

PRÁCTICA 2 - Teoría de Conjuntos

1. Escribir los siguientes conjuntos por extensión.

- | | |
|---|---|
| a) $\{1 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$. | e) $\{n \in \mathbb{N}, / -4 \leq n \leq 8, n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$ |
| b) $\{y/y = t^2, t \in \mathbb{N}, t \leq 5\}$ | f) $\{u \in \mathbb{Z}/0 \leq u \leq 9, u + 1 < 7\}$ |
| c) $\{n^3 + n^2 : n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$ | g) $\{n + 1/n : n \in \{1, 2, 3, 5, 7\}\}$ |
| d) $\{1/(n^2 + n) : n \in \mathbb{N}, n \text{ impar}, n \leq 11\}$ | h) $\{z \in \mathbb{R}/\sqrt{z} \in \mathbb{N}, z^2 \leq 25\}$ |

Además, observar si hay relaciones entre los mismos. ¿Qué se deduce en cuanto a la forma de definir un conjunto? Intentar otras formas de definir los conjuntos de (a), (b) y (c).

2. Escribir los siguientes conjuntos por comprensión usando lenguaje simbólico:

- El conjunto de los números racionales positivos cuyos denominadores son mayores que los numeradores.
- El conjunto de los divisores de 20.
- El conjunto de los números pares múltiplos de 3.
- El conjunto de los números reales cuyas raíces cuadradas son menores a 1.
- $\{3\}$

3. Indicar en cada caso cuáles afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas, justificando la respuesta.

a) $A = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, -4\}$

- | | | | |
|------------------------|--------------------------------|-----------------------|-------------------------|
| 1) $-4 \in \mathbb{N}$ | 4) $\mathbb{Z} \in A$ | 7) $6 \in \mathbb{N}$ | 10) $-8 \in \mathbb{N}$ |
| 2) $-4 \in \mathbb{Z}$ | 5) $\mathbb{N} \in A$ | 8) $6 \in \mathbb{Z}$ | 11) $-8 \in \mathbb{Z}$ |
| 3) $-4 \in A$ | 6) $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$ | 9) $6 \in A$ | 12) $8 \in A$ |

b) $B = \{1, 2, 3, 4, \{5\}\}$

- | | | | | |
|---------------------|---------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| 1) $2 \in \{1, 2\}$ | 3) $\{1, 2\} \in B$ | 5) $1 \notin B$ | 7) $4 \notin B$ | 9) $\{3, 4\} \in B$ |
| 2) $2 \in B$ | 4) $3 \in B$ | 6) $5 \in B$ | 8) $5 \in \{5\}$ | 10) $\{3\} \in B$ |

4. Dar un ejemplo de tres conjuntos W, X, Y tales que $W \in X, X \in Y$ pero $W \notin Y$. ¿Qué puede decirse de la afirmación $[(W \in X) \wedge (X \in Y)] \Rightarrow W \in Y$?

5. Dado $A = \{1, \{1\}, 2\}$, determinar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas, justificando la respuesta.

- | | | |
|---|----------------------------|-------------------------------|
| a) $\mathbb{N}$ es un universo para A . | d) $\{1\} \subseteq A$. | g) $\{2\} \subseteq A$. |
| b) $1 \in A$. | e) $\{\{1\}\} \subset A$. | h) $\{\{2\}\} \subseteq A$. |
| c) $\{1\} \in A$. | f) $\{2\} \in A$. | i) $\{\{1, 2\}\} \subset A$. |

6. Dados $V = \{a, b\}$, $X = \{d, b\}$, $Z = \{a, d, e\}$, $W = \{a, b, d, e\}$ y $Y = \{d, e\}$, determinar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas, justificando la respuesta.

