Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

Álgebra y Geometría Analítica I

Lic. en Fisica - Año 2015

Docentes: Viviana del Barco

Unidad 5: Secciones cónicas.

1. Introducción

Una sección cónicas es un lugar geométrico **del plano** que se obtiene de intersecar un cono doble con un plano. Esta definición se debe a Apolonio de Pérgamo (262-190 a.C) y permite un estudio ordenado y sistemático de estos lugares geométricos.

Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia en el espacio de centro Q y un punto V fuera del plano donde está contenida $\mathcal{C}$. Para cada punto P de la circunferencia, queda determinada una recta g que pasa por P y V. El cono doble determinado por $\mathcal{C}$ y V es el conjunto de puntos que se obtiene de unir todas las rectas g, variando P sobre la circunferencia $\mathcal{C}$. Las rectas g se llaman *generatrices* del cono y la recta determinada por Q y V se denomina *eje* del cono y lo denotamos con h. Vamos a suponer que h es perpendicular al plano que contiene a la circunferencia, es decir, el cono es un *cono recto*. Denotamos con α el ángulo que forma h con cualquiera de las generatrices.

Dado un plano π del espacio, éste corta al cono en una figura plana que será diferente según la posición relativa de π con respecto al cono; la curva que se obtiene como intersección se llama *sección cónica* o símplemente *cónica*. Los diferentes lugares geométricos que se obtienen son los siguientes:

1. Si π es paralelo a una generatriz y no pasa por el vértice V, la cónica resultante se llama *parábola*.
2. Si π corta las dos hojas de la superficie cónica y no pasa por el vértice, la sección cónica es una *hipérbola*.
3. Si π corta todas las generatrices del cono, no es perpendicular al eje h, y no pasa por el vértice, la cónica resultante se llama *elipse*.
4. Si π es perpendicular al eje h (y por lo tanto corta todas las generatrices del cono) y no pasa por el vértice, la cónica resultante se llama *circunferencia*.

Notar que en los cuatro casos de arriba, si V pertenece a π, se otbienen, respectivamente, una recta, dos rectas secantes, un punto y un punto. Estos lugares geométricos suelen llamarse *secciones cónicas degeneradas*.

Supongamos que nos encontramos en una situación como la descripta en el punto 2. arriba y llamemos $\tilde{\mathcal{C}}$ a la circunferencia que queda determinada por la intersección del plano π con el cono y llamemos C al punto de intersección de π con el eje h. Entonces es fácil ver que para todo $P \in \tilde{\mathcal{C}}$ se tiene que $d(P, C) = cte$. ¿Pero qué propiedades podemos establecer para las restantes cónicas que involucren distancias? ¿Es posible demostrarlas?

El Teorema de Dandelin (1822) permite probar que los puntos pertenecientes a una cónica poseen elementos característicos, como sus focos o directrices.

Este teorema permite probar que si $\mathcal{E}$ es una elipse determinada por la intersección de un plano π con el cono, entonces existen dos puntos fijos F_1 y F_2 en π y un número positivo a fijo, de manera que para todo punto $P \in \mathcal{E}$ resulta $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$.

De igual manera, si $\mathcal{H}$ es una hipérbola determinada por la intersección de un plano π con el cono, entonces existen dos puntos fijos F_1 y F_2 en π y un número positivo a fijo, de manera que para todo punto $P \in \mathcal{H}$ resulta $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$.

Es posible probar que si $\mathcal{P}$ es una parábola determinada por la intersección de un plano π con el cono, entonces existen un punto fijo F y una recta r en π de manera que para todo punto $P \in \mathcal{P}$ resulta $d(P, F) = d(P, r)$.

Las descripciones de las secciones cónicas en función de distancias (a puntos, rectas) no necesita de un sistema coordenado prefijado en el plano. En las siguientes secciones, nos interesará fijar un sistema coordenado para dar ecuaciones en coordenadas que describan estos lugares geométricos. Esto permitirá, de manera análoga a lo hecho para las rectas, un estudio sistemático de las propiedades de los mismos.

2. Circunferencia

Definición 1. *Dado un punto del plano C y un número real $r > 0$, se llama* circunferencia *de centro C y radio r al lugar geométrico del plano formado por aquellos puntos cuya distancia a C es r. Denotamos $\mathcal{C}(C, r)$ a esta circunferencia.*

En símbolos, esta definición establece que

$$\mathcal{C}(C, r) = \{P : d(P, C) = r\}.$$

De manera equivalente, un punto P pertenece a la circunferencia $\mathcal{C}$ siempre y cuando el módulo del vector $\overrightarrow{CP}$ es r. En símbolos, $P \in \mathcal{C}$ si y sólo si $|\overrightarrow{CP}| = r$.

Fijamos un sistema coordenado cartesiano en el plano $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$. Sea $C(x_0, y_0)$ el centro de la circunferencia $\mathcal{C}$, de radio $r > 0$. Sea $P(x, y)$ un punto del plano. Es nuestro objetivo establecer una ecuación en las coordenadas (x, y) que permita decidir rápidamente que el punto P pertenece o no a la circunferencia. Para ello, usaremos la definición dada arriba.

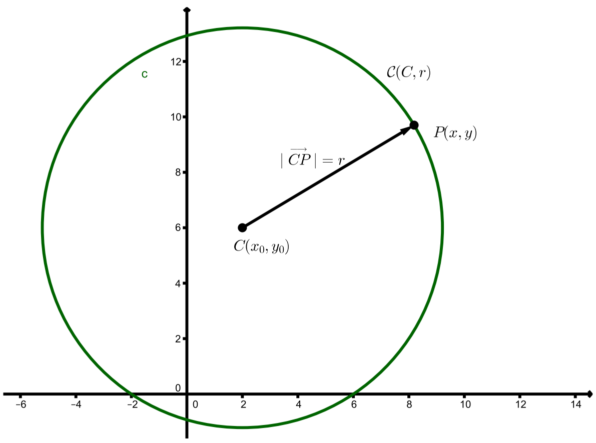
Un punto $P(x, y)$ es un punto en la circunferencia $\mathcal{C}(C, r)$ siempre y cuando su distancia a C sea r, es decir $P(x, y) \in \mathcal{C}$ si y sólo si $d(P, C) = r$. Usando las coordenadas de los puntos $P(x, y)$ y $C(x_0, y_0)$ podemos escribir entonces

$$\begin{aligned} P(x, y) \in \mathcal{C} \quad &\Leftrightarrow \quad d(P, C) = r \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \\ &\Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \end{aligned}$$

Decimos entonces que la ecuación

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

es la *ecuación cartesiana de la circunferencia con centro $C(x_0, y_0)$ y radio r.*

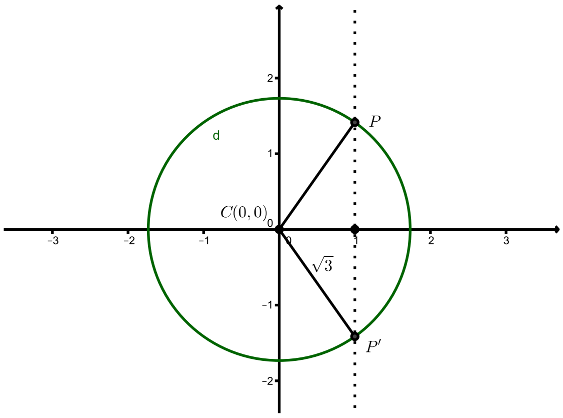


Ejemplo 2. *Determinar la ecuación cartesiana de la circunferencia $\mathcal{C}$ con centro $C(0, 0)$ y radio $\sqrt{3}$.*

