Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
ÁLGEBRA y GEOMETRÍA ANALÍTICA I
Licenciatura en Física - Año 2015

Equipo docente: Viviana del Barco, Lucía Caraballo y Ana Murinigo.

UNIDAD 5: Polinomios

1. Polinomios: Definiciones y propiedades básicas.

Comenzamos repasando algunos conceptos básicos de polinomios.

Definición 1. *Un **polinomio** es una expresión de la forma*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{1}$$

donde $n \in \mathbb{N}_0$, cada $a_k \in \mathbb{C}$, para $i = 0, 1, \cdots, n$ y x toma valores en $\mathbb{C}$.

Dado un polinomio como en (1), cada número complejo a_k se llama **coeficiente** del polinomio. Cada término de la forma $a_k x^k$ se denomina un **monomio** y k es el **grado** del monomio y el grado del coeficiente a_k. El coeficiente a_0 se llama término independiente de p.

Si $a_k = 0$ para cada $k = 0, \cdots, n$ entonces $p(x) \equiv 0$ para todo x y p se denomina **polinomio nulo** y se denota $p = 0$.

Si p es un polinomio **no** nulo, se denomina **grado** del polinomio p al mayor número natural o cero n tal que $a_n \neq 0$. Si p tiene grado n escribimos $gr(p) = n$ o $gr(p(x)) = n$. Observar que si $gr(p) = n$ entonces $a_k = 0$ para todo $k \geq n + 1$ y el coeficiente a_n se llama **coeficiente principal**. El polinomio nulo no tiene grado.

El polinomio p se dice a **coeficientes complejos** y el conjunto de todos los polinomios a coeficientes complejos se denota $\mathbb{C}[x]$. El polinomio p se dice un polinomio a **coeficientes reales** (respectivamente racionales o enteros) si todos sus coeficientes son reales (respectivamente racionales o enteros). Estos conjuntos se denotan $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{Z}[x]$.

Decimos que dos polinomios p y q **son iguales** si tienen igual grado y los coeficientes de los términos de igual grado son iguales. Esto es, si

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0, \quad q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0,\ b_m \neq 0$$

entonces

$$p = q \text{ si y sólo si } \begin{cases} n = m \\ a_k = b_k,\ \forall\, k = 0, \cdots, n = m. \end{cases}$$

Observación 2. *Al escribir un polinomio p en la forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, estamos implicitamente diciendo que $a_k = 0$ para todo $k \geq n + 1$.*

A continuación damos las definiciones formales de suma, resta y producto de polinomios.

Recordemos que para sumar dos polinomios, sumamos los coeficientes de los monomios de igual grado.

Ejemplo 3. *Si $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$ y $q(x) = x^4 + x^2 + x$, entonces:*

$$\begin{array}{rccccc} p(x): & & 2x^3 & +3x^2 & & +1 \\ +q(x): & x^4 & & +x^2 & +x & \\ \hline (p+q)(x) = & x^4 & +2x^3 & +4x^2 & +x & +1 \end{array}$$

De manera formal, definimos la suma como sigue:

Definición 4. *Dados dos polinomios $p, q \in \mathbb{C}[x]$, el polinomio suma $p + q$ es aquel polinomio cuyo coeficiente de grado k se obtiene de sumar los coeficientes de grado k de p y q.*

Más precisamente, si $p, q \in \mathbb{C}[x]$ tienen la forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ y $q(x) = b - m x^m + \cdots b_1 x + b_0$, el polinomio $p + q$ resulta:

- Si $n \geq m$: $\quad (p+q)(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_{m+1} x^{m+1} + (a_m + b_m) x^m + (a_{m-1} + b_{m-1}) x^{m-1} + \cdots$
$$\cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0).$$
- Si $m > n$: $\quad p + q$ coincide con $q + p$ donde $q + p$ se calcula según la el renglón anterior.

Teorema 5. *La suma de polinomios es una operación cerrada en $\mathbb{C}[x]$, asociativa, conmutativa, con elemento neutro (el polinomio nulo) y tal que cada $p \in \mathbb{C}[x]$ admite un elemento opuesto, que denotamos $-p$. Además, si $p, q \in \mathbb{C}[x]$ se verifica*

$$gr(p+q) \leq \text{máx}\{gr(p),\ gr(q)\}.$$

Demostración. Ejercicio $\square$

Observación 6. 1. *Si $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$, entonces su polinomio opuesto $-p$ tiene la forma $(-p)(x) = (-a_n) x^n + \cdots + (-a_1) x + (-a_0)$.*
2. *Si $p, q \in \mathbb{C}[x]$ y $gr(p) > gr(q)$ entonces $gr(p+q) = gr(p)$.*

Definición 7. *Dados dos polinomios $p, q\mathbb{C}[x]$, se define la* **resta** *de q a p y se denota $p - q$ como el polinomio $p - q = p + (-q)$, donde $-q$ es el polinomio opuesto de q.*

Ejemplo 8. *Si $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$ y $q(x) = x^4 + x^2 + x$ son como en el ejemplo 3 entonces:*

$$\begin{array}{rccccc} p(x): & & 2x^3 & +3x^2 & & +1 \\ (-q)(x): & -x^4 & & -x^2 & -x & \\ \hline (p-q)(x) = & -x^4 & +2x^3 & +2x^2 & -x & +1 \end{array}$$

Recordemos que para multiplicar dos polinomios, esencialmente aplicamos la propiedad distributiva y las propiedades de la potencia de números complejos. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 9. *$p(x) = x^5 - ix^2 + 2x$ y $q(x) = x^2 + 3$, entonces*

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= (x^5 - ix^2 + 2x) \cdot (x^2 + 3) = (x^5 - ix^2 + 2x) \cdot x^2 + (x^5 - ix^2 + 2x) \cdot 3 \\ &= (x^7 - ix^4 + 2x^3) + (3x^5 - 3ix^2 + 6x) \\ &= x^7 + 3x^5 - ix^4 + 2x^3 - 3ix^2 + 6x \end{aligned}$$

A partir de este ejemplo, será más comprensible la definición formal del producto de polinomios.

Definición 10. *Dados dos polinomios $p, q \in \mathbb{C}[x]$ de la forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ y $q(x) = b - m x^m + \cdots b_1 x + b_0$, se define el polinomio* **producto** *$p \cdot q$ como:*

$$(p \cdot q)(x) = (a_n \cdot b_m) x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m) x^{n+m-1} + \cdots + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + a_0 b_0$$

Teorema 11. *El producto de polinomios es una operación cerrada en $\mathbb{C}[x]$, asociativa, conmutativa y con elemento neutro (el polinomio constante igual a 1). Además, si $p, q \in \mathbb{C}[x]$ son no nulos, se verifica*

$$gr(p \cdot q) = gr(p) + gr(q)$$

Demostración. Ejercicio $\square$

2. Divisibilidad

A diferencia de la suma, para el producto no existe, en general, un elemento simétrico. Es decir, dado un polinomio $p \in \mathbb{C}[x]$, no existe, en general, un polinomio $p^* \in \mathbb{C}[x]$ tal que $p \cdot p^* = 1$. De hecho esto es posible si y sólo si $gr(p) = 0$, esto es, si p es un polinomio constante no nulo (intentar una prueba). En consecuencia, no es posible definir el cociente de polinomios como una operación cerrada en $\mathbb{C}[x]$.

Los polinomios se comportan en este sentido como los números enteros. Dados dos número enteros m y n, con $n > 0$, el cociente m/n no es, en general, un número entero. Pero existen enteros c y r, con $r < n$, denominados cociente y resto, tales que $m = c \cdot n + r$. Así por ejemplo, tenemos que el cociente de dividir 25 por 6 es 4, y el resto es 1, esto es $25 = 6 \cdot 4 + 1$, o $137 = 7 \cdot 19 + 4$, o sea que el cociente de dividir 137 por 7 es 19, y el resto es 4.

Existe un algoritmo similar para dividir polinomios:

Teorema 12. ***Algoritmo de la división***

Dados dos polinomios $p,\ q \in \mathbb{C}[x]$ con $q \neq 0$, existen únicos polinomios c y r en $\mathbb{C}[x]$ tales que $r = 0$ o $gr(r) < gr(q)$ y $p = c \cdot q + r$.