- | | | | | |
|------------------------|--------------------|------------------------|------------------------|--------------------|
| a) $V \subset W$ | c) $V \subset Z$ | e) $Y \not\subseteq X$ | g) $Y \supseteq W$ | i) $X \subseteq W$ |
| b) $Y \not\subseteq V$ | d) $Y \subseteq W$ | f) $Z \supset Y$ | h) $V \not\subseteq Z$ | j) $X \subseteq Z$ |

7. Determinar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas, justificando la respuesta.

- a) $\emptyset \in \emptyset$. b) $\emptyset \subset \emptyset$. c) $\emptyset \subseteq \emptyset$. d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$. e) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$. f) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$.

8. Sean $A, B, C, D, E \subset \mathbb{Z}$, $A = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{4n : n \in \mathbb{Z}\}$, $D = \{6n : n \in \mathbb{Z}\}$ y $E = \{8n : n \in \mathbb{Z}\}$. Determinar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles falsas, justificando adecuadamente la respuesta.

- | | | |
|--------------------------------|--------------------|--------------------|
| a) $E \subseteq C \subseteq A$ | c) $B \subseteq D$ | e) $D \subseteq A$ |
| b) $A \subseteq C \subseteq E$ | d) $D \subseteq B$ | |

9. Para los conjuntos $A, B, C \subseteq U$ demostrar la verdad o falsedad (con un contraejemplo) de lo siguiente: Si $A \subseteq B$ y $B \not\subseteq C$, entonces $A \not\subseteq C$.

10. En cada caso, analizar si los conjuntos dados son iguales.

- a) $\{5, 6, 7\}$ y $\{5, \{6\}, 7\}$
b) $\{n \in \mathbb{N} / n \text{ es par}\}$ y $\{n \in \mathbb{N} / n = p + q, p, q \in \mathbb{N}, p, q \text{ impares}\}$
c) $\{2, 5\}$ y $\{\{2, 5\}\}$

11. Sean A, B y C conjuntos. Demostrar que:

- a) Si $A \subset B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subset C$.
b) Si $A \subseteq B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

12. Dar ejemplos de conjuntos que verifiquen las condiciones indicadas en cada caso:

- a) $A \subseteq B, B \subseteq C, D \subseteq C, A \not\subseteq D$
b) $A \subseteq B, B \in C, C \subseteq D$
c) $A \in B, B \not\subseteq C, A \in C$
d) $A \in B, B \not\subseteq C, A \notin C$

13. Dado $E = \{1, \{2\}, \{3, 4\}, 5, \{6, 7\}\}$ decir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas, justificando la respuesta.

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|---|
| a) $1 \in E$ | e) $\{5\} \subset E$ | i) $\exists x \in E / \{x\} \in E$ |
| b) $\{2\} \in E$ | f) $\{3, 4\} \in P(E)$ | j) $\forall x \in E, \{x\} \notin P(E)$ |
| c) $\{1\} \in P(E)$ | g) $\{6, 7\} \subseteq E$ | k) $\exists x \in E / \{x\} \not\subseteq E$ |
| d) $\{1\} \subseteq P(E)$ | h) $\{6, 7\} \subseteq P(E)$ | l) $\exists x \in E / \{x\} \not\subseteq P(E)$ |