Según el razonamiento hecho arriba, sabemos que la ecuación cartesiana de la circunferencia es de la forma $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, donde los valores x_0, y_0 y r se reemplazan por las coordenadas del centro y el radio, respectivamente. En este ejemplo $(x_0, y_0) = (0, 0)$ pues es el centro dado y el radio $r = \sqrt{3}$. Luego, la circunferencia tiene ecuación $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{3})^2$, o de manera equivalente,

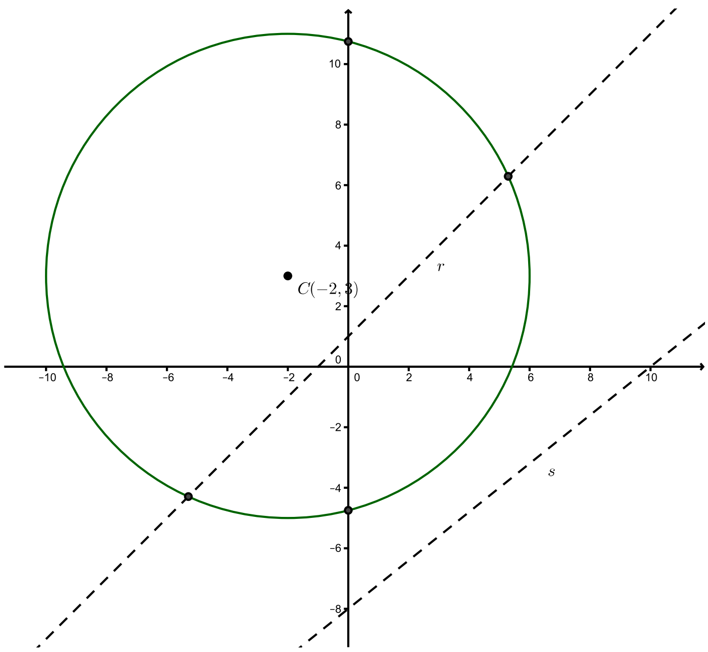
$$\mathcal{C}((0, 0), \sqrt{3}) : x^2 + y^2 = 3.$$

Graficamos esta circunferencia:



Supongamos que queremos hallar los puntos de abscisa 1 que pertenezcan a $\mathcal{C}$. Geométricamente esto es hallar la intersección de la recta $r)\, x = 1$ con la circunferencia $C((0,0),\sqrt{3})\ :\ x^2 + y^2 = 3$. De manera equivalente, estableceremos los puntos de coordenadas $(1, y)$ que pertenezca a la circunferencia. Vemos en el gráfico que habrá 2 de ellos: P y P'. Para dar las coordenadas de estos puntos, planteamos la ecuación cuadrática $1^2 + y^2 = 3$ cuyas soluciones son $y_1 = \sqrt{2}$ e $y_2 = -\sqrt{2}$. Luego $P(1,\sqrt{2})$ y $P'(1,-\sqrt{2})$.

Ejemplo 3. *Determinar la ecuación cartesiana de la circunferencia $\mathcal{C}$ con centro $C(-2,3)$ y radio $\sqrt{8}$. Dar dos puntos de $\mathcal{C}$, y hallar la intersección de $\mathcal{C}$ con las rectas $r)\, y = x + 1$ y $s) - 4x + 5y = -40$. Realizamos la gráfica de esta circunferencia y las rectas dadas.*



Razonando de igual manera la ecuación cartesiana de la circunferencia es de la forma $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, donde los valores x_0, y_0 y r se reemplazan por las coordenadas del centro y el radio, respectivamente. En este ejemplo $(x_0, y_0) = (-2, 3)$ pues es el centro dado y el radio $r = 8$. Luego, la circunferencia tiene ecuación $(x+2)^2+(y-3)^2 = 8^2$, o de manera equivalente,

$$\mathcal{C}((-2,3),8)\ :\ (x+2)^2 + (y-3)^2 = 64. \tag{1}$$

Para dar dos puntos pertenecientes a $\mathcal{C}$, debemos encontrar dos pares (x_1, y_1) y (x_2, y_2) que satisfagan la ecuación (1). Una opción es elegir un valor para x_1 y hallar y_1 de manera que se verifique la ecuación. Por ejemplo, tomamos $x_1 = 0$, luego y_1 verifica:

$$2^2 + (y_1 - 3)^2 = 64 \Rightarrow y_1 = (y_1 - 3)^2 = 60 \Rightarrow y_1 = \sqrt{60} + 3 \text{ o bien } y_1 = -\sqrt{60} + 3.$$

Llamamos $P_1(0, 3 + \sqrt{60})$ y $P_2(0, 3 - \sqrt{60})$.

Sean Q_1, Q_2 los puntos de intersección de $\mathcal{C}$ con r. Debemos hallar las coordenadas de estos puntos. Notar que sus coordenadas satisfacen las ecuaciones de ambas lugaress geométricos: $\mathcal{C}\ :\ (x+2)^2+(y-3)^2=64$ y $r)\, y=x+1$, luego, podemos reemplazar la ecuación de r en la de $\mathcal{C}$ y obtener:

$$\left.\begin{array}{r}(x+2)^2+(y-3)^2=64\\ r)\, y=x+1\end{array}\right\}\Rightarrow (x+2)^2+((x+1)-3)^2=64\Rightarrow (x+2)^2+(x-2)^2=64\Rightarrow 2x^2+8=64\Rightarrow x=\pm\sqrt{28}.$$

Hay dos soluciones para la abscisa de un punto en la intersección: $x_1=\sqrt{28}$ y $x_2=-\sqrt{28}$. Para hallar las ordenadas de los puntos correspondientes podemos usar la ecuación de r o la ecuación de $\mathcal{C}$; siendo la de la recta mucho más sencilla de resolver, usamos ésta. Luego

$$y_1=1+x_1=1+\sqrt{28},\qquad y_2=1+x_2=1-\sqrt{28},$$

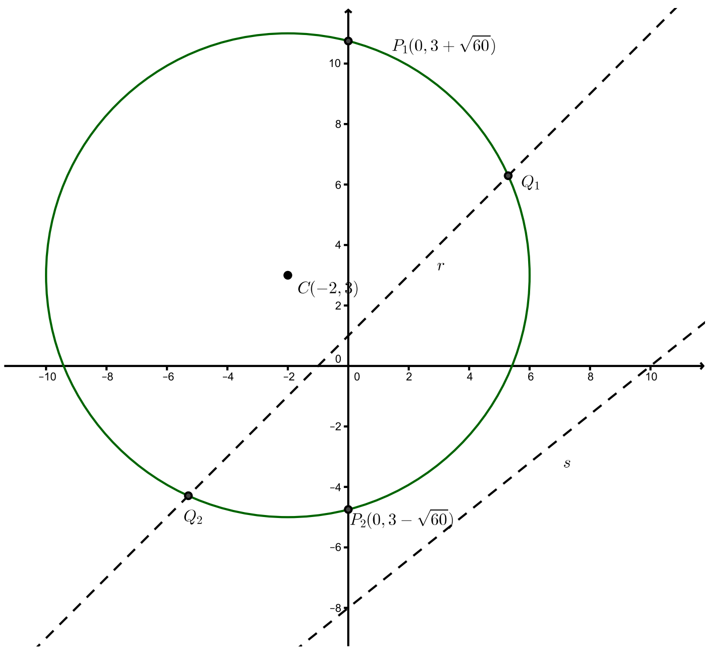
y entonces $Q_1(\sqrt{28},1+\sqrt{28})$ y $Q_2(-\sqrt{28},1-\sqrt{28})$.

