Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Álgebra y Geometría I - Licenciatura en Fisica - Año 2015

Trabajo Práctico N°3: Secciones cónicas

I. Circunferencia

1. Determinar la ecuación cartesiana de la circunferencia descripta en cada caso:
   a) Tiene centro en $(2, 7)$ y radio 8.
   b) Tiene centro en $(-5, 3)$ y radio $\frac{2}{3}$.
   c) Los puntos $P(4, -3)$ y $Q(6, 2)$ son extremos de un diámetro de la circunferencia.
   d) Tiene centro en $(2, 1)$ y pasa por $(3, -\frac{1}{2})$.

   Encontrar además, en cada caso, dos puntos que pertenecen a la circunferencia y dos que no pertenecen.

2. Determinar la ecuación cartesiana de la circunferencia descripta en cada caso:
   a) es tangente a ambos ejes coordenados, está en el tercer cuadrante y tiene radio 8.
   b) tiene centro en el origen y es tangente a la recta de ecuación $3x + 4y - 7 = 0$.
   c) es tangente a ambos ejes coordenados y pasa por el punto $P(2, -1)$.
   d) tiene su centro sobre la recta de ecuación $3x - 3y - 8 = 0$ y pasa por $P(5, -2)$ y $Q(2, 3)$.
   e) pasa por los puntos $A(1, -1)$, $B(0, 1)$ y $C(-3, -3)$.
   f) circunscribe al triángulo determinado por las rectas

   r_1) $x - 6 = 0$, $\quad$ r_2) $x + y = 0$ y $\quad$ r_3) $x - 2y = 8$.

3. Determinar cuáles de las siguientes ecuaciones es la de una circunferencia. En esos casos indicar centro y radio de la misma.

   a) $x^2 + y^2 + x + y = 0$,
   b) $(x - 4)^2 + y^2 = 3x^2 + 1$,
   c) $2x^2 + 2y^2 + 7y - 5x + 10 = 0$,
   d) $x^2 + y^2 + 7 - 8y = 0$.

4. Hallar la intersección de la circunferencia de ecuación $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 25$ con cada una de las siguientes rectas:

   - $y = -x + 3$,
   - $\frac{3}{4}x + y = \frac{11}{3}$.

5. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias:

   a) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4, \\ (x-1)^2 + (y-4)^2 = 4. \end{cases}$
   b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 2 - 8 = 0, \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0. \end{cases}$

6. Hallar la(s) ecuación(es) de la(s) recta(s) tangente(s) indicada(s).
   a) A la circunferencia de ecuación $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$ que pasa(n) por el punto $(-5, 4)$.

b) A la circunferencia de ecuación $x^2+y^2+10x-2y+6=0$ que es(son) paralela(s) a la recta de ecuación $2x+y-7=0$.

II. Elipse (En todos los ejercicios, los ejes de simetría son los ejes coordenados.)

7. Completar el siguiente cuadro. (Considerar a como el semieje que se mide sobre el eje de las abscisas y b sobre el de las ordenadas; a modo de ejemplo se resolvió el primer caso). Sacar conclusiones respecto a la relación entre la excentricidad de una elipse y la *forma* que tiene su gráfica.

Ecuación	a^2	b^2	c^2	a	b	c	ϵ	Gráfica
$x^2+\frac{y^2}{4}=1$	1	4	3	1	2	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\sim 0,86$	
$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$								
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$								
$\frac{x^2}{2}+y^2=1$								
$\frac{x^2}{4}+y^2=1$								
$\frac{x^2}{10}+y^2=1$								

8. En cada uno de los siguientes casos hallar la ecuación de la elipse definida por las condiciones dadas:
   a) vértices $(6,0)$ y $(-6,0)$; $\epsilon=\frac{2}{3}$.
   b) vértices $(5,0)$ y $(-5,0)$; focos $(3,0)$ y $(-3,0)$.
   c) $\epsilon=\frac{3}{4}$; focos $(0,4)$ y $(0,-4)$.
   d) pasante por $P_1(4,3)$ y $P_2(-1,4)$.
   e) vértice en $(4,0)$ y directriz $r)\,x=8$.
   f) directriz $r)\,y=-8$; $\epsilon=\frac{1}{3}$.
9. La órbita de la Tierra es una elipse en uno de cuyos focos se encuentra el Sol. Conociendo la excentricidad $\epsilon=0,016$ y el semieje mayor: 150×10^6km, hallar las distancias mínima y máxima de la Tierra al Sol.
10. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos de intersección de las elipses de ecuaciones

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1, \quad \text{y} \quad \begin{cases} x=2\cos t, \\ y=3\sin t \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi.$$

III. Hipérbola (En todos los ejercicios, los ejes de simetría son los ejes coordenados.)

11. Completar el siguiente cuadro. (Considerar a como el semieje que se mide sobre el eje de las abscisas y b sobre el de las ordenadas; a modo de ejemplo se resolvió el primer caso). Sacar conclusiones respecto a la relación entre la excentricidad de una elipse y la *forma* que tiene su gráfica.