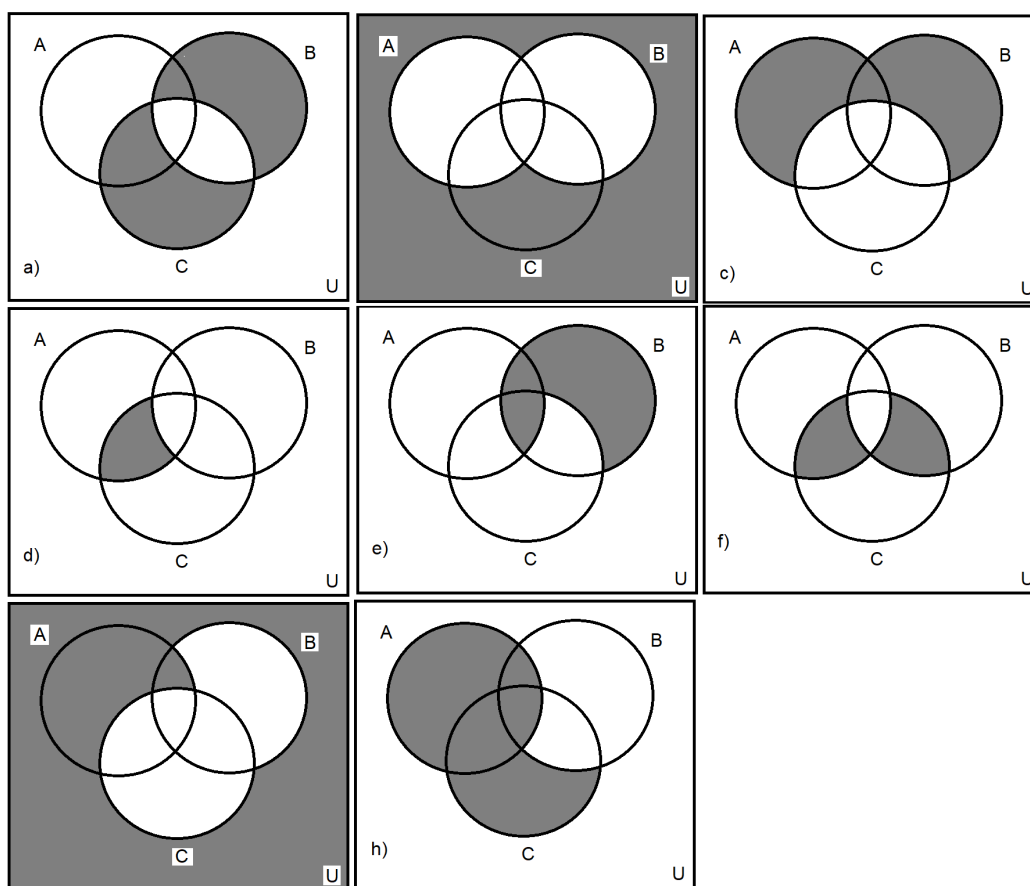
14. Sean $A, B, C, D, E \subset \mathbb{Z}$, $A = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{4n : n \in \mathbb{Z}\}$, $D = \{6n : n \in \mathbb{Z}\}$ y $E = \{8n : n \in \mathbb{Z}\}$. Determinar cada uno de los siguientes conjuntos:

- a) $C \cap E$ c) $A \cap B$ e) $\bar{A}$
b) $B \cup D$ d) $B \cap D$ f) $A \cap E$

15. Para $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ y $D = \{2, 4, 6, 8\}$. Representar los conjuntos en un diagrama de Venn y determinar:

- a) $(A \cup B) \cap C$ d) $\overline{C \cap D}$ g) $(B - C) - D$
b) $A \cup (B \cap C)$ e) $(A \cup B) - C$ h) $B - (C - D)$
c) $\overline{C \cup D}$ f) $(A \cup (B - C))$ i) $(A \cup B) - (C \cap D)$.

16. Escribir en forma simbólica los siguientes conjuntos representados mediante los diagramas de Venn:



17. En una comisión de primer año en la FCEIA de 100 estudiantes se tiene que:

32 aprobaron el primer parcial de análisis, 38 aprobaron el primer parcial de programación, 50 aprobaron el primer parcial de álgebra, 20 aprobaron el primer parcial de análisis y el de programación, 18 aprobaron el primer parcial de análisis y el de álgebra, 25 aprobaron el primer parcial de programación y el de álgebra, 15 aprobaron los tres parciales.

¿Cuántos estudiantes no aprobaron ninguna de las 3 materias? Recordarles que aún hay esperanzas, existen los recuperatorios!