El polinomio c se denomina **cociente** y el polinomio r se denomina **resto**.

Observación 13. *Si $gr(p) < gr(q)$, tomamos $c = 0$ y $r = p$.*

Antes de ver la demostración del teorema, recordemos cómo hallar en forma práctica los polinomios c y r.

Ejemplo 14. *Supongamos que queremos dividir el polinomio $p(x) = 4x^4 - 2x^3 + 2x$ por el polinomio $q(x) = x^2 - x - 1$. Entonces procedemos de la siguiente manera:*

En primera instancia completamos el polinomio p, es decir, escribimos explícitamente los coeficientes cero menores al grado de p: $p(x) = 4x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 2x + 0$.

Luego disponemos p y q como en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 4x^4 & -2x^3 & +0x^2 & +2x & +0 & \ x^2 - x - 1 \\ \cline{6-6} \end{array}$$

Dividimos el monomio de mayor grado de p por el monomio de mayor grado de q, en este caso $\dfrac{4x^4}{x^2} = 4x^2$. Multiplicamos el resultado por q, escribimos su opuesto debajo de p, y realizamos la operación $p(x) - 4x^2 q(x)$:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 4x^4 & -2x^3 & +0x^2 & +2x & +0 & \ x^2 - x - 1 \\ \cline{6-6} -4x^4 & +4x^3 & +4x^2 & & & \ 4x^2 \\ \cline{1-3} & 2x^3 & +4x^2 & +2x & +0 & \end{array}$$

Repetimos este proceso, hasta llegar a un polinomio (resto) de grado menor que el de q.

$$\begin{array}{rrrrr|ll} 4x^4 & -2x^3 & +0x^2 & +2x & +0 & \ x^2 - x - 1 & \\ \cline{6-6} -4x^4 & +4x^3 & +4x^2 & & & \ 4x^2 + 2x + 6 & \leftarrow \textit{Cociente} \\ \cline{1-3} & 2x^3 & +4x^2 & +2x & +0 & & \\ & -2x^3 & +2x^2 & +2x & & & \\ \cline{2-4} & & 6x^2 & +4x & +0 & & \\ & & -6x^2 & +6x & +6 & & \\ \cline{3-5} & & & 10x & +6 & & \leftarrow \textit{Resto} \end{array}$$

En este caso, el cociente es $c(x) = 4x^2 + 2x + 6$ y el resto es $r(x) = 10x + 6$, y es fácil verificar que $p = c \cdot q + r$.

Haremos ahora la demostración del Teorema 12:

Demostración. Consideremos el conjunto

$$A = \{p - h \cdot q : h \in \mathbb{C}[x]\}$$

Existen dos opciones: que el polinomio nulo esté en A o que no esté en A.

Caso 1: Supongamos que $0 \in A$. Entonces existe $\widetilde{h} \in \mathbb{C}[x]$ tal que $0 = p - \widetilde{h} \cdot q$. Luego tomando $c = \widetilde{h}$ se verifica $p = c \cdot q$, y vale el teorema con $r = 0$.

Caso 2: Supongamos que $0 \notin A$. Entonces para todo $h \in \mathbb{C}[x]$ debe ser $p - h \cdot q \neq 0$ y por lo tanto todo polinomio en A tiene grado.

Sea n_0 el mínimo de los grados de los polinomios que están en A. Es decir, si $u(x) \in A$ entonces $gr(u) \geq n$, o de manera equivalente, si $t \in \mathbb{C}[x]$ y $gr(t) < n_0$ entonces $t \notin A$. Como n_0 es el mínimo entre todos los grados posibles de los polinomios de A, resulta que hay (al menos) un polinomio cuyo grado es n_0, que llamamos $s \in A$. Luego existe $h_0 \in \mathbb{C}[x]$ tal que $s = p - h_0 \cdot q$ y $gr(p - h_0 q) = n_0$. Veamos que $gr(s) < gr(q)$.

Supongamos que $s = b_{n_0}x^{n_0} + \cdots + b_1 x + b_0$ y que $q = d_m x^m + \cdots + d_1 x + d_0$ con $d_m \neq 0$ y b_{n_0}, es decir $gr(q) = m$. Según lo escrito arriba, vamos a probar que $n_0 = gr(s) < gr(q) = m$. Por el contrario, suponemos que $n_0 \geq m$ para llegar a un absurdo.

Supongamos que $n_0 \geq m$. Entonces $n_0 - m \geq 0$ y es posible construir el siguiente polinomio

$$\widetilde{s} = s - \frac{b_{n_0}}{d_m}x^{n_0-m} \cdot q = p - h_0 \cdot q - \frac{b_{n_0}}{d_m}x^{n_0-m} \cdot q = p - \left(h_0 + \frac{b_{n_0}}{d_m}x^{n_0-m}\right) \cdot q.$$

Observemos que $\widetilde{s} \in A$ (1) pues probamos que $\widetilde{s} = p - \widetilde{h}q$ donde $\widetilde{=}h_0 + \frac{b_{n_0}}{d_m}x^{n_0-m} \in \mathbb{C}[x]$. Calculemos el grado de $\widetilde{s}$.

Notar que $gr(\frac{r_{n_0}}{q_m}x^{n_0-m} \cdot q) = gr(\frac{r_{n_0}}{q_m}x^{n_0-m}) + gr(q) = n_0 - m + m = n_0$, resulta $gr(\widetilde{s}) \leq n_0$. Por otro lado, el término de grado n_0 de $\widetilde{s}$ es $r_{n_0}x^{n_0} - \frac{r_{n_0}}{q_m}x^{n_0-m}q_m x^m = 0$. Luego $gr(\widetilde{R}) < n_0$ (2).

Las afirmaciones (1) y (2) llean a una contradicción pues no puede haber ningún polinomio en A de grado menor estricto que n_0. El absurdo proviene de suponer que $n_0 \geq m$. Por lo tanto demostramos que $gr(s) = n_0 < m = gr(q)$. Podemos entonces tomar $c = h_0$, $r = s$ para los que se verifica que $p = c \cdot q + r$, con $gr(r) < gr(q)$.

Resta probar solamente la unicidad de los polinomios c y r que verifican las condiciones del teorema.

Supongamos que existen c_1, c_2 y r_1, r_2 en $\mathbb{C}[x]$ tales que

$$p = c_1 q + r_1 \quad \text{con } gr(r_1) < gr(q) \text{ y}$$
$$p = c_2 q + r_2 \quad \text{con } gr(r_2) < gr(q).$$

Tenemos entonces

$$p = c_1 q + r_1 = c_2 q + r_2 \Rightarrow (c_1 - c_2) \cdot q = r_2 - r_1.$$

Supongamos que $r_2 - r_1 \neq 0$ entonces $c_1 - c_2 \neq 0$ y resulta $gr((c_1 - c_2) \cdot q) = gr(c_1 - c_2) + gr(q) \geq gr(q)$. Además, $gr(r_2 - r_1) < gr(q)$ [1]. Luego en la igualdad $(c_1 - c_2) \cdot q = r_2 - r_1$ se tiene un polinomio que tiene grado $\geq gr(q)$ y grado $< q$ al mismo tiempo, lo cual es un absurdo. Este absurdo provino de suponer que $r_2 - r_1 \neq 0$.

Luego resulta $r_2 - r_1 = 0$. En este caso, se tiene $(c_1 - c_2)q = 0$ lo cual implica $c_1 - c_2 = 0$ ya que $q \neq 0$. Por lo tanto $r_2 = r_1$ y $c_2 = c_1$. Queda entonces probada la unicidad. $\square$

Corolario 15. *Sean p, $q \in \mathbb{C}[x]$ con $q \neq 0$, $p \neq q$ y $gr(p) \geq gr(q)$. Sean c y r el cociente y resto de dividir a p por q: $p = c \cdot q + r$. Entonces $c \neq 0$ y $gr(c) = gr(p) - gr(q)$.*

Demostración. Si $r = 0$ entonces, $p = cq$ y sabemos que $gr(p) = gr(c) + gr(q)$. Si $r \neq 0$, entonces $gr(r) < gr(q)$. Como $gr(cq) = gr(c) + gr(q) \geq gr(q)$ resulta que el grado de cq es mayor estricto que el grado de r, por lo tanto al sumarl cq y r, se mantiene el grado de cq. Es decir, $gr(cq + r) = gr(cq) = gr(c) + gr(q)$, como queríamos probar. $\square$

Definición 16. *Decimos que un polinomio p es* **es divisible** *por otro polinomio $q \neq 0$ si existe un polinomio c de manera que $p = cq$.*

En otras palabras, p es divisible por q si y sólo si el resto de dividir a p por q es cero.

