = P(n_0 + n - 1)$ .
- ▶ Observemos que  $Q(1) = P(n_0)$  es verdadera.
- ▶ Sea  $k \geq 1$  y supongamos  $Q(k) = P(n_0 + k - 1)$  es verdadera.
- ▶ Como  $n_0 + k - 1 \geq n_0$ , sigue que  $P(n_0 + k) = Q(k + 1)$  es verdadera.
- ▶ Luego,  $Q(k) \implies Q(k + 1)$  para todo  $k \geq 1$ .
- ▶ Por el Principio de Inducción  $Q(n)$  es verdadera para todo  $n \geq 1$ , o equivalentemente  $P(n)$  es verdadera para todo  $n \geq n_0$ . □

## Ejemplo 3 –aplicando el Principio de inducción matemática

### Ejemplo

Probar que  $2^n > 2n + 1$  para todo  $n \geq 3$ .

Consideramos

$$P(n) : 2^n > 2n + 1.$$

- Observemos que
  - $P(1) : "2 > 3"$  es falsa
  - $P(2) : "4 > 5"$  es falsa
- $P(3) : 8 > 7$  es verdadera.
- Sea  $n \geq 3$ , supongamos que  $P(n)$  es cierta y probemos  $P(n + 1)$ . En efecto,

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \underset{\text{HI}}{>} 2 \cdot (2n + 1) = 2 \cdot (n + 1 + n) = 2(n + 1) + 2n > 2(n + 1) + 1$$

- Así  $P(n) \implies P(n + 1)$  y por el teorema anterior,  $P(n)$  es verdadera para todo  $n \geq 3$ .

## Símbolo Productoria

Análogamente la *productoria*  $\prod_{i=1}^n x_i$  de  $n$  números  $x_1, \dots, x_n$  se define como

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^1 x_i = x_1 \\ \prod_{i=1}^{k+1} x_i = \left( \prod_{i=1}^k x_i \right) \cdot x_{k+1}, & 1 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

Intuitivamente,

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$$

Se lee *productoria* entre  $i = 1$  e  $i = n$  de los  $x_i$ .

### Ejemplo

Usando la productoria podemos dar la definición de las potencias naturales de un número complejo. Si  $n \in \mathbb{N}$  y  $z \in \mathbb{C}$ , definimos

$$z^n = \prod_{i=1}^n z$$

### Ejemplo (factorial)

El *factorial* del número natural  $n$ , denotado por  $n!$ , se define como el producto de los primeros  $n$  números naturales, es decir,

$$n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

En este caso se define además  $0! = 1$

## Observación

Las definiciones de sumatoria y productoria se extienden para incluir los casos en los que los subíndices se mueven entre dos enteros  $m$  y  $n$  tales que  $m \leq n$ .

Por ejemplo,

$$\sum_{i=0}^5 (2i - 1) = -1 + 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 21$$

$$\begin{aligned} \prod_{k=-2}^1 (k^2 + 1) &= ((-2)^2 + 1)((-1)^2 + 1)(0^2 + 1)(1^2 + 1) \\ &= 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 20 \end{aligned}$$

## Usando el símbolo productoria y el P. de inducción matemática

Probar que  $n! \geq 2^n$  para todo  $n \geq 4$ .

- ▶ Notar que la afirmación es cierta para  $n = 0$ , pues  $0! = 1 = 2^0$
- ▶ Pero es falsa para  $n = 1, 2, 3$ :

$$1! = 1 < 2 = 2^1$$

$$2! = 2 < 4 = 2^2$$

$$3! = 6 < 8 = 2^3$$

- ▶ La afirmación es cierta para  $n = 4$ . En efecto,  $4! = 24 \geq 16 = 2^4$
- ▶ Suponemos cierto para  $n$  y probamos para  $n + 1$

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \underset{\text{HI}}{\geq} 2^n(n+1) \underset{(n+1 \geq 2)}{\geq} 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$$

**Importante:** en el segundo  $\geq$  estamos usando  $n+1 \geq 2$  (lo cual es cierto porque estamos con  $n \geq 4$ ).

- ▶ Por lo tanto la afirmación es válida para todo  $n \geq 4$ .

# MISCELÁNEAS

## Teorema (Principio de inducción fuerte.)

Sea  $P(n)$  una proposición abierta que depende del número natural  $n$  tal que

1.  $P(1)$  es verdadera.
2. Para todo  $k \geq 1$ , si  $P(1), P(2), \dots, P(k)$  son verdaderas, entonces  $P(k+1)$  es verdadera.

Entonces  $P(n)$  es verdadera para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

## Demostración.

- Sea  $X = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ es falsa}\}$ . Queremos ver que  $X = \emptyset$ .
- Supongamos por el absurdo que  $X \neq \emptyset$  y sea  $n_0$  el primer elemento de  $X$ . Observar que  $n_0 \geq 2$ , pues  $P(1)$  es verdadera.
- Luego,  $1, \dots, n_0 - 1 \notin X$ , o equivalentemente  $P(1), \dots, P(n_0 - 1)$  son verdaderas.
- El ítem 2 implica que  $P(n_0)$  es verdadera y por ende  $n_0 \notin X$ . Absurdo. □

## Ejemplo 4-aplicando el P. de inducción matemática a Cardinal de conjuntos

### Ejemplo

Probar que si  $X$  es un conjunto con  $n$  elementos, entonces  $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$ .

- ▶ Hacemos inducción en  $|X| = n$ .
- ▶ Si  $n = 0$ , entonces  $X = \emptyset$ . Luego  $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$  y por ende  $|\mathcal{P}(X)| = 1 = 2^0$ .
- ▶ Notemos también que si  $|X| = 1$ , entonces  $X$  tiene un único elemento y por lo tanto  $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, X\}$ . En este caso también se cumple que  $|\mathcal{P}(X)| = 2 = 2^1$ .
- ▶ Supongamos que la afirmación ya está probada para los conjuntos con  $n$  elementos y sea  $X$  un conjunto con  $n + 1$  elementos.
- ▶ Podemos fijar un elemento  $x_0 \in X$  y escribir

$$\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(X - \{x_0\}) \cup \{\{x_0\} \cup A : A \in \mathcal{P}(X - \{x_0\})\}$$

- ▶ Como esta unión **es disjunta** tenemos que  $|\mathcal{P}(X)| = 2|\mathcal{P}(X - \{x_0\})| \underset{\text{HI}}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$