Finalmente, buscamos la intersección de la recta $s)-4x+5y=-40$. Al graficar esta recta junto con la circunferencia, vemos que no hay intersección entre ellas. Necesitamos probar esto de manera algebraica, usando las ecuaciones ya conocidas de $\mathcal{C}$ y s. Procedemos de manera similar a lo hecho con la recta r, pero llegaremos a diferentes resultados:

$$\left.\begin{array}{r}(x+2)^2+(y-3)^2=64\\ r)\, y=\frac{4}{5}x-8\end{array}\right\}\Rightarrow (x+2)^2+((\frac{4}{5}x-8)-3)^2=64\Rightarrow (x+2)^2+(\frac{4}{5}x-11)^2=64\Rightarrow\Rightarrow \frac{41}{25}x^2-\frac{68}{5}x+61=0,$$

pero esta ecuación cuadrática no tiene soluciones reales ya que el discriminante $\triangle=(\frac{68}{5})^2-4\frac{41}{25}61=-\frac{1076}{5}<0$.

Ubicamos los puntos obtenidos en la gráfica.



Definición 4. *. Un ecuación de segundo grado en las variables x e y es una expresión de la forma*

(2) $$A\,x^2+B\,xy+C\,y^2+D\,x+E\,y+F\;=0,\ \textit{donde } A,\ B \textit{ y } C \textit{ no son simultáneamente nulos.}$$

Toda circunferencia $\mathcal{C}$ queda descripta por una ecuación de segundo grado en las variables x, y como veremos a continuación.

Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia de ecuación $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$. Esta ecuación puede escribirse de diversas maneras acomodando los términos según conveniente. En particular, esta ecuación es equivalente a

$$\mathcal{C}\ :\ x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+(x_0^2+y_0^2-r^2)=0,$$

y esta es una ecuación de segundo grado con $A=C=1$, $B=0$, $D=-2x_0$, $E=-2y_0$, $F=x_0^2+y_0^2-r^2$.

En los ejemplos anteriores, desarrollando los cuadrados obtenemos que

$$x^2+y^2=3 \rightsquigarrow x^2+y^2-3=0; \qquad (x+2)^2+(y-3)^2=64 \rightsquigarrow x^2+y^2+4x-6y-51=0.$$

Sin embargo no toda ecuación de segundo grado representa una circunferencia, como veremos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5. *Determinar si los siguientes lugares geométricos definidos por ecuaciones cuadráticas son circunferencias o no:* $\mathcal{L}_1=\{P(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2x+4y+1=0\}$, $\mathcal{L}_2=\{P(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2+x+2\sqrt{2}y+\frac{9}{4}=0\}$.

Para determinar qué lugares geométricos describen las ecuaciones de arriba, trabajamos las ecuaciones algebraicas que los definen.

Completando cuadrados, escribiremos la ecuación $x^2+y^2-2x+4y+1=0$, *de la manera siguiente:*

$$\begin{aligned} 0 &= x^2+y^2-2x+4y+1 \\ &= (x-1)^2+y^2+4y \\ &= (x-1)^2+y^2+4y+4-4 \\ &= (x-1)^2+(y+2)^2-4 \end{aligned}$$

Luego, la ecuación $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ *es equivalente a* $(x-1)^2+(y+2)^2=4$. *Luego,*

$$\mathcal{L}_1=\{P(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2x+4y+1=0\}=\{P(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+(y+2)^2=4\}$$

y es claro entonces que $\mathcal{L}_1$ *es una circunferencia con centro* $(1,-2)$ *y radio* 2.

Realizamos un procedimiento similar para ver qué lugar geométrico es $\mathcal{L}_2$, *completando cuadrados en la expresión* $x^2+y^2+x+2\sqrt{2}y+\frac{9}{4}=0$ *y buscando una ecuación equivalente que describa a* $\mathcal{L}_2$*:*

$$\begin{aligned} 0 &= x^2+y^2+x+2\sqrt{2}y+\frac{9}{4} \\ &= x^2+2\frac{1}{2}x+(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2+y^2+2\sqrt{2}y+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2+\frac{9}{4} \\ &= (x+\frac{1}{2})^2+(y+\sqrt{2})^2-\frac{1}{4}-2+\frac{9}{4} \\ &= (x+\frac{1}{2})^2+(y+\sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

Luego, la ecuación $x^2+y^2+x+2\sqrt{2}y+\frac{9}{4}=0$ *es equivalente a* $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\sqrt{2})^2=0$. *Esta ecuación se asemeja a una de una circunferencia, pero sin embargo, el lado derecho es cero. Para hallar los valores* (x,y) *que verifican esta ecuación, la miramos con más cuidado: esta plantea la suma de dos números reales,a saber* $x+\frac{1}{2}$ *y* $y+\sqrt{2}$, *elevados al cuadrado e igualados a cero. Es sabido que éstos* $(x+\frac{1}{2})^2$ *y* $(y+\sqrt{2})^2$ *son números mayores o iguales que cero, independientemente de* x *e* y. *Por lo tanto, las soluciones de la ecuación son aquellas para las cuale ambos valores son* ***iguales*** *a cero (y por lo tanto su suma también es cero). Es decir, .*

$$(x+\frac{1}{2})^2+(y+\sqrt{2})^2=0 \Leftrightarrow x+\frac{1}{2}=0 \text{ e } y+\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \text{ e } y=-\sqrt{2}.$$

Luego

$$\mathcal{L}_2=\{P(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2+x+2\sqrt{2}y+\frac{9}{4}=0\}=\{P(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=-\frac{1}{2} \text{ e } y=-\sqrt{2}\}=P(-\frac{1}{2},-\sqrt{2})$$

y $\mathcal{L}_2$ *es un único punto.*

El ejemplo anterior muestra, en particular, que hay ecuaciones de segundo grado, como la que define a $\mathcal{L}_2$.

2.1. Ecuación paramétrica de una circunferencia. Fijamos $C(x_0, y_0)$ un punto del plano. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del plano y consideramos el vector $\overrightarrow{CP}$ y sea t el ángulo que forma $\overrightarrow{CP}$ con el versor $\overrightarrow{i}$, es decir $t = (\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{i})$. Entonces,

$$\overrightarrow{CP} = |\overrightarrow{CP}|(\cos t, \sin t) \tag{3}$$

, por la teoría vista de cosenos directores (ver Figura 1). Además,

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} = (x, y) - (x_0, y_0) = (x - x_0, y - y_0). \tag{4}$$

Luego, de (3) y (4) se tiene que las coordenadas de P verifican

$$(x - x_0, y - y_0) = |\overrightarrow{CP}|(\cos t, \sin t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + |\overrightarrow{CP}|\cos t \\ y = y_0 + |\overrightarrow{CP}|\sin t \end{cases}. \tag{5}$$

Estas ecuaciones que describen las coordenadas cartesianas de un punto en función del módulo de $|\overrightarrow{CP}|$ y el ángulo t, se conocen como *coordenadas polares* en el plano, centradas en C.