Analizamos a continuación el caso particular en que se realice una división por un polinomio de la forma $q(x) = x - \alpha$, donde α es un número complejo cualquiera. Es decir el caso particular en que q es un polinomio de grado 1 con coeficiente principal 1.

Cuando dividimos un polinomio p por un polinomio q de la forma $q(x) = x - \alpha$, es posible calcular de manera sencilla el cociente c y el resto r. Este procedimiento para hallar c y r se conoce como **regla de Ruffini**. Observemos que si $gr(p) \geq 1$ y $q(x) = x - \alpha$ entonces el cociente c tiene grado $gr(c) = gr(p) - 1$ y $gr(r) < gr(q) = 1$, por lo tanto r es un polinomio constante.

[1] Probar esta afirmación teniendo en cuenta los diferentes casos i) $r_1 = 0$, ii) $r_2 = 0$ y iii) $r_1 \neq 0$ y $r_2 \neq 0$.

Veamos primero cómo se efectúa este algoritmo. Supongamos que queremos dividir $p(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3$ por $q(x) = x - 2$. Comencemos observando que como q es un polinomio de grado 1, el cociente de dividir p por q será un polinomio de grado 3 y el resto será el polinomio nulo o un polinomio de grado 0, es decir, un polinomio constante.

Para aplicar la regla de Ruffini, armamos una tabla como la siguiente, donde escribimos los coeficientes de p en orden decreciente de sus grados. En la primer columna del segundo renglón, colocamos el opuesto del término independiente de q.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 5 & -3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

Como segundo paso, colocamos en la tercer fila el coeficiente principal de p:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 5 & -3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & \downarrow & & & & \\ \hline & 5 & & & & \end{array}$$

Realizamos un proceso repetitivo, de izquierda a derecha, que consiste en sumar cada columna, anotar el resultado debajo de la línea y multiplicar por el número de la izquierda (en nuestro caso 2) y poner el resultado encima de la línea, pero en la columna siguiente:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 5 & -3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & \downarrow & 10 & 14 & 32 & 64 \\ \hline & 5 & 7 & 16 & 32 & 67 \end{array}$$

El último número obtenido es el resto de la división. Los anteriores representan los coeficientes del cociente, en orden decreciente de los grados, que tiene un grado menos que p. Esto es

$$r(x) = 5x^3 + 7x^2 + 16x + 32, \quad r(x) = 67.$$

Formalizaremos este método en el siguiente teorema:

Teorema 17 (Regla de Ruffini)**.** *Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ de grado mayor o igual a uno y $q(x) = x - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, y sean c y r el cociente y resto de dividir a p por q. Entonces $p(x) = c(x)(x - \alpha) + r$, donde $c(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots b_1 x + b_0$ con coeficientes que verifican*

$$(*) \begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_i = a_{i+1} + \alpha b_{i+1}, \quad i = n-2, \cdots, 0 \end{cases}$$

y el resto es el polinomio constante $r = a_0 + \alpha b_0$.

Demostración. Tomamos b_i, $i = 0, \ldots, n-1$ los coeficientes definidos por las fórmulas en (*), a partir de los coeficientes de p, y llamamos $c(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$. Efectuando el producto se obtiene que $c(x)q(x) + r(x) = (b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0)(x - \alpha) + (a_0 + \alpha b_0) = b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - \alpha b_{n-1})x^{n-2} + \cdots (b_0 - \alpha b_1)x - b_0\alpha + (a_0 + \alpha b_0) = p$. Luego, $cq + r = p$ y vale $r = 0$ o $gr(r) = 0 < 1 = gr(q)$. Por lo tanto estos polinomios construidos c y r son efectivamente el cociente y resto dados por el algoritmo de la división (pues son únicos), y vale el teorema. □

Observación 18. *Notar que el polinomio cociente c obtenido por la regla de Ruffini siempre tiene coeficiente principal igual al coeficiente principal de p. Esto se ve claramente cuando «bajamos» el primer número de la fila superior (simbolizado con una flecha en el ejemplo anterior). En el Teorema anterior, este hecho se ve claramente cuando dice que el coeficiente b_{n-1} (principal de c) es igual a a_n, coeficiente principal de p.*

Observación 19. *Notar que la regla de Ruffini puede usarse cuando el polinomio divisor $q(x)$ es de grado 1 y con coeficiente principal 1. Sin embargo, es posible adaptarla al caso que q sea de grado 1 pero con coeficiente principal distinto de uno. Veamos el siguiente ejemplo.*

Sea $p(x) = 2x^3 - 8x^2 + 10x - 4$ y $q(x) = 4x - 6$, queremos hallar el cociente y resto de dividir a p por q. No podemos aplicar directamente Ruffini pues el coeficiente principal de q es $4 \neq 1$. Sin embargo, podemos sacar factor común 4 del polinomio q, obteniendo $q(x) = 4(x - \frac{3}{2})$, y efectuar la división de p por $x - \frac{3}{2}$ utilizando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -8 & 10 & -4 \\ \frac{3}{2} & \downarrow & 3 & \frac{-15}{2} & 5 \\ \hline & 2 & -5 & \frac{5}{2} & 1 \end{array}$$

Resulta que $p(x) = (2x^2 - 5x + \frac{5}{2})(x - \frac{3}{2}) + 1$. *No hemos llegado al resultado pues éstos no son el cociente y resto de dividir* p *por* q. *Efectuamos el siguiente «truco» de multiplicar y dividir por el coeficiente principal de* q *(el que antes sacamos factor común):*

$$\begin{aligned} p(x) &= \left(2x^2 - 5x + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + 1 = \frac{4}{4}\left(2x^2 - 5x + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + 1 = \left[\frac{1}{4}\left(2x^2 - 5x + \frac{5}{2}\right)\right]\left[4\left(x - \frac{3}{2}\right)\right] + 1 \\ &= \left(8x^2 - 20x + 10\right) q(x) + 1, \end{aligned}$$

por lo que el cociente y resto de dividir a p *por* q *son* $c(x) = (8x^2 - 20x + 10)$ *y* $r(x) = 1$.

Como corolario de la regla de Ruffini obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 20 (Teorema del Resto)**.** *Sea* $p \in \mathbb{C}[x]$ *con* $gr(p) \geq 1$ *y* $z \in \mathbb{C}$. *Entonces* $p(z)$ *es el resto de dividir* p *por* $q(x) = x - z$.

Demostración. Sea $c(x)$ el cociente de dividir p por q y r el resto. Entonces $p(x) = c(x)q(x) + r = c(x)(x - z) + r$. Luego $p(z) = c(z)(z - z) + r = r$. $\square$

El teorema del resto nos indica que hay dos maneras posibles de evaluar un poliniomio p en un número complejo z: la primera es evaluar el polinomio en z, efecuando todos los productos y potencias en los monomios, y la segunda es calculando el resto de la división por $x - z$. Esto es de gran utilidad, por ejemplo en el siguiente caso:

Ejemplo 21. *Sea* $p(x) = x^5 - 3\,ix^4 - (8 + 6\,i)x^3 + (-10 + 22\,i)x^2 + 24\,x - (4 + 8\,i)$, *calcular* $p(1 + i)$.

