

Conjuntos

Álgebra y Geometría I (LM, PM, LF, PF, LCC)

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

2026

Conjuntos y pertenencia

- **Nociones primitivas:** conjunto y elemento de un conjunto. Si x es un elemento del conjunto A (o x pertenece a A), escribimos

$$x \in A.$$

- Es decir, $x \in A$ es una proposición: puede ser verdadera o falsa. Su negación $\neg(x \in A)$, es decir x no pertenece a A , la abreviaremos por

$$x \notin A.$$

- Es tradición usar la notación de letras mayúsculas

$A, B, C, \dots, X, Y, Z, \dots$	para conjuntos y letras minúsculas
$a, b, c, \dots, x, y, z, \dots$	para los elementos de estos conjuntos.

- Esta notación no es universal. Por ejemplo, $A \in x$ tiene perfecto sentido (aunque preferimos no usar esta notación).

Ejemplo

- ▶ $A = \{4, 8, 10\}$ es un conjunto y sus elementos son 4, 8 y 10.
- ▶ $B = \{\{4\}, \{8\}, \{10\}\}$ es otro conjunto y sus elementos son $\{4\}$, $\{8\}$ y $\{10\}$.
- ▶ De hecho, valen:

$$4 \in A,$$

$$4 \in \{4\} \in B,$$

$$\{4\} \notin A.$$

Igualdad de conjuntos

Empecemos por el problema más sencillo: ¿cuándo son iguales dos conjuntos?

Definición

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. En símbolos:

$$A = B \iff \forall x (x \in A \iff x \in B).$$

Definición de conjuntos por extensión

- ▶ La igualdad de conjuntos nos dice que podemos definir los conjuntos *por extensión*, listando todos los elementos del conjunto (entre llaves).
- ▶ $\{4, 8, 10\}$ es el (único) conjunto cuyos elementos son exactamente 4, 8 y 10.
- ▶ También se puede usar la definición por extensión con conjuntos infinitos, aunque esto no es muy frecuente.
 - ▶ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
 - ▶ $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Definición por comprensión

Si A es un conjunto y $p(x)$ es una proposición abierta sobre los elementos de A , podemos formar el conjunto de los elementos x de A tales que $p(x)$ es verdadera. Este conjunto lo denotaremos por

$$\{x \in A : p(x)\}.$$

A veces también se denota $\{x \in A \mid p(x)\}$.

Definición de conjuntos por comprensión

Ahora también podemos definir un conjunto por *comprensión*, especificando alguna propiedad que caracterice unívocamente a todos sus elementos. Por ejemplo,

- ▶ $\{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$ es el conjunto de los números naturales pares.
- ▶ $\{n \in \mathbb{Z} : (n - 1)^2 \leq 9\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.
- ▶ $\{x \in \mathbb{R} : (x - 1)^2 \leq 9\} = [-2, 4]$.

Conjuntos universales

- ▶ Utilizaremos un conjunto universal $\mathcal{U}$ del cual tomaremos todos los elementos con los que trabajaremos en un determinado contexto.
- ▶ Es importante tener claro cuál es el conjunto universal con el que estamos trabajando.
 - ▶ Por ejemplo, si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, entonces el conjunto $\{x : 2 < x \leq 7\} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.
 - ▶ Pero si $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, entonces $\{x : 2 < x \leq 7\} = (2, 7]$ (intervalo semiabierto).
 - ▶ Si no está claro cuál es el conjunto universal, escribir $\{x : 2 < x \leq 7\}$ es ambiguo y por tanto desaconsejado.

El conjunto vacío

Existe un conjunto $\emptyset$ que no tiene ningún elemento. Formalmente

$$\exists \emptyset \forall x (x \notin \emptyset).$$

Otras notaciones para este conjunto vacío son $\emptyset$, $\{\}$ ó 0 (en desuso). El conjunto vacío tiene la siguiente importante propiedad.

Teorema

El conjunto vacío es único. En otras palabras, si A es un conjunto sin elementos, entonces $A = \emptyset$.

Antes de demostrar nuestro primer teorema sobre conjuntos, establecemos una notación que nos será muy útil en el futuro.

Contención / Subconjuntos

Ahora vamos a definir la noción de que un conjunto esté contenido o incluido en otro.