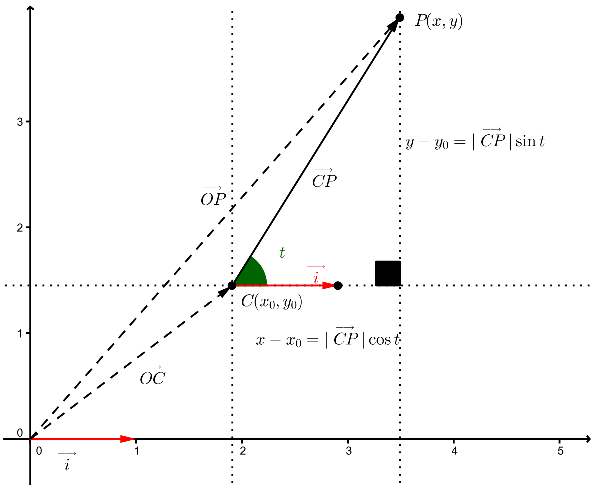
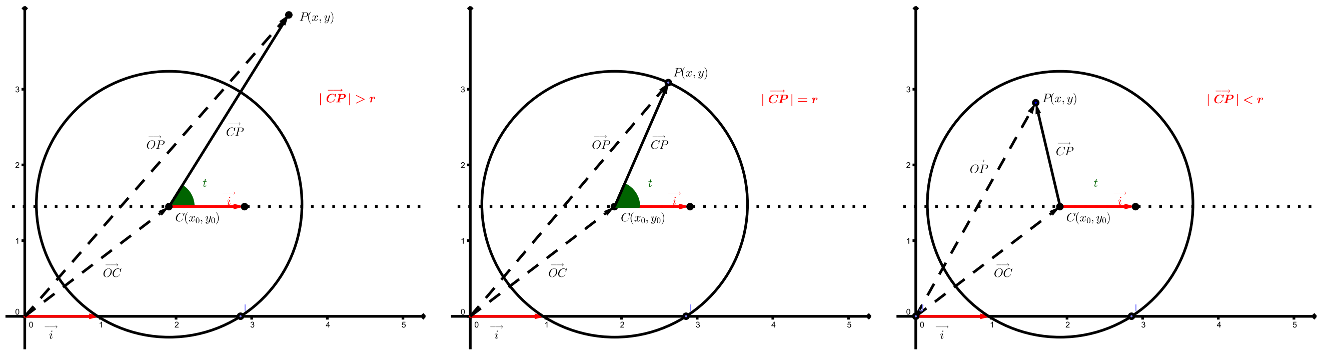


Figura 1

Ahora supongamos que $C(x_0, y_0)$ es el centro de una circunferencia $\mathcal{C}$ de radio r. En el dibujo anterior pueden darse tres situaciones diferentes:



Es claro que P es un punto en la circunferencia si y sólo si $|\overrightarrow{CP}| = r$. Tomando en cuenta lo anterior $P \in \mathcal{C}$ si y sólo si

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = x_0 + r\cos t \\ y = y_0 + r\sin t \end{cases}. \tag{6}$$

3. Elipse

Definición 6. *Dados dos puntos distintos del plano, F_1 y F_2, y un un número real a de manera que $2a > d(F_1, F_2)$, se llama* elipse de focos F_1 y F_2 y distancia $2a$ *al lugar geométrico del plano formado por aquellos puntos que verifiquen que la suma de sus distacias a los focos es $2a$. A esta elipse se la simboliza $\mathcal{E}(F_1, F_2, a)$.*

En símbolos, esta definición establece que

$$\mathcal{E}(F_1, F_2, a) = \{P \,:\, d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}.$$

En la próxima figura, se muestran puntos que pertenecen a la elipse de focos F_1 y F_2 y distancia $2a$ El punto medio

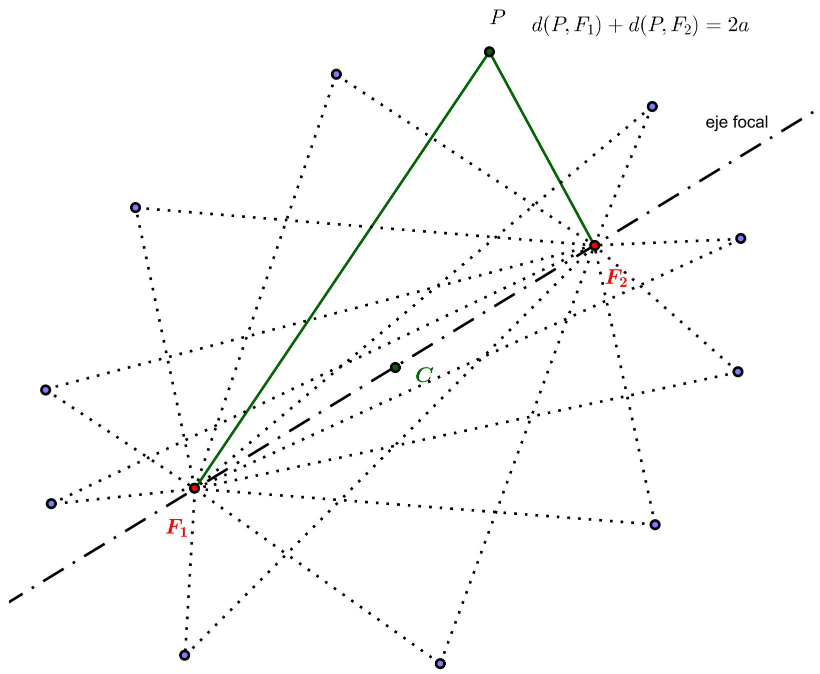


Figura 1. Elipse

C del segmento $\overline{F_1F_2}$ se llama *centro* de la elipse, Llamamos c al valor $c = d(F_1, C) = d(F_2, C)$; el número $2c$ se llama *distancia focal* ya que es claro que $2c = d(F_1, F_2)$. La recta que contiene a los focos se denomina *eje focal.*

Introducimos un sistema coordenado cartesiano para encontrar ecuaciones que describan una elipse. Para ello, es necesario distinguir si el eje focal de la elipse es paralelo al eje x (horizontal) o paralelo al eje y (vertical).

A continuación realizaremos un razonamiento para encontra la ecuación cartesiana de una elipse con eje focal paralelo al eje x. En caso que el eje focal sea vertical, el razonamiento será similar y quedará como ejercicio para el estudiante.

Sea $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ un sistema coordenado cartesiano. Sea $\mathcal{E}$ la elipse de focos F_1, F_2 y con distancia $2a$. Supongamos que el eje focal es paralelo al eje x. Sea C el centro de la elipse, de coordenadas $C(x_0, y_0)$ y $c = d(F_1, C)$ la mitad de la distancia focal. Como el eje focal es horizontal, F_1, F_2 y C tienen igual ordenada y_0, y dado que C es el punto medio del segmento formado por los focos, resulta que F_1 y F_2 tienen coordenadas $F_1(x_0 - c, y_0)$ y $F_2(x_0 + c, y_0)$.

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del plano. Por definición de elipse, $P \in \mathcal{E}$ si y sólo si $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, o lo que es equivalente: $P \in \mathcal{E}$ si y sólo si $\mid \overrightarrow{F_1P} \mid + \mid \overrightarrow{F_2P} \mid = 2a$. Esta última expresión nos permitirá encontrar la ecuación buscada.