Para calcular $p(1 + i)$ *de la primer manera expuesta arriba, deberíamos computar*

$$(1 + i)^5 - 3\,i(1 + i)^4 - (8 + 6\,i)(1 + i)^3 + (-10 + 22\,i)(1 + i)^2 + 24\,(1 + i) - (4 + 8\,i).$$

De la segunda manera, sólo hace falta usar Ruffini y dividir por $q(x) = x - (1 + i)$. *Desarrollando esta última opción:*

	1	*-3i*	*-8-6i*	*-10+22i*	*24*	*-4-8i*
1+i		*1+i*	*3-i*	*2-12i*	*-18+2i*	*4+8i*
	1	*1-2i*	*-5-7i*	*-8+10i*	*6+2i*	*0*

Por lo tanto $p(1 + i) = 0$. *Se aconseja al lector comparar la dificultad y cantidad de operaciones a realizar cuando se resuelve este ejercicio de la primera y la segunda manera.*

3. Factorización de polinomios

Cuando trabajamos con números enteros, sabemos que existe una única manera de factorizarlos como producto de factores primos. Así $8 = 2^3$, $14 = 2 \times 7$, $220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$, etc. Esta descomposición resulta extremadamente útil para resolver muchos problemas que involucran números enteros. En particular, permiten reducir una fracción a su forma más sencilla.

Nuestro objetivo es obtener un resultado similar para polinomios: probaremos que todo polinomio a coeficientes complejos admite una única descomposición en factores lineales, y cualquier polinomio a coeficientes reales admite una única factorización en factores lineales y cuadráticos. Estos factores lineales y cuadráticos se obtienen a partir de las denominadas raíces.

Definición 22. *Sea* $p \in \mathbb{C}[x]$, $p \neq 0$. *Decimos que un número complejo* α *es una* ***raíz*** *de* p *si* $p(\alpha) = 0$.

En función del teorema del resto tenemos

Lema 23. *Sea* $p \in \mathbb{C}[x]$. *Entonces* α *es una raíz de* p *si y sólo si* $p(x) = c(x)(x - \alpha)$, *para algún polinomio* $c \in \mathbb{C}[x]$.

Demostración. Sea $p \in \mathbb{C}[x]$, $p \neq 0$. Si α es una raíz, entonces por definición $p(\alpha) = 0$. Por el Teorema del Resto, esto implica que el resto de dividir a p por $x - \alpha$ es cero y por lo tanto $p(x) = c(x)(x - \alpha)$, siendo c el cociente de la división.

Recíprocamente, si $p(x) = c(x)(x - \alpha)$ es claro que $p(\alpha) = 0$ y por lo tanto α es raíz de p. $\square$

De los resultados obtenidos hasta el momento podemos decir que si $p \in \mathbb{C}[x]$, $gr(p) \geq 1$, y α es un número complejo, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- α es raíz de p,
- el resto de dividir a p por $x-\alpha$ es cero,
- $p(x)=c(x)(x-\alpha)$,
- p es divisible por $x-\alpha$.

Dado un polinomio $p \neq 0$ denotamos con $\mathcal{R}_p$ al conjunto de raices de p, es decir:

$$\mathcal{R}_p = \{\alpha \in \mathbb{C} : p(\alpha) = 0\}.$$

Proposición 24. *Sea $p \in \mathbb{C}[x]$, $gr(p) \geq 1$. Sea α una raíz de p y c tal que $p(x)=c(x)(x-\alpha)$. Entonces*

1. *si β es una raíz de c, entonces β es una raíz de p;*
2. *si β es una raíz de p y $\beta \neq \alpha$, entonces β es una raíz de c.*

Luego $\mathcal{R}_p = \mathcal{R}_c \cup \{\alpha\}$.

Demostración. Ejercicio. □

El objetivo de esta última parte de la unidad es intentar conocer todas las raíces de un polinomio dado. Conociendo las raíces de p, conociendo $\mathcal{R}_p$, entre otras cosas, será posible determinar el polinomio p.

Ejemplo 25. *Consideramos los siguientes polinomios: $p(x)=(x-1)^2$ y $s(x)=(x-1)^3$. Notar que $\mathcal{R}_s=\mathcal{R}_p=\{1\}$. Sin embargo, p y s son dos polinomios diferentes ya que tienen distinto grado. Esto muestra que $\mathcal{R}$ no determina exactamente al polinomio. Notemos además que si bien p y s son divisibles por $(x-1)$ (al ser 1 raíz), es posible afirmar que s es divisible por $(x-1)^3$ pero p no lo es. Es decir, esta raíz 1 se comporta de manera diferente con respecto a la divisibilidad de p y s por el polinomio $x-1$.*

Para diferenciar estos diversos comportamientos observados en el ejemplo anterior, introducimos el concepto de multiplicidad.

Definición 26. *Sea $p \in \mathbb{C}[x]$, $gr(p) \geq 1$ y $k \in \mathbb{N}$. Decimos que una raíz $\alpha \in \mathbb{C}$ de p es* **una raíz de multiplicidad** *k si p es divisible por $(x-\alpha)^k$ pero no es divisible por $(x-\alpha)^{k+1}$.*

Esto es, α es una raíz de multiplicidad k de p si y sólo si

$$p(x)=(x-\alpha)^k c(x), \quad \text{con } c(\alpha) \neq 0.$$

Una raíz α de p se dice **raíz simple** *si su multiplicidad es 1.*

Proposición 27. *Sea $p \in \mathbb{C}[x]$, $gr(p) \geq 1$. Sea α una raíz de p y c tal que $p(x)=c(x)(x-\alpha)$. Entonces*

1. *α es una raíz de p de multiplicidad $k \geq 2$ si y sólo si α es una raíz de multiplicidad $k-1$ de c;*
2. *si $\beta \neq \alpha$ resulta β raíz de multiplicidad k de p si y sólo si β es una raíz de multiplicidad k de c.*

Demostración. Ejercicio. □

Mencionamos antes que un objetivo de esta unidad es hallar todas las raíces de p, con sus multiplicidades. Es claro que este problema es más sencillo de resolver cuando el grado de p es menor. Supongamos que conocemos ya una raíz α de p, y sea $c \in \mathbb{C}[x]$ tal que $p(x)=c(x)(x-\alpha)$. Sabemos que las raíces de c son también raíces de p (ver Proposición 24). Entonces para encontrar otras raíces de p, buscaremos las raíces de c pues es más sencillo buscar las raíces de c que de p por ser c de menor grado. Repitiendo este procedimiento, será posible encontrar todas las raíces de p.

Notemos que el razonamiento del párrafo anterior se basa en el conocimiento de una raíz de p. Por lo tanto, es importante garantizar la existencia de (¡y encontrar!) al menos una raíz de p para poder seguir trabajando. Este hecho es garantizado por el Teorema Fundamental del Álgebra. Su demostración requiere de conocimientos que escapan a los objetivos de este curso, y por lo tanto la omitimos.

Teorema 28 (Teorema Fundamental del Álgebra)**.** *Todo polinomio $p \in \mathbb{C}[x]$ de grado mayor o igual a 1 admite al menos una raíz compleja.*

Corolario 29. *Todo polinomio $p \in \mathbb{C}[x]$ de grado $n \geq 1$ admite exactamente n raíces complejas, contadas con su multiplicidad.*

Demostración. Sea $p \in \mathbb{C}[x]$. Por el Teorema Fundamental del Álgebra, existe una raíz compleja α_1 de p. Luego, existe un polinomio $c_1 \in \mathbb{C}[x]$ tal que $p(x) = (x - \alpha_1)c_1(x)$, y $gr(c_1) = n - 1$. Aplicando el teorema fundamental del álgebra a c_1, existen una raíz compleja α_2 de c_1 y un polinomio $c_2 \in \mathbb{C}[x]$ con $gr(c_2) = n-2$ tal que $c_1 = (x-\alpha_2)c_2(x)$, o sea,

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)c_2(x).$$

Podemos aplicar el mismo procedimiento a c_2. Así siguiendo, en n pasos encontramos las n raíces $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ de p (que podrían llegar a coincidir). □

Observación 30. *En la demostración anterior, cuando escribimos $p(x) = (x - \alpha_1)c_1(x)$ es importante notar que el coeficiente principal de c_1 coincide con el coeficiente principal de p, por lo visto en la Observación 18. De igual manera, cuando escribimos $c_1(x) = (x-\alpha_2)c_2(x)$, el coeficiente principal de c_2 coincide con el coeficiente principal de c_1 que a su vez coincide con el coeficiente principal de p, por lo anterior. Entonces, si continuamos este procedimiento hasta escribir*

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_j)c_j(x),$$

resulta que el coeficiente principal de c_j es igual al coeficiente principal de p.

