Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ÁLGEBRA y GEOMETRÍA ANALÍTICA I

Licenciatura en Física - Año 2015

Equipo docente: Viviana del Barco, Lucía Caraballo y Ana Murinigo.

Trabajo Práctico N°6: Polinimios

1. Sean $p(x) = x^5 + 4x^2 - 2i$, $q(x) = x^2 + (2 - i)$, $r(x) = x^7 + 5x^3 - ix^2 + 2x + 1 - i$. Hallar los polinomios indicados en cada caso:

   a) $p + q$ *b)* $p + q - r$; *c)* $p \cdot q$ *d)* $q \cdot (p + 2r)$; *e)* $-2p \cdot (r - q)$

2. Analizar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar adecuadamente su respuesta:
   a) $p(x) = 5ix^3 - 2x + 7\sqrt{x} - 8 + i \in \mathbb{R}[x]$ y es de grado 3.
   b) p definido en el ítem anterior pertenece a $\mathbb{C}[x]$ y es de grado 3.
   c) Si $p(x) = -x^2 + x + i$, $q(x) = (3 + i)x^3 - 2x^2$, $r(x) = 4x^7 - (3 + i)x^5 + ix^4$, $s(x) = 5x^4 + 3ix^3$ y $t(x) = 4x^7 + 3x^3 + 2ix^2$, entonces $p \cdot q = r + s - t$.
   d) si $p(x) = (4 + i)x^7 - (8 - i)x^6 + 4x^5 - 3ix^2 + 5$, $q(x) = (6 - i)x^9 + (4 - i)x^7 - 3x^3 + (2 + 3i)x - 6$, $r(x) = 5x^5 - 3ix^2 + (1 - i)x$ y $s(x) = x^{13} - 6x^9 + 2ix^7 + (4 + i)x^3 - 2x^2 + 6 + i$ entonces el grado del polinomio $pq + 6rs - 2irp + qs$ es 22.
3. En cada uno de los siguientes casos hallar el cociente y el resto de dividir el polinomio p por el polinomio q dados. En los casos que sea posible aplicar la regla de Ruffini.
   a) $p(x) = 4x^3 + x^2$, $q(x) = x^2 + 1 + i$.
   b) $p(x) = 4x^3 + x^2$, $q(x) = x + 1 + i$.
   c) $p(x) = 3x^4 - x^2 + ix - 2$, $q(x) = 5x - 4$.
   d) $p(x) = 3x^6 - x^4 + ix^3 - 2x^2$, $q(x) = 5x^3 - 4x^2$.
4. Analizar por qué son iguales los resultados de los ejercicios $3c$ y $3d$.
5. Siendo $p(x) = x^4 - ix^3 - ix + 1 + i$, hallar $p(0)$, $p(-1)$, $p(-i)$, $p(i)$, $p(i+1)$, $p(5)$, $p(6)$, $p(2-i)$. Cuando resulte más conveniente, utilizar el teorema del resto.
6. Siendo $p(x) = kx^4 + kx^3 - 33x^2 + 17x - 10$, calcular $p(4)$ sabiendo que $p(5) = 0$.
7. Determinar si los números 1, -1, i y $-i$ son raíces del polinomio $p(x) = -3x^{12} + x^9 - x^6 + 2x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 2$.
8. Dar en cada caso un polinomio p que cumpla con las condiciones pedidas, explicitando si es único o no.
   a) p tiene a 2 como raíz simple y a i como raíz triple.
   b) p tiene a 2 como raíz simple y a i como raíz triple y es de grado 4.
   c) p tiene a 2 como raíz simple y a i como raíz triple y es de grado 4 y $p(1) = 3i$.
   d) 1, 4, 2 y 0 son raíces de p y p es de grado 6.
   e) 1, 4, 2 y 0 son raíces de p, p es de grado 5 y a coeficientes reales.
9. Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ y $p \in \mathbb{C}[x]$ y $m \in \mathbb{N}$.
   a) Demostrar que α es raíz de $p(x)$ si y sólo si $-\alpha$ es raíz de $q(x) = p(-x)$.
   b) Aplicar el ítem anterior para hallar las raíces de $q(x) = x^2 + (i - 3)x + 2 - 6i$, sabiendo que $p(x) = x^2 + (3 - i)x + 2 - 6i = (x - 2i)(x + 3 + i)$.
   c) Demostrar que α^m es raíz de p si y sólo si α es raíz de $q(x) = p(x^m)$.
   d) Aplicar el ítem anterior para hallar las raíces de $q(x) = x^6 - (1 + i)x^3 + i$.
10. Siendo $p(x) = x^3 + (-5 + i)x^2 + (6 - 6i)x + (-8 + 8i)$, calcular $p(1 + i)$ y descomponer factorialmente a p.
11. Hallar todas las posibles formas que puede admitir la descomposición factorial de un polinomio a coeficientes reales de grado 4. Repeteir el ejercicio para para un polinomio a coeficientes reales de grado 4.

12. Encontrar la descomposición factorial de los siguientes polinomios. En los casos que existan raíces complejas, dar la descomposición en factores lineales exclusivamente y en factores lineales y cuadráticos a coeficientes reales.
    a) $p(x) = 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 20x + 12$
    b) $p(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4$
    c) $p(x) = x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{11}{2}x^3 - \frac{7}{12}x^2 - \frac{1}{12}x + \frac{1}{12}$
    d) $p(x) = (x^3 - 2x^2 + 5x)(x^4 + 1)$
    e) $p(x) = 2x^6 - 5x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 2x^2$.
    f) $p(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 - 8x^3 - 8x^2 - 8x - 12$.
    g) $p(x) = 2x^7 - 3x^6 + 14x^5 - 20x^4 - 36x^3 + 61x^2 - 18$.
    h) $p(x) = (x^7 + x^4 - 9x^3 - 9)(x^3 + 1)$.
13. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente la respuesta.
    a) Si α es una raíz de P, entonces α es una raíz de $p \cdot q$, cualquiera sea $q \in \mathbb{C}[x]$.
    b) Todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real.
    c) Todo polinomio a coeficientes reales de grado impar tiene al menos una raíz real.
    d) Dos polinomios p y q son iguales si y sólo si tienen exactamente las mismas raíces.
    e) Dos polinomios de grado n son iguales si coinciden en n valores distintos que tome la variable.
14. Aplicando el método de Laguerre-Thibault, acotar las raíces reales de los siguientes polinomios.
    a) $p(x) = x^5 - 4x^4 + 7x^2 - 40x - 1$,
    b) $p(x) = x^4 - 41x^2 + 400$,
    c) $p(x) = 3x^4 - 184x^3 + 24x^2 - 18x + 73$,
    d) $p(x) = \sqrt{3}x^5 + 6x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1$.