Observemos que, según las coordenadas arribas expuestas, resultan

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_1P} &= (x-(x_0-c), y-y_0) = (x-x_0+c, y-y_0)\\ \overrightarrow{F_2P} &= (x-(x_0+c), y-y_0) = (x-x_0-c, y-y_0).\end{aligned}$$

Luego la expresión $\mid \overrightarrow{F_1P} \mid + \mid \overrightarrow{F_2P} \mid = 2a$ se escribe como:

$$\begin{aligned}
\mid \overrightarrow{F_1P} \mid + \mid \overrightarrow{F_2P} \mid &= 2a\\
\sqrt{(x-x_0+c)^2+(y-y_0)^2}+\sqrt{(x-x_0-c)^2+(y-y_0)^2} &= 2a\\
\sqrt{(x-x_0+c)^2+(y-y_0)^2} &= 2a-\sqrt{(x-x_0-c)^2+(y-y_0)^2}\\
(x-x_0+c)^2+(y-y_0)^2 &= \left(2a-\sqrt{(x-x_0-c)^2+(y-y_0)^2}\right)^2\\
(x-x_0+c)^2+(y-y_0)^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(x-x_0-c)^2+(y-y_0)^2}+(x-x_0-c)^2+(y-y_0)^2 \qquad (7)\\
(x-x_0+c)^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(x-x_0-c)^2+(y-y_0)^2}+(x-x_0-c)^2\\
(x-x_0+c)^2-(x-x_0-c)^2-4a^2 &= -4a\sqrt{(x-x_0-c)^2+(y-y_0)^2}\\
4c(x-x_0)-4a^2 &= -4a\sqrt{(x-x_0-c)^2+(y-y_0)^2}\\
(c(x-x_0)-a^2)^2 &= \left(-a\sqrt{(x-x_0-c)^2+(y-y_0)^2}\right)^2\\
c^2(x-x_0)^2-2ca^2(x-x_0)^2+a^4 &= a^2\left((x-x_0-c)^2+(y-y_0)^2\right)\\
c^2(x-x_0)^2-2ca^2(x-x_0)^2+a^4 &= a^2\left((x-x_0)^2-2c(x-x_0)+c^2+(y-y_0)^2\right)\\
c^2(x-x_0)^2+a^4 &= a^2\left((x-x_0)^2+c^2+(y-y_0)^2\right)\\
(a^2-c^2)(x-x_0)^2+a^2(y-y_0)^2 &= a^2(a^2-c^2)
\end{aligned}$$

En este punto, debemos notar que, como dice en la definición de elipse, $2a > d(F_1, F_2) = 2c$, por lo tanto $a > c$ y a^2-c^2 es un número positivo; llamamos $b = \sqrt{a^2-c^2}$. Entonces la última ecuación se escribe como $b^2(x-x_0)^2+a^2(y-y_0)^2 = a^2b^2$ o también como

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (8)$$

Conlcuimos entonces que un punto $P(x, y)$ pertence a la elipse $\mathcal{E}$ si y sólo si sus coordenadas satisfacen la ecuación (8). Esta ecuación se la conoce como *ecuación cartesiana de la elipse con eje focal horizontal.*

Observación 7. *Es* **importantísimo** *remarcar que $a > b$ pues $a^2 = b^2 + c^2$ por definición, con $c \neq 0$.*

Observemos la gráfica de una elipse con eje focal horizontal y marquemos algunos elementos característicos de la misma.

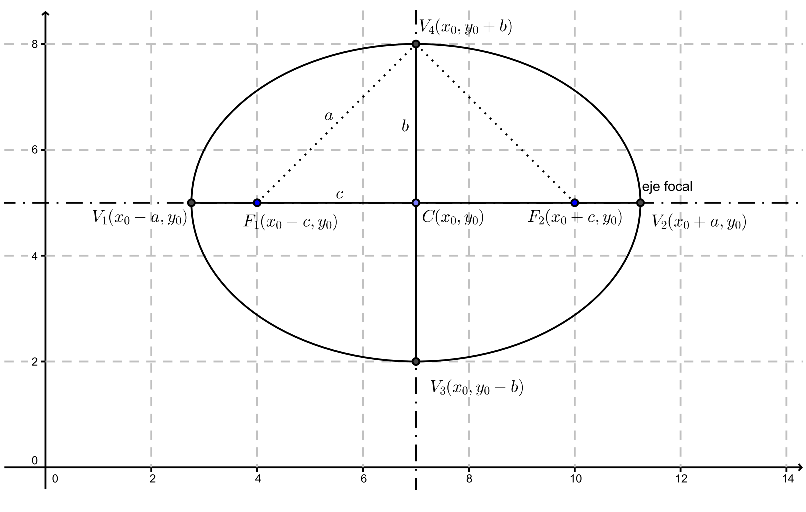


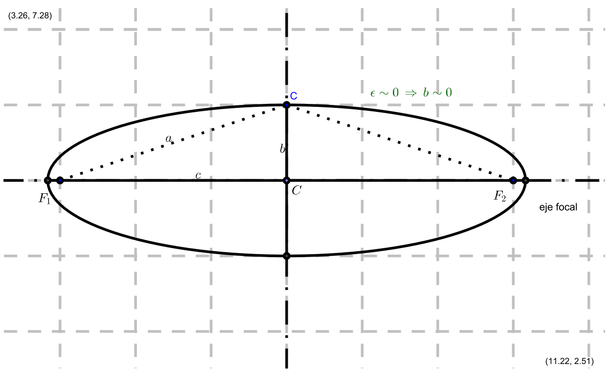
Figura 2. Elipse con eje focal horizontal

Es importante destacar elementos característicos de la elipse.

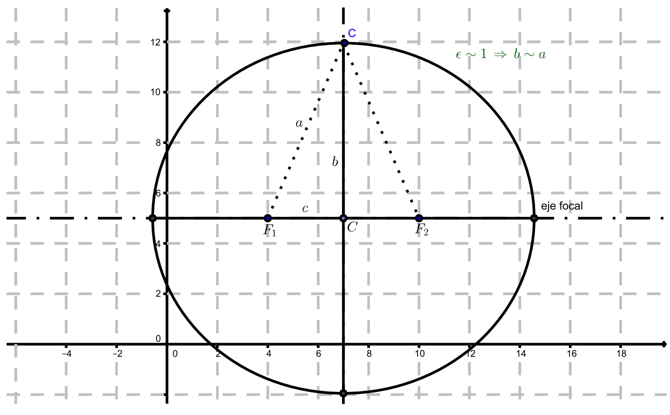
- Los puntos $V_1(x_0-a, y_0)$ $V_2(x_0+a, y_0)$ son puntos en el eje focal que pertenecen a la elipse pues sus coordenadas satisfacen la ecuación (8). Estos puntos son *vértices* de la elipse ya que ningún punto de abscisa mayor que $x_0 + a$ o menor que $x_0 - a$ pertenece a la elipse.
- De igual manera, los puntos $V_3(x_0, y_0 - b)$ $V_4(x_0, y_0 + b)$ son puntos que yacen en una recta perpendicular al eje focal que pertenecen a la elipse (sus coordenadas satisfacen la ecuación (8)). Estos puntos también son *vértices* de la elipse.
- Los segmentos $\overline{V_1V_2}$ y $\overline{V_3V_4}$ se llaman, respectivamente, *eje mayor* y *eje menor* de la elipse. Esto se debe a que el eje mayor tiene longitud $2a$, mientras que el eje menor tiene longitud $2b$, que es menor que $2a$ por la Observación 7.
- Los vértices en el eje menor junto con los focos y el centro forman un triángulo rectánculo de catetos de longitud c y b respectivamente, e hipotenusa de longitud a.

Definición 8. *Se llama excentricidad de la elipse $\mathcal{E}$ de ecuación cartesiana $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ al valor $\epsilon = \frac{b}{a}$*

Por la Observación 7, la excentricidad de una elipse es un valor positivo y siempre menor que uno: $0 < \epsilon < 1$. La excentricidad de la elipse hace referencia a la *forma* de la misma, en relación a cuán «achatada» hacia el eje focal se encuentra. En efecto, cuando la excentricidad es próxima a cero, indica que b es un valor muy pequeño y por lo tanto el eje menor tiene longitud muy pequeña y por lo tanto la elipse se ve achatada hacia el eje focal. Por el contrario, cuando ϵ es cercana a uno, indica que b y a tienen valores muy aproximados. Entonces el triángulo rectángulo inscripto en la elipse tiene un cateto de longitud muy similar a su hipótenusa. En este caso la elipse se «aleja» del eje focal. Veamos esto con algunos gráficos.