Corolario 31. ***Teorema de descomposición factorial***

Sea $p = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ con $a_n \neq 0$ y $gr(p) \geq 1$, y sean $\beta_1, \cdots, \beta_s$ las s raíces distintas de p, de multiplicidades $k_1, \cdots, k_s$ respectivamente, tales que $k_1 + \cdots + k_s = n$. Entonces

$$p(x) = a_n(x - \beta_1)^{k_1} \cdots (x - \beta_s)^{k_s}$$

Demostración. Si seguimos los pasos de la demostración del Corolario 29, obtenemos que tras $n-1$ pasos encontramos $n - 1$ raíces de p, $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$, que pueden llegar a repetirse. Además p queda factorizado como

$$p(x) = (x - \alpha_1)(a - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_{n-1})c_{n-1}(x) \tag{2}$$

donde $c_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado 1 y su coeficiente principal coincide con el coeficiente principal de p, por la Observación 30; o sea que $c_{n-1}(x) = a_n x + b$, con $b \in \mathbb{C}$ y sabemos que $a_n \neq 0$. Para completar la factorización, observamos que $c_{n-1}(x) = a_n(x + \frac{b}{a_n})$, es decir $\alpha_n = -\frac{b}{a_n}$ es raíz de c_{n-1} y reemplazando en (2) obtenemos

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(a - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n). \tag{3}$$

Notar que las raíces $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pueden repetirse. Renombramos $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ las s raíces distintas de p. Para cada raíz β_i, el polinomio $(x - \beta_i)$ aparece en (3) tantas veces como la multiplicidad k_i de β_i. Entonces reagrupando términos resulta

$$p(x) = a_n(x - \beta_1)^{k_1}(a - \beta_2)^{k_2}\cdots(x - \beta_s)^{k_s}. \tag{4}$$

Es claro que $k_1 + \cdots + k_s = n$, obteniendo en (4) la factorización dada en el teorema. □

Para factorizar un polinomio p en factores lineales, procedemos como en la demostración del Corolario 29 o aplicamos el Corolario 31.

Observemos que encontrar una raíz de p equivale a encontrar una solución de la ecuación $p(x) = 0$.

Ejemplo 32. *Supongamos que queremos factorizar el polinomio $p(x) = 2x^3 - 8x^2 + 10x - 4$. Observemos primero que $P(1) = 0$. Luego 1 es raíz de p, y p es divisible por $q(x) = x - 1$. Dividimos p por q aplicando la regla de Ruffini y encontramos el cociente c tal que $p(x) = (x - 1)c(x)$:*

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -8 & 10 & -4 \\ 1 & \downarrow & 2 & -6 & 4 \\ \hline & 2 & -6 & 4 & 0 \end{array}$$

Luego $c(x) = 2x^2 - 6x + 4$ y las dos raíces restantes de p son las raíces de c que podemos calcular aplicando la resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 32}}{4} \Rightarrow \; x_1 = 1, \; x_2 = 2$$

Por lo tanto $c_2(x) = 2(x-1)(x-2)$ *y entonces*

$$p(x) = 2(x-1)^2(x-2).$$

O sea que las raíces de p *son* $\alpha_1 = 1$, *de multiplicidad* 2 *y* $\alpha_2 = 2$ *de multiplicidad* 1.

Ejemplo 33. *Cuando* p *no tiene término independiente,* $\alpha = 0$ *es siempre una raíz de* p *cuya multiplicidad es el menor grado de los monomios que componen el polinomio.*

Tomemos por ejemplo $p(x) = x^7 + x^5$. *Entonces* $\alpha = 0$ *es una raíz de multiplicidad* 5 *de* p, *pues* p *es divisible por* $q(x) = x^5$ *pero no lo es por* $q'(x) = x^6$. *En este caso tenemos*

$$p(x) = x^5(x^2+1).$$

Este procedimiento se conoce en general como «sacar factor común», pues x^5 *es un factor común de todos los términos que componen* p: $p(x) = x^7 + x^5 = x^5 \cdot x^2 + x^5 \cdot 1 = x^5(x^2+1)$. *Observemos que no hemos hecho más que aplicar la propiedad distributiva del producto de números complejos respecto de la suma.*

Para terminar de factorizar p, *debemos factorizar* $c(x) = x^2+1$, *o sea, necesitamos resolver la ecuación* $x^2+1 = 0$, *que tiene como soluciones* $x_1 = i$ *y* $x_2 = -i$. *Luego* $c(x) = (x+i)(x-i)$ *y entonces*

$$p(x) = x^5(x+i)(x-i)$$

o sea que $\alpha_1 = 0$ *es una raíz de multiplicidad* 5 *de* p *y* $\alpha_2 = i$ *y* $\alpha_3 = -i$ *son raíces de multiplicidad 1 (o raíces simples). Contadas con su multiplicidad, tenemos las siete raíces de* p.

Ejemplo 34. *Factoricemos* $p(x) = x^8 - x^4$. *Sacando factor común* x^4 *obtenemos que* $p(x) = x^4(x^4-1)$. *Para completar la factorización de* P *debemos resolver la ecuación* $x^4 - 1 = 0$, *o bien* $x^4 = 1$. *Es decir que las restantes cuatro raíces de* P *son las cuatro raíces cuartas complejas de* 1. *Como* 1 *en forma polar es* 1_0, *aplicando la fórmula de De Moivre, obtenemos que las cuatro raíces cuartas de* 1 *son*

$$x_1 = 1_0 = 1,\ x_2 = 1_{\frac{\pi}{2}} = i,\ x_3 = 1_{\pi} = -1,\ x_4 = 1_{\frac{3}{2}\pi} = -i.$$

Luego $p(x) = x^4(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$, *y las ocho raíces de* P *son* $\alpha_1 = 0$ *de multiplicidad* 4 *y* $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = i$ *y* $\alpha_5 = -i$ *de multiplicidad* 1.

A continuación desarrollamos algunos resultados que permiten encontrar raíces de polinomios cuando éstos sean a coeficientes reales o racionales.

Comencemos observando que en los ejemplos que hemos analizado, las raíces complejas de los polinomios a coeficientes reales vienen de a pares: cada vez que un complejo α es raíz de un polinomio a coeficientes reales, su conjugado $\overline{\alpha}$ también lo es.

Teorema 35. *Sea* $p \in \mathbb{R}[x]$, *un polinomio a coeficientes reales. Si* $\alpha \in \mathbb{C}$ *es una raíz de* p, *entonces* $\overline{\alpha}$ *también es raíz de* p.

Demostración. Supongamos que $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ con $a_i \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ es una raíz de p. Entonces $p(\alpha) = a_n \alpha^n + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0$. Evaluamos ahora el polinomio en el conjugado de α, $\overline{\alpha}$:

$$p(\overline{\alpha}) = a_n(\overline{\alpha})^n + a_{n-1}(\overline{\alpha})^{n-1} + \cdots + a_1\overline{\alpha} + a_0 = \overline{a_n\alpha^n + \cdots + a_1\alpha + a_0} = \overline{p(\alpha)} = \overline{0} = 0.$$

Aquí hemos aplicado las propiedades del conjugado de un número complejo y el hecho que $\overline{a_i} = a_i$ ya que cada a_i es un número real. La penúltima igualdad es válida por hipótesis. □

Como consecuencia de este teorema obtenemos los siguientes resultados cuyas pruebas quedan como ejercicio.

Corolario 36. *Sea* $p \in \mathbb{R}[x]$ *de grado* $n \geq 1$. *Entonces:*

1. p *tiene una cantidad par de raíces complejas no reales. Es decir, el conjunto* $\{\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R} / p(\alpha) = 0\}$ *tiene una cantidad par de elementos.*
2. *si el grado de* p *es impar, entonces tiene al menos una raíz real. Es decir, si* n *es impar resulta* $\{\alpha \in \mathbb{R} : p(\alpha) = 0\} \neq \emptyset$.