Definición

Decimos que un conjunto A *está contenido* en un conjunto B , o que A es un *subconjunto* de B , si todo elemento de A es también un elemento de B . Usaremos la notación

$$A \subseteq B$$

para indicar que A es un subconjunto de B . En símbolos:

$$A \subseteq B \iff \forall x (x \in A \implies x \in B).$$

Notación

Para indicar que A no es un subconjunto de B , es decir $\neg(A \subseteq B)$, usamos la notación

$$A \not\subseteq B.$$

Definición

Decimos que un conjunto A está *contenido estrictamente* en un conjunto B si $A \subseteq B$ y $A \neq B$. O sea, A es un subconjunto de B pero B tiene más elementos que A . Para la contención estricta usaremos la notación

$$A \subset B.$$

Importante

Las notaciones $\subseteq$ y $\subset$ no son adoptadas en todos los libros de matemática. Las notaciones

- ▶ $A \subset B$ para la contención
- ▶ $A \subsetneq B$ para la contención estricta

son también muy comunes (cuidado con el libro que lean).

Ejemplos

Consideremos los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$$

$$C = \mathbb{N}$$

Se verifica que:

- ▶ $A \subset B$ y por lo tanto $A \subseteq B$
- ▶ $A \in B$
- ▶ $A \subset \mathbb{N}$
- ▶ $B \not\subseteq \mathbb{N}$

Algunas propiedades

Teorema

1. Para todo conjunto A se tiene que $A \subseteq A$.
2. Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si A es un subconjunto de B y B es un subconjunto de A . En otras palabras,

$$A = B \iff [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)].$$

Demostración.

1. Ejercicio.
2. Para probar $\implies$ podemos reescribir el lado derecho como $(A \subseteq A) \wedge (A \subseteq A)$, lo cual sabemos que es verdadero por el ítem anterior. Para ver $\impliedby$ debemos ver que A y B tienen los mismos elementos. Si $x \in A$, como $A \subseteq B$, tenemos que $x \in B$. Análogamente, si $x \in B$, vemos que $x \in A$. Luego $A = B$. □

Teorema

Sean A , B , C tres conjuntos. Se tiene:

1. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$;
2. Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

Demostración.

1. Tenemos que probar que todo elemento de A es elemento de C . Sea $x \in A$, como $A \subseteq B$ concluimos que $x \in B$. Además, como $B \subseteq C$, sigue que $x \in C$, que es lo que queríamos probar.
2. Ejercicio. □

Lema

Si $\emptyset$ es un conjunto vacío y A es cualquier conjunto, entonces $\emptyset \subseteq A$. Más aún, si A es un conjunto no vacío, entonces $\emptyset \subset A$.

Demostración.

Usando la definición de contención, debemos probar

$$\forall x (x \in \emptyset \implies x \in A)$$

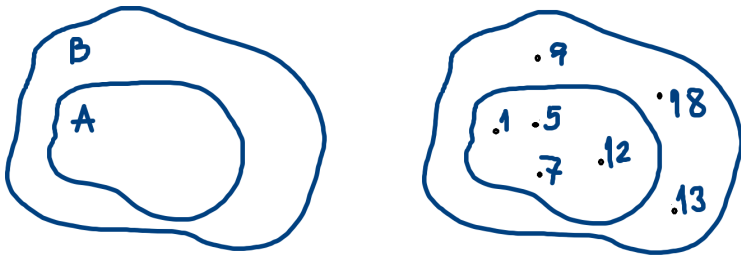
la cual es trivialmente verdadera (ya que para cada x , el antecedente de la implicación es falso). □

Demostración del Teorema de Unicidad del Vacío.

Sean $\emptyset$ y $\emptyset'$ dos conjuntos vacíos. Por el lema anterior tenemos que $\emptyset \subseteq \emptyset'$ y $\emptyset' \subseteq \emptyset$. Usando el teorema de la doble contención sigue que $\emptyset = \emptyset'$. □

Diagramas de Venn

A veces se usan los llamados diagramas de Venn para representar gráficamente ciertas propiedades de los conjuntos y ayudarnos a ganar intuición. Por ejemplo, la contención $A \subset B$ la dibujamos como se muestra en la figura (donde también dibujamos el ejemplo concreto en que $A = \{1, 5, 7, 12\}$ y $B = \{1, 5, 7, 9, 12, 13, 18\}$)



Cardinalidad

- ▶ Decimos que un conjunto A es *finito* si podemos contar cuántos elementos tiene y decimos que A es *infinito* si no es finito (esta es una definición informal, cuando veamos funciones podremos dar una definición precisa).
- ▶ La *cardinalidad* de un conjunto finito A se define como la cantidad de elementos de A y se denota por $|A|$.