ϵ cercano a cero



ϵ cercano a uno

Ejemplo 9. *Consideramos la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Entonces la elipse está centrada en el origen $O(0,0)$, $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$, con lo cual $a = 5$, $b = 4$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$. Los focos de la elipse son $F_1(-3,0)$ y $F_2(0,3)$ y los vértices son $V_1(-5,0)$, $V_2(5,0)$, $V_3(0,-4)$ y $V_4(0,4)$. Con esta información graficamos la elipse:*

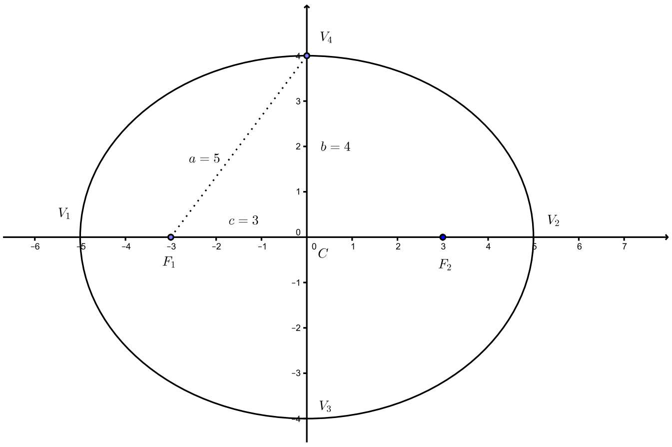


FIGURA 3. Ejemplo 9

Ejemplo 10. *Dar la ecuación de la elipse de focos $F_1(2,2)$, $F_2(6,2)$ y $a = 3$.*

En primer lugar, notamos que el eje focal (determinado por F_1 y F_2) es horizontal y de ecuación $y = 2$. Sabemos entonces que la ecuación de la elipse será de la forma $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ donde (x_0, y_0) son las coordenadas del centro, a es el valor que define la elipse y $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, con c la mitad de la distancia focal.

Observemos que el valor $a = 3$ ya está dado y la distancia focal $2c = d(F_1, F_2) = 4 \Rightarrow c = 2$. Luego $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$. Para hallar el centro C, ubicamos el punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$: $C(4,2)$. Luego la ecuación buscada es

$$\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1.$$

Notemos que la excentricidad de esta elipse es $\epsilon = b/a = \sqrt{5}/3 \sim 0,74$, es decir más cercano a uno que a cero. Es de esperar que la gráfica de esta elipse sea bastante «redondeada».[1]

Para graficar esta elipse, convendrá ubicar los vértices de la misma. Los vértices en el eje focal son: $V_1(1,2)$, $V_2(7,2)$. Los vértices que determinan el eje menor son: $V_3(4, 2-\sqrt{5})$, $V_4(4, 2+\sqrt{5})$.

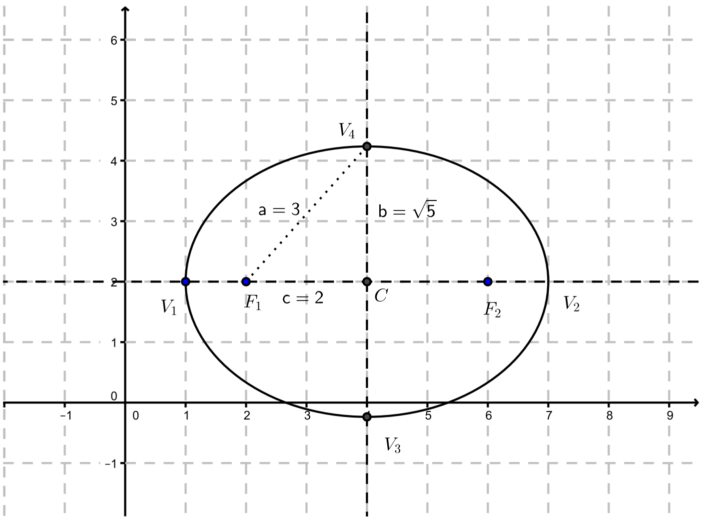


FIGURA 4. Ejemplo 10

Supongamos ahora que $\mathcal{E}(F_1, F_2, 2a)$ es una elipse donde los focos se encuentran ubicados en una recta vertical, es decir F_1 y F_2 tienen igual abscisa. Si $C(x_0, y_0)$ es el centro de la elipse y $2c$ es la distancia focal, entonces $F_1(x_0, y_0 - c)$ y $F_2(x_0, y_0 + c)$ son las coordenadas de los focos.

[1] En base a la fe de erratas incluida abajo, la excentricidad de esta elipse es $\epsilon = c/a = 2/3$ que es cercana a uno, por lo tanto la elipse tiene forma «redondeada»

Dado un punto $P(x, y)$ cualquiera del plano, se tiene

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_1P} &= (x - x_0, y - (y_0 - c)) = (x - x_0, y - y_0 + c) \\ \overrightarrow{F_2P} &= (x - x_0, y - (y_0 + c)) = (x - x_0, y - y_0 - c). \end{aligned}$$

Luego, escribiendo la expresión $|\overrightarrow{F_1P}| + |\overrightarrow{F_2P}| = 2a$ en coordenadas y realizando un razonamiento análogo al hecho para la elipse de eje focal horizontal (ver (7)), obtenemos que $P(x, y)$ pertenece a la elipse si y sólo si sus coordenadas satisfacen

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1. \tag{9}$$

En esta ecuación, nuevamente $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ y la excentricidad $\epsilon = b/a$[2] representa cuán achatada o alejada está la elipse con respecto al eje focal (vertical).

En este caso los vértices resultan: $V_1(x_0, y_0 - a)$, $V_2(x_0, y_0 + a)$, $V_3(x_0 - b, y_0)$ y $V_4(x_0 + b, y_0)$. Esbocemos la gráfica de una elipse con eje focal vertical:

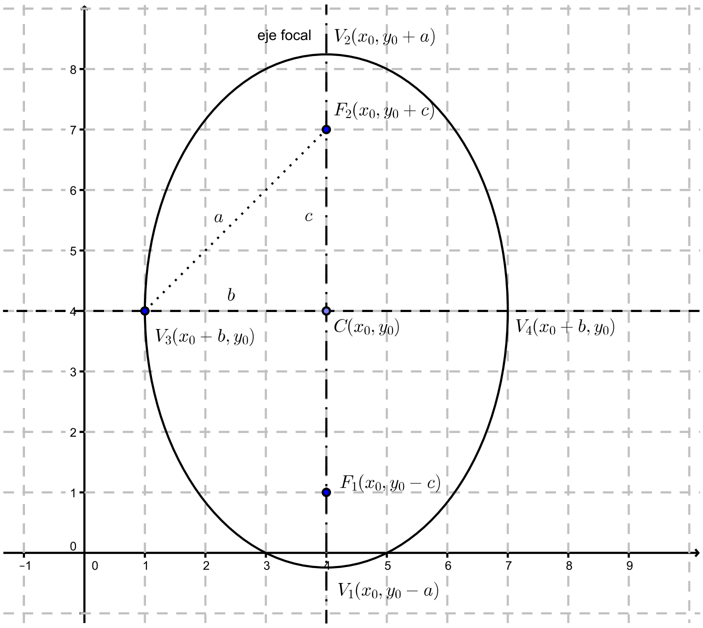


FIGURA 5. Elipse con eje focal paralelo al eje y

Es importante aprender a distinguir si la elipse tiene eje focal vertical u horizontal a partir de su ecuación. Para ello, observemos similitudes y diferencias entre las ecuaciones (8) y (9), entre los divisores de $(x - x_0)^2$ e $(y - y_0)^2$, el divisor más grande corresponde al valor a^2 y el otro al valor b^2. Además el valor a^2 divide al término $(x - x_0)^2$ si la elipse es paralela al eje x (ver Ecuación (8)) o bien divide al término $(y - y_0)^2$ si la elipse es paralela al eje y (ver Ecuación (9)).