Corolario 37. *Si* $p \in \mathbb{R}[x]$ *es un polinomio a coeficientes reales y* $\alpha \in \mathbb{C}$ *es una raíz de* p *de multiplicidad* k *entonces* $\overline{\alpha}$ *también es raíz de* p *con igual multiplicidad.*

Ejemplo 38. *Sea* $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$*. Si recordamos que cuatro potencias consecutivas de* i *suman* 0*, pues toman los valores* $1,\ -1,\ i$ *y* $-i$*, observamos que* $p(i)$ *debe ser* 0*. En efecto* $p(i) = i^3 + i^2 + i + 1 = -i - 1 + i + 1 = 0$*. Como* p *es a coeficientes reales,* $-i$ *también debe ser raíz de* p*. Aplicando dos veces la regla de Ruffini tenemos:*

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ i & \downarrow & i & -1+i & -1 \\ \hline & 1 & 1+i & i & 0 \end{array} \qquad \Rightarrow\ p(x) = (x-i)(x^2 + (1+i)x + i) \ \text{ y además}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1+i & i \\ -i & \downarrow & -i & -i \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \Rightarrow\ p(x) = (x-i)(x+i)(x+1).$$

La última expresión $p(x) = (x-i)(x+i)(x+1)$ *es la descomposición factorial de* p*: todo factor es un polinomiio de grado 1 con coeficiente principal 1, y estos son polinomios a coeficientes complejos, a pesar que* p *es un polinomio a coeficientes reales.*

Si multiplicamos los dos primeros factores, correspondientes a las raíces conjugadas de p *obtenemos que* $p(x) = (x^2+1)(x+1)$*. En esta expresión contamos con un polinomio de grado 2 y otro de grado 1, pero todos sus coeficientes son reales, en concordancia con los coeficientes de* p*. Este hecho es válido para cualquier polinomio a coeficientes reales y se expresa en el segundo punto de la observación a continuación.*

Observación 39. *Todo polinomio a coeficientes reales puede factorizarse siempre como producto de polinomios lineales o cuadráticos a coeficientes reales. En efecto, si* $\alpha = a + ib$ *es una raíz compleja de* p *de multiplicidad* k*,* $\overline{\alpha} = a - ib$ *también es una raíz compleja de multiplicidad* k *y los factores* $(x-\alpha)^k(x-\overline{\alpha})^k$ *pueden escribirse como*

$$(x-\alpha)^k(x-\overline{\alpha})^k = \left[x^2 - (\alpha+\overline{\alpha})x + \alpha\overline{\alpha}\right]^k$$

Observando que $\alpha + \overline{\alpha} = 2a \in \mathbb{R}$ *y* $\alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$*, resulta* $x^2 - (\alpha+\overline{\alpha})x + \alpha\overline{\alpha}$ *un polinomio cuadrático a coeficientes reales.*

Para finalizar, mostraremos un método para encontrar las raíces racionales de un polinomio a coeficientes enteros

Teorema 40 (Teorema de Gauss)**.** *Sea* $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ *un polinomio a coeficientes enteros, con* $a_0 \neq 0$*. Si* $\alpha = \dfrac{r}{s}$ *es una raíz racional de* p*, con* r *y* s *primos relativos, entonces* r *divide a* a_0 *y* s *divide a* a_n*.*

Demostración. Sea p un polinomio como en en enunciado del teorema y sea α una raíz racional de p, es decir $\alpha \in \mathbb{Q}$. Notemos primero que 0 no es raíz de p pues $a_0 \neq 0$. Como $\alpha = \dfrac{r}{s}$ es una raíz de p y es no nula, resulta $p(\alpha) = 0$ y $r \neq 0$. Luego

$$a_n \frac{r^n}{s^n} + \cdots a_1 \frac{r}{s} + a_0 = 0.$$

Multiplicando ambos miembros por s^n, obtenemos

$$a_n r^n + a_{n-1} s r^{n-1} + \cdots a_1 s^{n-1} r + a_0 s^n = 0. \tag{5}$$

Reacomodando términos y sacando factor común r esta ecuación es equivalente a

$$r(a_n r^{n-1} + \cdots a_1 s^{n-1}) = -a_0 s^n. \tag{6}$$

Como $a_0 \neq 0$, $r \neq 0$ pues 0 no es raíz de p. Luego, como $a_n r^{n-1} + \cdots a_1 s^{n-1} \in \mathbb{Z}$, resulta $\dfrac{-a_0 s^n}{r} \in \mathbb{Z}$, con lo cual r divide a a_0 o r divide a s^n. Pero r no puede dividir a s^n pues r y s son primos relativos (no tienen factores primos comunes). Concluimos entonces que r divide a a_0.

En la misma ecuacion (5), podemos sacar factor común s en y reacomodar términos de manera que se obtenga

$$s(a_0 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r^{n-1}) = -a_n r^n.$$

Con el mismo razonamiento que antes, concluimos que s divide a a_n. $\square$

Observación 41. *Si bien el enunciado del Teorema de Gauss está hecho para polinomios a coeficientes enteros y con término independiente no nulo, este teorema puede aplicarse a polinomios a coeficientes enteros con término independiente cero y tambien a polinomios cualquiera a coeficientes racionales. A continuación explicamos cómo:*

- *Sea $p \in \mathbb{Z}[x]$ con término independiente $a_0 = 0$. En este caso basta sacar factor común x^m, para m el menor grado de los términos de p, y obtenemos $p(x) = x^m c(x)$, con c un polinomio a coeficientes enteros con término independiente no nulo. Para hallar las raíces de p, aplicamos el Teorema de Gauss al polinomio c.*
- *Sea $p \in \mathbb{Q}[x]$ de grado mayor o igual a 1. Entonces $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ donde cada a_i es un número racional, luego $a_i = b_i/t_i$ donde b_i, t_i son números enteros. Sea T un número entero que es múltiplo de todos los t_i (por ejemplo, es posible tomar $T = t_n \dot{t}_{n-1} \ldots t_1 \dot{t}_0$ o $T = mcm(t_n, t_{n-1}, \ldots, t_1, t_0)$). Multiplicamos y dividimos a p por este número T resultando $\cdot p(x) = \frac{1}{T}(T \cdot p(x))$. Es claro que $T \cdot p$ y tiene coeficientes todos enteros y sus raíces son las mismas que las de p. Luego, aplicamos el Teorema de Gauss a $T \cdot p$.*

Ejemplo 42. *Hallemos las raíces de $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 1$. Este polinomio tiene coeficientes enteros y término independiente no nulo, entonces podemos aplicar directamente el Teorema de Gauss. Una raíz racional α de p es de la forma r/s donde r divide a $a_0 = 1$ y s divide a $a_4 = 2$. Luego r puede ser ± 1 y s puede ser ± 1 o ± 2, y por lo tanto las posibles raíces racionales de p son: $\pm 1, \pm\frac{1}{2}$. Evaluando p en estos valores, vemos que 1 es raíz de p y que los otros posibles valores no lo son. Por lo tanto p tiene sólo una raíz racional que es 1. Utilizamos Ruffini y obtenemos*

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & \downarrow & 2 & -2 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

y $p(x) = (x-1)(2x^2 - 2x + 1)$. Para terminar de factorizar p, buscamos las raíces de $c(x) = 2x^2 - 2x + 1$. Observar que 1 no es raíz de c, entonces cc NO tiene raíces racionales pues si así fuese, esa raíz sería raíz de p que no tiene raíces racionales salvo el 1. Entonces es inutil aplicar Gauss a c. Buscaremos sus raíces mediante la resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{2 + \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{4} = \frac{2 + \sqrt{-4}}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i.$$

Finalmente, escribimos $c(x) = 2(x - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i))(x - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i))$ (¡¡NO olvidar el coeficiente principal de c!!) y resulta

$$p(x) = (x-1)c(x) = 2(x-1)(x - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i))(x - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)).$$

Ejemplo 43. *Supongamos que queremos factorizar el polinomio $p(x) = 2x^6 + x^5 - 6x^4 + x^3 + 2x^2$. Este polinomio es a coeficientes en $\mathbb{Z}$ y tiene el término independiente nulo. Estamos en la primer situación de la Observación 41. Comenzamos entonces sacando factor común x^2 y tenemos $p(x) = x^2(2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2)$. Procedemos a hallar las raíces de $c(x) = 2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2$ para luego factorizarlo.*

Como c es un polinomio a coeficientes enteros y tiene término independiente no nulo, podemos aplicar el Teorema de Gauss a $c(x)$. Las posibles raíces racionales de c son de la forma r/s con r un divisor de $a_0 = 2$ y s un divisor de $a_n = a_4 = 2$. Los posibles valores para r son ± 1 y ± 2, y lo mismo ocurre con s. Luego las posibles raíces racionales de c son ± 1, ± 2 y $\pm 1/2$.