Ejemplo

Sean

$$A = \{1, 7, 19\}, \quad B = \{2, 5, A, 39\}, \quad C = \mathbb{N}, \quad D = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}.$$

- ▶ $|A| = 3$.
- ▶ $|B| = 4$. Atención $|B| \neq 6$.
- ▶ C es un conjunto infinito.
- ▶ $|D| = 5$.

Teorema

Si A y B son dos conjuntos finitos, se tiene:

1. $A \subseteq B \implies |A| \leq |B|$;
2. $A \subset B \implies |A| < |B|$.

Demostración (informal).

Probamos 1) y dejamos 2) como ejercicio. Si tenemos que contar los elementos del conjunto B , del cual A es subconjunto, podemos empezar contando los elementos que están en A y luego seguir con los elementos de B que no están en A . Claramente obtendremos que $|B|$ es un número mayor o igual que $|A|$. □

Corolario

$$|\emptyset| = 0.$$

Demostración.

Ejercicio. □

Cardinalidad de conjuntos infinitos

- ▶ También tiene sentido hablar de la cantidad de elementos de un conjunto infinito (y comparar estas cardinalidades), pero es una teoría más complicada que no estudiaremos todavía.
- ▶ A modo de ejemplo, tratemos de pensar qué cardinalidad es más grande, ¿la de $\mathbb{N}$ o la de $\mathbb{Z}$?

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \end{array}$$

- ▶ Otros ejemplos más complicados (que no veremos en este curso):
 - ▶ $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$
 - ▶ $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$
 - ▶ $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$

Conjunto de partes

Ejemplos

¿Cuántos subconjuntos tiene el conjunto $A = \{x, y, z\}$?

- ▶ Sabemos que si $B \subseteq A$, entonces $|B| \leq |A| = 3$. Esto nos dice que una buena forma de contar los subconjuntos de A es mirando los subconjuntos de 0, 1, 2 y 3 elementos.
- ▶ Subconjuntos de 0 elementos: $\emptyset$
- ▶ Subconjuntos de 1 elemento: $\{x\}, \{y\}, \{z\}$
- ▶ Subconjuntos de 2 elementos: $\{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}$
- ▶ Subconjuntos de 3 elementos: $\{x, y, z\}$
- ▶ Luego, A tiene $8 = 2^3$ subconjuntos.

Conjunto de partes

Si A es un conjunto, existe un conjunto $\mathcal{P}(A)$ formado exactamente por los subconjuntos de A . Este conjunto es llamado el *conjunto de partes* de A .

Observación

- ▶ Los elementos de $\mathcal{P}(A)$ **no son** elementos de A .
- ▶ Para todo A , se tiene que $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ y $A \in \mathcal{P}(A)$.

Teorema

Si A es un conjunto finito con n elementos, entonces

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n.$$

Demostración.

Lo veremos más adelante



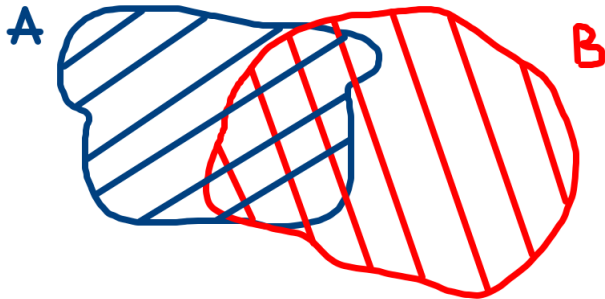
Operaciones con conjuntos

Unión de conjuntos

Definición

Dados dos conjuntos A y B , existe un conjunto $A \cup B$, que llamaremos *la unión de A y B* , cuyos elementos son los elementos de A y B . Más formalmente,

$$\forall x (x \in A \cup B \iff (x \in A \vee x \in B)).$$



Teorema

Si A , B y C son conjuntos, se tienen.

1. $A = A \cup A$.
2. $A \cup B = B \cup A$.
3. $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$.
4. $A \subseteq B \iff A \cup B = B$.
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Demostración.

1. Ejercicio.
2. Ejercicio.
3. Ejercicio.

Demostración (cont.)