18. Calcular cuántos números naturales menores o iguales a 1000 existen que no sean múltiplos ni de 3, ni de 5, ni de 7.
19. Construir, si es posible conjuntos A, B, C, D que cumplan las siguientes condiciones. En caso de no ser posible justifique por qué no lo es:
- a) $B \subsetneq A$, $A \cap D \neq \emptyset$, $C \cap D \neq \emptyset$, $C \cap A = \emptyset$, $B \cap D = \emptyset$.
- b) $A \cap B \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$, $C \cap A \neq \emptyset$, $A \subseteq D$, $D \cap C = \emptyset$.
20. Dados dos conjuntos A y B cualesquiera, demostrar que las siguientes proposiciones son equivalentes:
- a) $A \subseteq B$
 b) $A \cup B = B$
 c) $A \cap B = A$.
21. Sea A un subconjunto del conjunto universal U . Demostrar las siguientes propiedades:
- a) $A \cup A = A$ b) $A \cap A = A$ c) $A \cap \emptyset = \emptyset$ d) $A \cup U = U$.
22. Determinar qué relación existe entre $P(A \cup B)$ con $P(A) \cup P(B)$ y entre $P(A \cap B)$ con $P(A) \cap P(B)$.
23. Dados dos conjuntos A y B se define la *diferencia simétrica* entre A y B al conjunto

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

- a) Dados los siguientes subconjuntos de números enteros:

$$A = \{z \in \mathbb{Z} : |z| \geq 1\}, \quad B = \{z \in \mathbb{Z} : |z| \leq 2\}, \quad C = \{z \in \mathbb{Z} : z = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$$

determinar:

- | | | |
|--------------------|-----------------------------|---|
| 1) $A \triangle B$ | 3) $B \triangle C$ | 5) $(\overline{A} \cap C) \triangle (B \cap C)$ |
| 2) $A \triangle C$ | 4) $(A \cap B) \triangle C$ | 6) $A \triangle \overline{C}$ |

- b) Dados A y B subconjuntos de un conjunto universal U , demostrar las siguientes propiedades de la diferencia simétrica:

- | | |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $A \triangle B = B \triangle A$ | 3) $A \triangle U = \overline{A}$ |
| 2) $A \triangle \emptyset = A$ | |

24. Demostrar las siguientes proposiciones, justificando en cada paso la propiedad de la teoría de conjuntos aplicada.

- a) $(A - B) - C \subseteq A - (B - C)$.
- b) $A = (A \cap B) \cup (A - B)$.
- c) $\overline{A - B} = \overline{A} \cup B$.
- d) $\overline{(A \cup B) \cap C} \cup \overline{B} = B \cap C$.
- e) $\overline{A \triangle B} = \overline{A} \triangle B = A \triangle \overline{B}$.
- f) $(A \cap B) \cup [B \cap ((C \cap D) \cup (C \cap \overline{D}))] = B \cap (A \cup C)$.

25. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $B_n = \{n+1, n+2, n+3, \dots\}$. Determinar:

a) $\bigcup_{n=1}^8 B_n,$

b) $\bigcap_{n=1}^{11} B_n,$

c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$

d) $\bigcap_{n=1}^m B_n,$ con $m \in \mathbb{N}$ fijo.

26. Sea $U = \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = [-2n, 3n]$. Determinar:

a) A_3

c) $A_3 - A_4$

e) $\bigcup_{n=1}^7 A_n$

g) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

b) A_4

d) $A_3 \triangle A_4$

f) $\bigcap_{n=1}^7 A_n$

h) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$

27. Dado un universo U y un conjunto de índices I , para cada $i \in I$ sea $B_i \subset U$. Demostrar que para cada $A \subseteq U$ se verifican:

a) $A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$

b) $A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$

28. Sea I un conjunto cualquiera de índices y $\{A_i\}_{i \in I} \subset U$ una familia de conjuntos. Probar que

a) $A_j \subseteq B$ para cada $j \in I$ si y sólo si $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B$

b) $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_j$ para cada $j \in I$

c) $B \subseteq A_j$ para cada $j \in I$ si y sólo si $B \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$