Evaluando p en cada uno de los valores obtenidos, concluimos que 1, -2 y $-1/2$ son raíces de p. Podemos aplicar tres veces seguidas la regla de Ruffini y obtenemos:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 1 & -6 & 1 & 2 \\ 1 & \downarrow & 2 & 3 & -3 & -2 \\ \hline & 2 & 3 & -3 & -2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & -3 & -2 \\ -2 & \downarrow & -4 & 2 & 2 \\ \hline & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 2 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \downarrow & -1 & 1 \\ \hline & 2 & -2 & 0 \end{array}$$

Luego $c(x) = (x-1)(x+2)(x+\frac{1}{2})(2x-2) = 2(x-1)^2(x+2)(x+\frac{1}{2})$ y resulta entonces $p(x) = x^2 c(x) = 2x^2(x-1)^2(x+2)(x+\frac{1}{2})$.

Ejemplo 44. *Supongamos que queremos factorizar el polinomio $p(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{12}x^2 + \frac{1}{12} \in \mathbb{Q}[x]$.Este polinomio es a coeficientes en $\mathbb{Q}$. Estamos en la segunda situación explicada en la Observación 41. Tomamos $T = 12 = mcd(2, 12)$, donde 2 y 12 son los denominadores en los coeficientes de p. Tenemos que $p(x) = \frac{12}{12}(\frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{12}x^2 + \frac{1}{12}) = \frac{1}{12}(6x^3 - 7x^2 + 1)$. Aplicando el teorema de Gauss a $c(x) = 6x^3 - 7x^2 + 1$, obtenemos que las posibles raíces racionales de c son ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$ y $\pm\frac{1}{6}$. Evaluando c en cada una de las opciones, vemos que 1, $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{3}$ son raíces de c. Luego $c(x) = 6(x-1)(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3})$ y por lo tanto $p(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3})$.*

4. Acotación de raíces: Método de Laguerre-Thibault

Para un polinomio $p \in \mathbb{C}[x]$ dado, no siempre es sencillo hallar con exactitud sus raíces. Si el polinomio p tiene raíces reales, entonces el método de Laguerre-Thibault permite encontrar intervalos de la forma $[\ell, L]$ de manera que todas las raíces de p pertenezcan a ese intervalo.

Un número real L se dice cota superior de las raíces reales de p si toda raiz real de p es menor o igual que L. Es decir, si $\alpha \in \mathcal{R}_p \cap \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \leq L$.

Un número real ℓ se dice cota inferior de las raíces reales de p si toda raiz real de p es mayor o igual que ℓ. Esto es, si $\alpha \in \mathcal{R}_p \cap \mathbb{R} \Rightarrow \ell \leq \alpha$.

Observemos que si L es cota inferior y ℓ una cota inferior de las raíces reales de p, entonces,

$$\mathcal{R}_p \cap \mathbb{R} \subseteq [\ell, L].$$

Teorema 45. *Sea p un polinomio a coeficientes reales, de grado mayor o igual a 1. Supongamos $L \in \mathbb{R}_0^+$ es un número de manera que el cociente $c(x)$ y el resto R de dividir p por $(x-L)$ tienen todos sus coeficientes NO negativos, entonces L es cota superior de las raíces reales de p.*

dem.) Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ y L un número real positivo o cero, es decir $L \in \mathbb{R}_0^+$. Supongamos que $p(x) = c(x)(x-L) + R$ donde $c(x)$ tiene todos sus coeficientes no negativos y R es un número no negativo. Observar que R es un polinomio constante.

Debemos probar, bajo estas hipótesis, que toda raíz real de p es menor o igual que L. O lo que es equivalente, si $\alpha > L$ entonces $p(\alpha) \neq 0$; es decir, ningún número mayor que L es raíz. Sea $\alpha > L \geq 0$, evaluamos p en α

$$p(\alpha) = c(\alpha)(\alpha - L) + R \tag{7}$$

Notemos que, como todos los coeficientes de c son no negativos y α es positivo entonces $c(\alpha) > 0$. Además, $\alpha - L > 0$ por cómo fue elegido α; y $R \geq 0$. Entonces en (7) tenemos:

$$p(\alpha) = \underbrace{c(\alpha)}_{>0}\underbrace{(\alpha - L)}_{>0} + \underbrace{R}_{\geq 0} > 0. \tag{8}$$

Luego, $p(\alpha) > 0$ y α no es raíz.

■

Veamos unos ejemplos para aprender a utilizar este resultado.

Ejemplo 46. *Sea $p(x) = 2x^3 - 10x + 1$; aplicar el teorema anterior para dar una cota superior de las raíces reales de p. Observemos que este polinomio tiene grado 3 y es a coeficientes reales, entonces tiene* al menos *una raiz real.*

Aplicamos de manera directa el teorema anterior. Tomamos un candidato $L = 1$ y realizamos la división de p por $x - 1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -10 & 1 \\ 1 & \downarrow & & & \\ \hline & 2 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -10 & 1 \\ 1 & & 2 & & \\ \hline & 2 & 2 & & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -10 & 1 \\ 1 & & 2 & 2 & \\ \hline & 2 & 2 & \underbrace{-8}_{<0} & \end{array}$$

Como el coeficiente -8 es negativo, este L propuesto no nos servirá para aplicar el Teorema. Pues para $L = 1$ el cociente $c(x)$ tiene un coeficiente negativo, por lo que no podremos concluir nada.

Proponemos ahora $L = 3$ y efectuamos la división por $(x - 3)$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -10 & 1 \\ 3 & \downarrow & & & \\ \hline & 2 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -10 & 1 \\ 3 & & 6 & & \\ \hline & 2 & 6 & & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -10 & 1 \\ 3 & & 6 & 18 & \\ \hline & 2 & 6 & 8 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -10 & 1 \\ 3 & & 6 & 18 & 24 \\ \hline & 2 & 6 & 8 & 25 \end{array}$$

En este caso sí nos sirve pues $c(x) = 2x^2 + 6x + 8$ con todos sus coeficientes positivos y $R = 25 > 0$. Afirmamos entonces que toda raiz de p es menor o igual a 3: $\alpha \in \mathcal{R}_p \Rightarrow \alpha \leq 3$.

Notemos que en el ejemplo anterior q tiene coeficientes enteros, por lo que podríamos utilizar el Teorema de Gauss para hallar sus raíces racionales; $\alpha = \frac{r}{s}$ es raiz racional, entonces r divide a 1 y s divide a 2. Luego, si q tiene raíces racionales, éstas son $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$. Al evaluar q en estos *candidatos* a raíces, vemos que no se anula q en ninguno de ellos. Podemos concluir que q NO tiene raíces racionales.

Ejemplo 47. *Estudiar las raíces de $p(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3$.*

Este polinomio tiene coeficientes enteros, por lo que podríamos utilizar el Teorema de Gauss para hallar sus raíces racionales; $\alpha = \frac{r}{s}$ es raiz racional, entonces r divide a 3 y s divide a 1. Luego, si p tiene raíces racionales, éstas son $\pm 1, \pm 3$. Al evaluar p en estos candidatos *a raíces, vemos que no se anula p en ninguno de ellos. Podemos concluir que p NO tiene raíces racionales.*

El polinomio p tiene grado 5, por lo tanto tiene al menos una raiz real; por el párrafo anterior, sabemos que las raíces reales son irracionales. Usaremos el Teorema 45 para hallar una cota superior de las raíces reales de p.