4. Para ver $\implies$ tenemos que ver la doble contención.

Sabemos que $B \subseteq A \cup B$ por la parte 3).

Para probar que $A \cup B \subseteq B$ empezamos con un elemento $x \in A \cup B$.

Si $x \in B$ ya está.

De lo contrario $x \in A$. Pero como $A \subseteq B$, concluimos también que $x \in B$.

Para ver $\impliedby$ tomamos $x \in A$. Como $x \in A \cup B$ y $A \cup B = B$, sigue que $x \in B$.

Por lo tanto $A \subseteq B$.

5. Hay que probar la doble contención. Veamos que $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$ y dejemos como ejercicio la otra inclusión.

Si $x \in A \cup (B \cup C)$ hay dos posibilidades:

Caso 1: $x \in A \implies x \in A \cup B \implies x \in (A \cup B) \cup C$.

Caso 2: $x \in B \cup C$. También se abren dos posibilidades:

► **Subcaso 2a:** $x \in B \implies x \in A \cup B \implies x \in (A \cup B) \cup C$.

► **Subcaso 2b:** $x \in C \implies x \in (A \cup B) \cup C$.

Como estudiamos todos los casos, el teorema queda demostrado. □

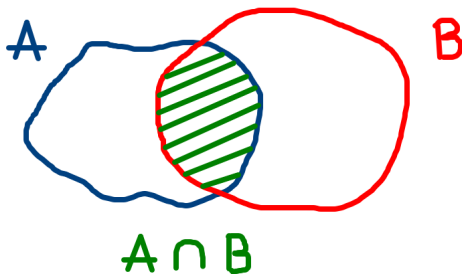
Intersección de conjuntos

Definición

Si A y B son dos conjuntos se define su intersección como

$$A \cap B = \{x \in A : x \in B\} = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \wedge x \in B\}.$$

En palabras, $A \cap B$ está formado por los elementos que A y B tienen en común.



Teorema

Si A , B y C son conjuntos, se tienen.

1. $A = A \cap A$.
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$
4. $A \subseteq B \iff A \cap B = A$.
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Demostración.

Ejercicio.

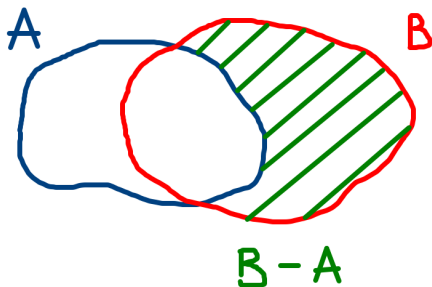


Diferencia de conjuntos

Definición

Si A y B son dos conjuntos, el *conjunto diferencia* $B - A$ está formado por los elementos de B que no están en A . En símbolos,

$$B - A = \{x \in B : x \notin A\}.$$



Notación alternativa

A veces el conjunto diferencia también se denota por

$$B \setminus A$$

Teorema

Sean A , B y C tres conjuntos. Se cumplen:

1. $A - A = \emptyset$.
2. $A - \emptyset = A$.
3. $B - A \subseteq B$. En particular, $\emptyset - A = \emptyset$.
4. $B - A = A - B \implies A = B$.
5. $(A - B) - C \subseteq A - (B - C)$.

Demostración.

Dejamos las primeras tres como ejercicio.

4. Haremos $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Sea $x \in A$ y supongamos por el absurdo que $x \notin B$.

Sigue que $x \in A - B$, pero por hipótesis $A - B = B - A$. Luego $x \in B - A$ y por ende $x \notin A$, absurdo. Por lo tanto $A \subseteq B$.

Análogamente vemos que $B \subseteq A$.

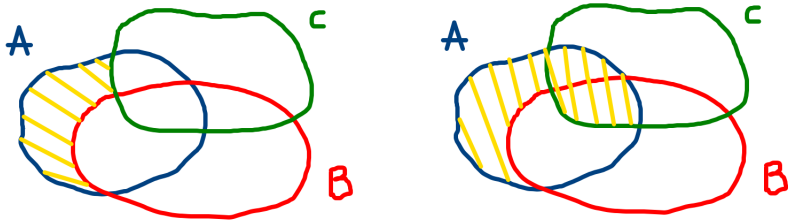
Demostración (cont.)

5. Empezamos con un elemento $x \in (A - B) - C$.

Tenemos que $x \in (A - B)$ y $x \notin C$.