Por ejemplo, consideremos las siguientes ecuaciones:

$$\text{i) } \frac{(x - 2)^2}{25} + \frac{(y + 3)^2}{49} = 1, \qquad \text{ii) } \frac{(x - 2)^2}{49} + \frac{(y + 3)^2}{25} = 1. \tag{10}$$

Es claro que ambas ecuaciones representan una elipse de centro $C(2, -3)$. Sin embargo, para establecer sus focos y el valor a que la define, es primero necesario establecer si la elipse tiene eje focal horizontal o vertical. Para ello, observemos que los divisores son $49 = 7^2$ y $25 = 5^2$, siendo $7 > 5$. Luego, en ambas ecuaciones resulta $a = 7$ y $b = 5$.

En la ecuación i), el valor $a^2 = 49$ (mayor que $b^2 = 25$) se ubica debajo del término $(y + 3)^2$, por lo tanto, esta elipse tiene eje focal vertical. El valor c se obtiene como resultado de: $c^2 + 25 = 49$ y $c = 2\sqrt{6}$. Luego, sabiendo que el centro de la elipse es $C(2, -3)$, resultan los focos $F_1(2, -3 - 2\sqrt{6})$ y $F_2(2, -3 + 2\sqrt{6})$. Procedemos como en los ejemplos anteriores para ubicar los vértices y graficar la elipse.

[2]En base a la fe de erratas abajo, la excentricidad de la elipse es $\epsilon = c/a$

Notemos que, por el contrario, en la ecuación ii), el valor $a^2 = 49$ (mayor que $b^2 = 25$) se ubica debajo del término $(x-2)^2$, por lo tanto, esta elipse tiene eje focal horizontal. El valor c nuevamente se obtiene como resultado de: $c^2 + 25 = 49$ y $c = 2\sqrt{6}$. Es importante notar que estas dos elipses tienen iguales parámetros a, b, c y sin embargo son diferentes. Sabiendo que $C(2,-3)$ es el centro de la elipse, los focos son $F_1(2-2\sqrt{6},-3)$ y $F_2(2+2\sqrt{6},-3)$.

Toda elipse de ecuación (8) o (9), puede ser descripta por una ecuación de segundo grado en las variables x e y. En efecto

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{a^2}x^2 + \frac{1}{b^2}y^2 - \frac{2}{a^2}x_0x - \frac{2}{b^2}y_0y + \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right) = 0$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{b^2}x^2 + \frac{1}{a^2}y^2 - \frac{2}{b^2}x_0x - \frac{2}{a^2}y_0y + \left(\frac{x_0^2}{b^2} + \frac{y_0^2}{a^2} - 1\right) = 0$$

Observar que ambas ecuaciones cuadráticas tienen $B = 0$, es decir, no aparece el término rectangular «xy». Además A y C son distintos, pero tienen igual signo.

Ejemplo 11. *Sea $\mathcal{L} = \{P(x,y) : 25x^2+9y^2-36y-189 = 0\}$. Determinar si $\mathcal{L}$ es una elipse o no. En caso afirmativo, dar todos sus elementos característicos.*

Como ya lo hemos hecho para circunferencias, escribimos una ecuación equivalente a la que define $\mathcal{L}$: $25x^2+9y^2-36y-189 = 0$ usando la técnica de completar cuadrados:

$$\begin{aligned} 0 &= 25x^2+9y^2-36y-189 = 25x^2+9(y^2-4y)-189 = 25x^2+9(y^2+2(-2)y)-189 \\ &= 25x^2+9\left(y^2+(-2)y+(-2)^2-(-2)^2\right)-189 = 25x^2+9(y-2)^2-36-189 \\ &= 25x^2+9(y-2)^2-225 \end{aligned}$$

y resulta

$$0 = 25x^2+9(y-2)^2-225 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1.$$

Luego$\mathcal{L}$ es una elipse con $a = 5$, $b = 3$ y eje focal vertical (pues $a^2 = 25$ se encuentra debajo de la «y»).

Para hallar los elementos característicos (focos y vértices) procedemos como antes:

- *el centro de la elipse es $C(0,2)$ y el eje focal tiene ecuación $y = 0$.*
- *$c = \sqrt{a^2-b^2} = sqrt25-9 = 4$ y por lo tanto los focos son (sabiendo que el eje es vertical) $F_1(0,-2)$ y $F_2(0,6)$.*
- *Los vértices sobre el eje focal se obtienen restando y sumando a a la ordenada del centro: $V_1(0,-3)$ y $V_2(0,7)$.*
- *Los vértices sobre el eje menor se obtienen restando y sumando b a la abscisa del centro: $V_3(-3,2)$ y $V_4(3,2)$.*

Con estos elementos esbozamos la gráfica de la elipse:

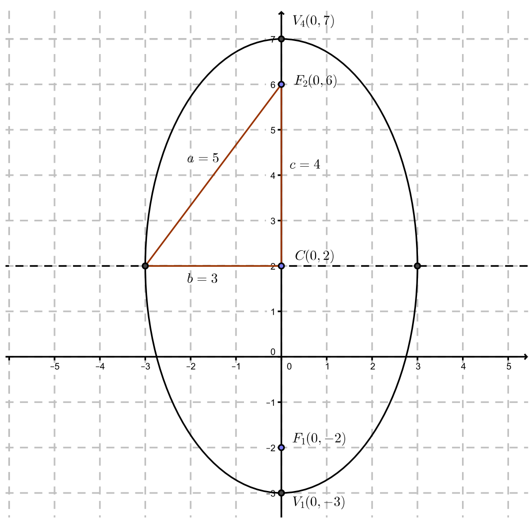


Figura 6. Ejemplo 11

Es importante notar que **no toda ecuación de segundo grado define una elipse**. Esta afirmación por un lado, es obvia porque ya vimos ecuacioes de segundo grado que sí definen circunferencias y por lo tanto, no son elipses. Además, vimos que hay ecuaciones de segundo grado que describen un punto.

Por ejemplo, $\mathcal{L} = \{P(x, y) : 49x^2 + 16y^2 - 98x + 59 = 0\}$ está definida por una ecuación de segundo grado y sin embargo el conjunto $\mathcal{L}$ es vacío (y por lo tanto, no es una elipse). En efcto, la ecuación $49x^2 + 16y^2 - 98x + 59 = 0$ es equivalente a $\frac{(x-1)^2}{\frac{-10}{49}} + \frac{y^2}{\frac{-10}{16}} = 1$ que no describe une elipse.

Fecha: 14 de mayo de 2015.

3.1. Fe de erratas. La definición de *excentricidad de la elipse* está erroneamente dada. Corrijo a continuación su definición y su interpretación. Los párrafos arriba, marcados con rojo deben ser reemplazados por el texto a continuación:

Definición 12. *Se llama excentricidad de la elipse $\mathcal{E}$ de ecuación cartesiana $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ o $\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$ al valor $\epsilon = \frac{c}{a}$*

Observar que con esta definición ϵ sigue siendo un valor entre 0 y 1: $0 < \epsilon < 1$, ya que $a^2 = b^2 + c^2$.