Proponemos $L = 1$ y dividimos p por $x - 1$:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & -5 & 8 & -7 & -3 \\ 1 & \downarrow & & & & & \\ \hline & 1 & & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & -5 & 8 & -7 & -3 \\ 1 & & 1 & 3 & & & \\ \hline & 1 & 3 & \underbrace{-2}_{<0} & & & \end{array}$$

No continuamos con la división pues ya encontramos un coeficiente del cociente que es negativo. Proponemos un L mayor, $L = 2$:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & -5 & 8 & -7 & -3 \\ 2 & \downarrow & & & & & \\ \hline & 1 & & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & -5 & 8 & -7 & -3 \\ 2 & & 2 & 8 & 6 & 28 & 42 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 14 & 21 & 39 \end{array}$$

¡Perfecto! $L = 2$ es cota superior de las raíces reales de p. Esto es: $\alpha \in \mathcal{R}_p \Rightarrow \alpha \leq 2$.

En este último ejemplo vemos que las raíces reales de p son menores o iguales que 2, pero no podemos asegurar que sean menores que 1. Si quisiéramos *ajustar* nuestra cota, podríamos realizar la división con $L = \frac{3}{2}$ (punto medio entre 1 y 2). En este caso, tenemos que $p(x) = (x - \frac{3}{2})c(x) + R$ donde $c(x) = x^4 + \frac{7}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{67}{8}x + \frac{89}{16}$ y $R = \frac{171}{32}$. Concluimos entonces que toda raiz real de p es menor o igual que 3/2.

Un truco necesario:

Ejemplo 48. *Consideramos el polinomio $p(x) = -2x^5 + 7x^2 - 3$ e intentamos hallar cotas superiores para sus raíces reales (que las tiene pues $gr(p) = 5$). Proponemos $L = 3$ y efectuamos la división por $x - 3$:*

$$\begin{array}{c|ccccc} & -2 & 0 & 0 & 7 & -3 \\ 3 & \downarrow & & & & \\ \hline & \underbrace{-2}_{<0} & & & & \end{array}$$

Observemos que el coeficiente principal del cociente es negativo. Y esto sucederá con cualquier L propuesto pues el problema aquí es que el coeficiente principal del polinomio dado p es negativo. Por lo tanto, este método no nos servirá para hallar cotas superiores de las raíces de p.

Sin embargo, podemos utilizar el siguiente truco: el polinomio p y su opuesto tienen exactamtente *las mismas raíces. Entonces, encontrar una cota superior para las raíces reales de p* es equivalente *a encontrar una cota superior para las raíces reales de $-p$. Y lo interesante de esto es que $r = -p$ tiene ahora coeficiente principal positivo.*

Consideramos $r(x) = 2x^5 - 7x^2 + 3$ y proponemos $L = 3$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 0 & 0 & -7 & 3 \\ 3 & & 6 & 18 & 54 & 141 \\ \hline & 2 & 6 & 18 & 47 & 144 \end{array}$$

Concluimos por el Teorema de Laguerre-Thibault que 3 es una cota superior de las raíces de r. Dado que $\mathcal{R}_r = \mathcal{R}_p$, se tiene que 3 es también *una cota superior para las raíces reales de p.*

Conclusión 49. *Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ de manera que $gr(p) \geq 1$ y el coeficiente principal de p es negativo. Entonces para hallar cotas superiores de las raíces reales de p, aplicar el Teorema de Laguerre-Thibault su <u>opuesto</u>: $r(x) = -p(x)$.*

Para hallar cotas inferiores ℓ de las raíces reales de un polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$ utilizamos la siguiente proposición combinada con el Teorema 45.

Proposición 50. *Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ y definimos $q(x) = p(-x)$. Un número real ℓ es cota inferior de las raíces de p si $L = -\ell$ es cota superior de las raíces reales de $q(x)$.*

Importante: ¡¡NO confundir $q(x) = p(-x)$ con $r(x) = -p(x)$!!
dem.) Vimos en la práctica que α es una raiz de p si y sólo si $-\alpha$ es una raíz de q. Sea ℓ una cota inferior de las raíces de p. Entonces $\alpha \geq \ell$ para toda α raiz de p.

Veamos que $-\ell$ es cota superior de las raíces reales de q: consideramos $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $q(b) = 0$, entonces $\alpha = -\beta$ es raiz de p por lo escrito antes. Luego, por hipótesis, $-\beta = \alpha \geq \ell$. Multiplicando por -1 esta desigualdad obtenemos que $\beta \leq -\ell$. Concluimos entonces que toda raiz real de q es menor o igual que $-\ell$ y por lo tanto $-\ell$ es cota superior de las raíces reales de q.

■

Ejemplo 51. *Hallar una cota inferior para las raíces reales del polinomio $p(x) = -3x^3 + x - 2$.*

Vimos en el Ejemplo 46 que p tiene raíces reales. Para hallar cotas inferiores de estas raíces, armamos el polinomio $q(x) = p(-x)$. Tenemos $q(x) = -3(-x)^3 + (-x) - 2 = 3x^3 - x - 2$. Como hecho anteriormente, aplicamos el Teorema de Laguerre-Thibault para hallar cotas superiores. Proponemos $L = 2$,

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & \downarrow & & & \\ \hline & 3 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & & 6 & 12 & 22 \\ \hline & 3 & 6 & 11 & 22 \end{array}$$

Dado que todos los coeficientes del cociente y el resto de esta división son positivos, tenemos que 2 es cota superior de las raíces reales de $q(x)$. Por la proposición anterior, $\ell = -2$ es cota inferior de las raíces de p: es decir $\alpha \in \mathcal{R}_p \Rightarrow \alpha \geq -2$.

Ejemplo 52. *Encontrar una cota inferior para el polinomio del Ejemplo 46 $p(x) = 2x^3 - 10x + 1$. Trabajando con el ejemplo anterior, para hallar cotas inferiores de p, buscamos cotas superiores de $q(x) = p(-x)$.*

El polinomio q es de la siguiente forma: $q(x) = 2(-x)^3 - 10(-x) + 1 = -2x^3 + 10x + 1$. Notemos que estamos en el caso de buscar cotas superiores para el polinomio q que tiene coeficiente principal negativo. Entonces debemos utilizar el truco *explicado en el Ejemplo 48: usar el opuesto de q.*

Tomamos $\tilde{r}(x) = -q(x)$ y buscamos una cota superior de las raíces de $\tilde{r}$. Se tiene $\tilde{r}(x) = 2x^3 - 10x - 1$ proponemos $L = 5$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 0 & -10 & -1 \\ 5 & & 10 & 50 & 80 \\ \hline & 2 & 10 & 40 & 79 \end{array}$$

Luego $L = 5$ es cota superior de las raíces de $\tilde{r}$ y de q. Por la proposición anterior, $\ell = -5$ es cota inferior de las raíces reales de p.

En el Ejemplo 46 vimos que 3 es una cota superior de las raíces reales de p. Luego

$$\mathcal{R}_p \cap \mathbb{R} \subseteq [-5, 3].$$

Ejemplo 53. *Hallar una cota inferior para las raíces de $p(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3$, el polinomio trabajado en el Ejemplo 47. Ya aprendimos que para encontrar las cotas inferiores de las raíces reales de p debemos buscar cotas superiores de las raíces reales de $q(x) = p(-x)$.*

El polinomio q tiene los siguientes coeficientes: $q(x) = -x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 7x - 3$. Nuevamente estamos en el caso de buscar cotas superiores para un polinomio q que tiene coeficiente principal negativo. Entonces volvemos a utilizar el truco *explicado en el Ejemplo 48: usar el opuesto de q.*

Tomamos $\tilde{r}(x) = -q(x)$ y buscamos una cota superior de las raíces de $\tilde{r}$. Se tiene $\tilde{r}(x) = x^5 - 2x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 7x + 3$ proponemos $L = 4$:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -2 & -5 & -8 & -7 & 3 \\ 4 & & 4 & 8 & 12 & 16 & 36 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 9 & 39 \end{array}$$

Luego, 4 es cota superior de las raíces de $\tilde{r}$ y al mismo tiempo cota superior de las raíces reales de q. Por la proposición anterior, $\ell = -4$ es cota inferior de las raíces de p. Recordar que $\frac{3}{2}$ es cota superior de las raíces reales de p, según lo visto en el párrafo posterior al Ejemplo 47. Luego:

$$\mathcal{R}_p \cap \mathbb{R} \subseteq [-4, \frac{3}{2}].$$