Esto dice que $x \in A$, $x \notin B$ y $x \notin C$. En particular $x \notin B - C$.

Concluimos que $x \in A - (B - C)$.

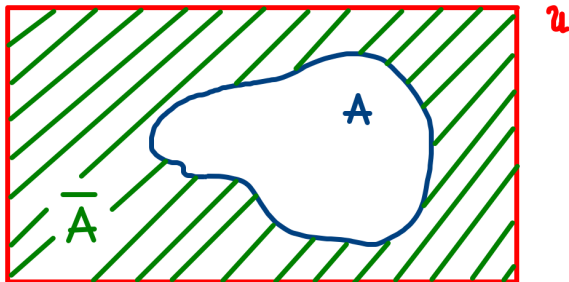


Complemento (relativo)

Definición

Dado un conjunto $A \subseteq \mathcal{U}$, definimos el complemento de A (relativo al conjunto universal $\mathcal{U}$) como el conjunto

$$\bar{A} = \mathcal{U} - A = \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}.$$



Otras notaciones frecuentes

- ▶ A^c
- ▶ $\complement A$
- ▶ $\complement_{\mathcal{U}} A$
- ▶ A'

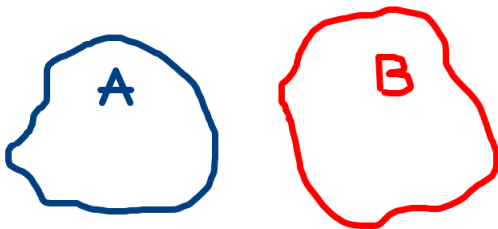
Definición

Dos conjuntos A y B se dicen *disjuntos* si $A \cap B = \emptyset$.

Ejemplo/Ejercicio

Dado $A \subseteq \mathcal{U}$,

- ▶ $A \cap \bar{A} = \emptyset$, es decir, A y su complemento son disjuntos.
- ▶ $A \cup \bar{A} = \mathcal{U}$.



Leyes de la teoría de conjuntos

Teorema

Dados tres conjuntos A, B, C tomados de un universo $\mathcal{U}$, se tienen:

1. $\overline{\overline{A}} = A$ (ley del doble complemento)
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (leyes de De Morgan)
3. $A \cup B = B \cup A$
 $A \cap B = B \cap A$ (leyes conmutativas)
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (leyes asociativas)
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (leyes distributivas)
6. $A \cup A = A$
 $A \cap A = A$ (leyes idempotentes)

7. $A \cup \emptyset = A$

$A \cap \mathcal{U} = A$ (leyes de identidad)

8. $A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (B \cup A) = A$ (leyes de absorción)

Demostración.

- ▶ Ejercicio (algunas pruebas ya las hicimos).
- ▶ Tratar de dibujar en cada caso el diagrama de Venn que represente cada ley de la teoría de conjuntos. □

Observación

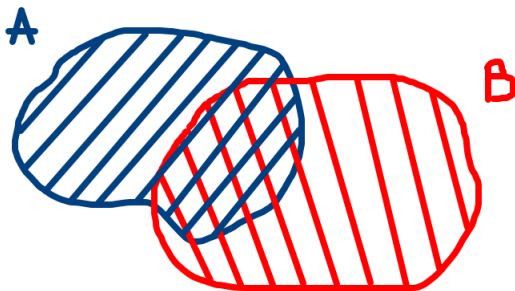
Hay una similitud muy grande entre las leyes de la teoría de conjuntos y las leyes de la lógica. Esta analogía no es casual y se estudia en materias más avanzadas.

Ejemplo

El cardinal de la unión de dos conjuntos finitos A y B se puede calcular como

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \quad (1)$$

En efecto, la cantidad de elementos en $A \cup B$ se puede obtener sumando la cantidad de elementos en A y la cantidad de elementos en B , observando que de este modo estaríamos contando dos veces los elementos de $A \cap B$, por eso tenemos que restar el término $|A \cap B|$ en la fórmula (1).



Corolario

Si A y B son dos conjuntos finitos disjuntos, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

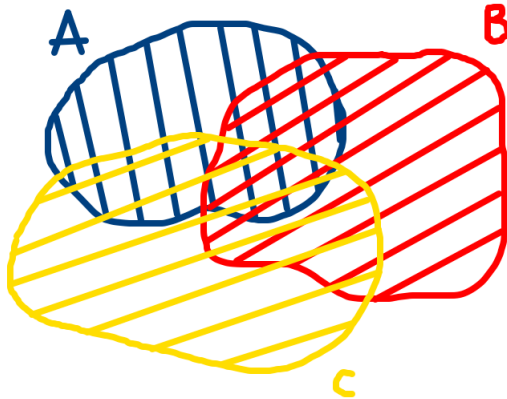
Demostración.