Ecuación	a^2	b^2	c^2	a	b	c	ϵ	$\frac{b}{a}$	Gráfica
$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$									
$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$									
$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$									
$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$									
$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$									
$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$									
$\frac{x^2}{5} - y^2 = 1$									

12. En cada uno de los siguientes casos hallar la ecuación de la hipérbola definida por las condiciones dadas y graficarla indicando sus asíntotas:
    a) $(4,0)$ es un vértice y $(-7,0)$ es un foco.
    b) $(0,-5)$ es un vértice y $\epsilon = \frac{4}{3}$,
    c) $(0,6)$ es un vértice y $r)\, y = 3x$ es una asíntota.
    d) $(-5,0)$ es un foco y pasa por $P(4,\sqrt{15})$.
    e) los focos y vértices son, respectivamente, los vértices y focos de la elipse de ecuación $3x^2 + y^2 - 9 = 0$.
    f) pasa por $(-\frac{2}{3},0)$ y tiene por directriz $r)\, x = \frac{4}{3\sqrt{6}}$.
13. Calcular la distancia de un foco de la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a sus asíntotas
14. Demostrar que las excentricidades ϵ_1, ϵ_2 de dos hipérbolas conjugadas verifican $\frac{1}{\epsilon_1^2} + \frac{1}{\epsilon_2^2} = 1$.
15. Hallar la intersección de la recta $5x - 6y - 3\sqrt{5} = 0$ con la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$. ¿Qué significado geométrico tiene el resultado obtenido? Graficar.

IV. Parábola

16. Encontrar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de cada una de las siguientes parábolas:

    a) $3y^2 + 4y = 0$,
    b) $2x^2 = y$,
    c) $9x = y^2$,
    d) $2x^2 + 24y = 0$.

    Esbozar sus gráficas indicando foco y directriz.
17. Hallar, en cada caso, la ecuación cartesiana de la parábola que se indica y graficarla.
    a) Tiene foco $F(0,-\frac{1}{4})$ y directriz $r)\, y = \frac{1}{4}$.
    b) Tiene vértice en $(0,0)$ y directriz $r)\, x = -2$.
    c) Tiene vértice en $(0,0)$, su eje de simetría es el eje y y pasa por el punto $(2,-\sqrt{2})$.
    d) Tiene vértice en $(0,0)$, su eje de simetría es el eje y y pasa por el punto $(2,-4)$.
18. Un arco parabólico tiene una luz libre de $24m$ y una altura de $18m$. Se desea conocer la altura del arco a $8m$ del centro de la luz.
19. Hallar la intersección de la parábola $y^2 = 16x$ con cada una de las siguientes rectas:

$$r_1)\, x - y + 2 = 0, \quad r_2)\, x - y + 4 = 0 \quad \text{y} \quad r_3) x - y + 6 = 0.$$

20. Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $2x^2 + y = 0$ que es paralela a la recta de ecuación $x - \frac{1}{4}y + 5 = 0$.
21. Hallar la intersección entre las cónicas de ecuaciones $x^2+y^2 = 4$ y $\sqrt{2}y+\sqrt{3}x^2 = 0$. Interpretar gráficamente.

Miscelánea

1. Tomando el ángulo t como parámetro, probar que las *ecuaciones paramétricas*
$$\begin{cases} x = h + r\cos t, \\ y = k + r\sin t, \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$
son las de la circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio $r > 0$.
2. *a*) Hallar las ecuaciones paramétricas de la circunferencia de ecuación cartesiana $(x + 9)^2 + y^2 + 3y + 1 = 3/4$.
   b) Hallar la ecuación cartesiana de la circunferencia de ecuación paramétrica
$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t - 5, \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$
3. Hallar la intersección de cada uno de los siguientes pares de circunferencias:
   a) Circunferencia del ejercicio $5b$.
   b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 + y^2 - 16x - 12y + 75 = 0. \end{cases}$
   c) Circunferencia del ejercicio $5a$.
   d) $\begin{cases} (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 3, \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0. \end{cases}$
4. Dar la ecuación de cada una de las siguientes familias de circunferencias:
   a) De radio 1 con centro en el eje x.
   b) Con centro en $C(-2, 8)$.
   c) Pasantes por el origen.
   d) Que contienen a los puntos $A(2, 0)$ y $B(-2, 0)$.
5. Determinar el área del cuadrilátero que tiene dos vértices en los focos de la elipse $x^2+5y^2 = 20$ y los otros dos coinciden con los extremos de su eje menor.
6. *a*) Demostrar que el lugar geométrico de los centros de una familia de circunferencias que pasan todas por $P(2, 0)$ y son tangentes a la recta de ecuación $x = -2$ es una parábola. ¿Cuál es su ecuación?
   b) Analizar si también resulta una parábola para otro punto de paso y otra recta de tangencia.