Sigue del ejemplo anterior, observando que como en este caso $A \cap B = \emptyset$ tenemos que $|A \cap B| = 0$. □

Ejemplo

Si A , B y C son tres conjuntos finitos, entonces

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



Ejemplo (cont.)

El resultado anterior también lo podemos demostrar usando lo que ya sabemos sobre el cardinal de la unión de dos conjuntos $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ y las leyes de la teoría de conjuntos:

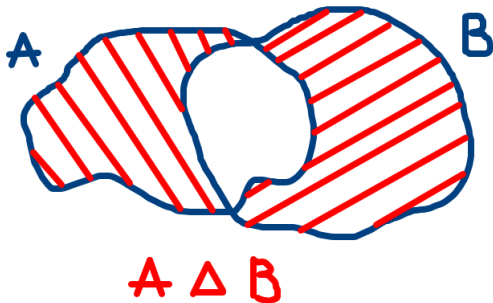
$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A \cup (B \cup C)| \\ &= |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| \\ &\quad - [|A \cap B| + |A \cap C| - |(A \cap B) \cap (A \cap C)|] \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

Diferencia simétrica

Definición

La *diferencia simétrica* entre los conjuntos A y B es el conjunto

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$



Teorema

Dados los conjuntos A , B y C se tiene:

1. $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$.
2. $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.
3. $A \triangle B = B \triangle A$.
4. $A \triangle \emptyset = A$.
5. $A \triangle A = \emptyset$. Más aún, $A \triangle B = \emptyset \iff A = B$.
6. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

Demostración.

Veamos la primera afirmación a modo de ejemplo y dejemos las demás como ejercicio para practicar. Antes de seguir con la prueba, enunciaremos el siguiente resultado auxiliar (cuya demostración queda como ejercicio).

Lema

Si X e Y son tomados de un conjunto universal $\mathcal{U}$, entonces $X - Y = X \cap \overline{Y}$.

Demostración del Teorema (cont.)

Supongamos que $A, B \subseteq \mathcal{U}$. Por un lado tenemos que

$$A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=} (A - B) \cup (B - A) \stackrel{\text{Lema}}{=} (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}).$$

Por otro lado

$(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$	Lema
$= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$	De Morgan
$= [(A \cup B) \cap \overline{A}] \cup [(A \cup B) \cap \overline{B}]$	Distr.
$= [\overline{A} \cap (A \cup B)] \cup [\overline{B} \cap (A \cup B)]$	Conmut.
$= [(\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B)] \cup [(\overline{B} \cap A) \cup (\overline{B} \cap B)]$	Distr.
$= [\emptyset \cup (\overline{A} \cap B)] \cup [(\overline{B} \cap A) \cup \emptyset]$	Clase ant.
$= (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A)$	Neutro
$= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$	Conmut. □

¿Qué es un par ordenado?

- ▶ **IMPORTANTE:** los conjuntos no están ordenados: $\{a, b\} = \{b, a\}$
- ▶ Dicho de otro modo, si tenemos un conjunto con dos elementos $A = \{a, b\}$ no podemos saber cuál es el primer elemento y cual es el segundo elemento de A . De hecho, ni siquiera tiene sentido preguntarnos esto.
- ▶ En un par *ordenado*, importa el orden de los dos elementos.

Definición

El *par ordenado* de los elementos a y b se define como

$$(a, b)$$

Se dice que a (resp. b) es el *primer* (resp. *segundo*) elemento del par ordenado (a, b) .

Notación

A veces también decimos que a (resp. b) es la *primera* (resp. *segunda*) *coordenada* del par ordenado (a, b) .

Igualdad de pares ordenados

Definición

Dados a, b, c, d tenemos que

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ y } b = d.$$

Importante

- ▶ el par ordenado (a, b) se construye a partir de los elementos a y b ;
- ▶ el primer elemento de (a, b) es a ;
- ▶ el segundo elemento de (a, b) es b .

Producto cartesiano

Definición

Dados dos conjuntos A y B , el *producto cartesiano* $A \times B$ se define como el conjunto de todos los posibles pares ordenados en los cuales la primer coordenada es un elemento de A y la segunda un elemento de B :

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Ejemplo

- El plano se define como el producto cartesiano de dos rectas

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

- El espacio tridimensional se puede definir como el producto cartesiano

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

Observar que también tendría sentido definir $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. De hecho, en la práctica identificaremos $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ con $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ y simplemente usaremos *ternas ordenadas*

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

- Se trabaja similarmente con $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5, \dots, \mathbb{R}^n, \dots$

Uniones e intersecciones generalizadas

Unión generalizada

Definición

Si $\mathcal{F}$ es un conjunto de conjuntos, existe un conjunto $\bigcup \mathcal{F}$, llamado la *unión de $\mathcal{F}$* , cuyos elementos son exactamente los elementos de todos los conjuntos que conforman $\mathcal{F}$. En símbolos

$$x \in \bigcup \mathcal{F} \iff \exists (A \in \mathcal{F}), x \in A$$

Ejemplo

$$\bigcup \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4, 5\}\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Otras notaciones

Existen notaciones más amigables para las uniones arbitrarias.

- ▶ Si $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ denotamos la unión $\bigcup \mathcal{F}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^n A_i &= A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \\ &= \{x \in \mathcal{U} : x \in A_i \text{ para algún } i = 1, 2, \dots, n\}.\end{aligned}$$

- ▶ Si I es un conjunto de índices y $\mathcal{F} = \{A_i : i \in I\}$ denotamos la unión $\bigcup \mathcal{F}$ por

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in \mathcal{U} : x \in A_i \text{ para algún } i \in I\}.$$

- ▶ Caso particular, cuando $I = \mathbb{N}$, se suele denotar

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$$

Importante

A veces la notación de subíndices presenta dificultades cuando recién empezamos a usarla. Hay que tener en cuenta que lo importante es el conjunto I del cual se toman los índices, y no la letra particular $i \in I$ que usemos para denotarlos. Por ejemplo, si $I = \mathbb{N}$ tenemos que

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{etc.}$$

Ejemplo/Ejercicio

- ▶ Si A es un conjunto, entonces $\bigcup \mathcal{P}(A) = A$.
- ▶ Si $\mathcal{F}$ es una familia de conjuntos, entonces $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$.

Intersecciones arbitrarias

Análogamente a la uniones arbitrarias, podemos definir la intersección arbitraria de una familia de conjuntos.

Definición

Si $\mathcal{F}$ es un conjunto de conjuntos, el conjunto $\bigcap \mathcal{F}$, llamado *la intersección de $\mathcal{F}$* , es el conjunto cuyos elementos son exactamente los elementos que están en todos los conjuntos que conforman $\mathcal{F}$ a la vez. En símbolos

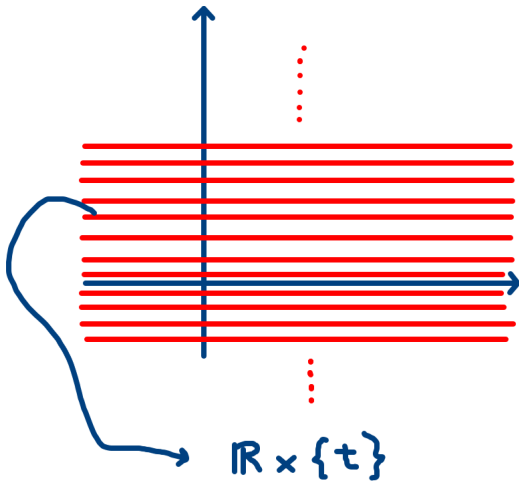
$$x \in \bigcap \mathcal{F} \iff \forall (A \in \mathcal{F}), x \in A.$$

Notaciones alternativas

- ▶ $\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \in \mathcal{U} : x \in A_i \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n\}.$
- ▶ $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in \mathcal{U} : x \in A_i \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\}.$
- ▶ $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in \mathcal{U} : x \in A_i \text{ para todo } i \in I\}.$

Ejemplo

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} (\mathbb{R} \times \{t\})$$



Ejemplo/Ejercicio

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$I_n = [-n, n] = \{x \in \mathbb{R} : -n \leq x \leq n\}.$$

Probar que,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n] = \mathbb{R},$$

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} [-n, n] = [-1, 1].$$