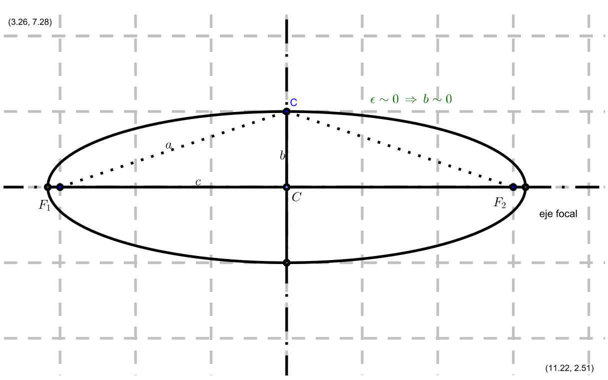
La excentricidad $\epsilon = c/a$ de de la elipse sí hace referencia a la *forma* de la misma, en relación a cuán «achatada» hacia el eje focal se encuentra.

Con la definición bien dada ahora tenemos que cuando la excentricidad $\epsilon = c/a$ es próxima a cero, indica que c es un valor muy pequeño y por lo tanto b es próximo a a (recordar $a^2 = b^2 + c^2$). En este caso, el triángulo rectángulo inscripto en la elipse tiene un cateto de longitud muy similar a su hipótenusa. En este caso la elipse se «aleja» del eje focal. Por el contrario, si ϵ es cercano a 1, esto indica que c y a son próximos y por lo tanto b es pequeño. Luego, la elipse se «achata» hacia el eje focal.

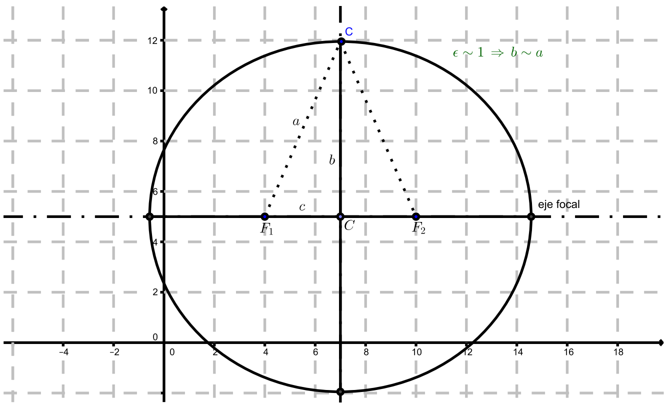
Resumiendo y para fijar bien la idea de excentricidad:

$$\epsilon = c/a, \quad 0 < \epsilon < 1, \quad \begin{cases} \epsilon \sim 0 \ \Rightarrow \ c \sim 0 \text{ y } b \sim a, \text{ y la elipse tiene forma «redondeada»}, \\ \epsilon \sim 1 \ \Rightarrow \ c \sim a, \text{ y } b \sim 0 \text{ y la elipse tiene forma «achatada»}. \end{cases}$$

Veamos esto con algunos gráficos.



ϵ cercano a uno



ϵ cercano a cero

4. Hipérbola

Definición 13. *Dados dos puntos distintos del plano F_1, F_2 y un número real $a > 0$ tal que $2a < d(F_1, F_2)$, se denomina hipérbola de focos F_1, F_2 al lugar gemétrico del plano que forman los puntos P tales que*

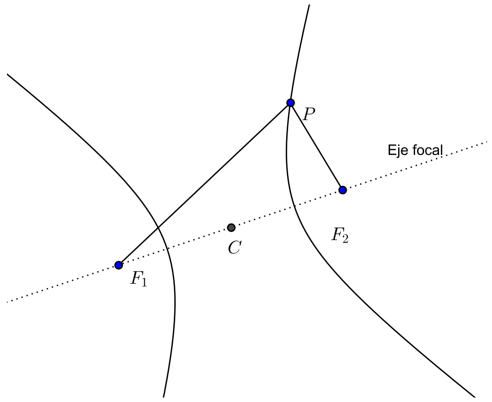
$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a. \tag{11}$$

Este lugar geométrico lo denotamos $\mathcal{H}(F_1, F_2, a)$.

En símbolos, la definición anterior establece:

$$\mathcal{H}(F_1, F_2, a) = \{P \,:\, |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}.$$

Se deja como consigna para el lector, que se busque una manera mecánica de construir una hipérbola dados sus focos y la distancia a. Un método mecánico de construcción puede encontrarse en el libro «Lecciones de álgebra y geometría analítica» (Vol. 2) de los autores A. Nasini y R. López, disponible en la biblioteca central. De esta construcción mecánica podemos ver que la «forma» de una hipérbola es:



El punto medio C del segmento $\overline{F_1F_2}$ se llama *centro* de la hipérbola y la recta que contiene a los focos se llama *eje focal*.

Fijamos un sistema coordenado cartesiano $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$. En esta sección determinaremos las ecuaciones cartesianas de aquellas hipérbolas con ejes focales paralelos a los ejes coordenados.

Sea C el centro de la hipérbola $\mathcal{H}(F_1, F_2, a)$, de coordenadas $C(x_0, y_0)$, y $2c$ la distancia focal, es decir $2c = d(F_1, F_2)$. Notar que por la definición arriba dada tenemos $a < c$, contrariamente a lo que sucede en el caso de la elipse. Definimos b el número real positivo tal que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Sea $\mathcal{H}(F_1, F_2, a)$ la hipérbola de focos F_1 y F_2 y distancia a, y supongamos que el eje focal es paralelo al eje x. Como el eje focal es horizontal y $C(x_0, y_0)$ pertenece al mismo, resulta que el eje focal tiene ecuación $y = y_0$. Realizando un razonamiento análogo a lo hecho para la elipse y la circunferencia obtenemos que un punto $P(x, y)$ del plano es un punto de la hipérbola $\mathcal{H}(F_1, F_2, a)$ si y sólo si sus coordenadas satisfacen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{12}$$

Ejercicio 14. *Demostrar la ecuación anterior. Es decir, dados F_1 y F_2 focos de una hipérbola tal que la recta $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ es paralela al eje x y $C(x_0, y_0)$ es el punto medio de ambos focos entonces*

$$P(x, y) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

donde $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ y $2c = d(F_1, F_2)$.

Idea *Seguir los siguientes pasos:*

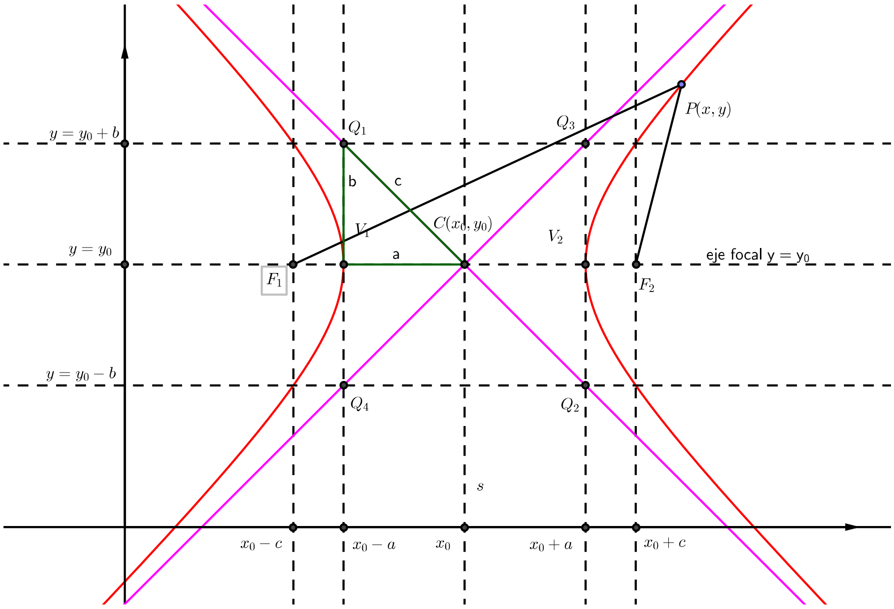
- *Notar que un punto P verifica $||\, \overrightarrow{F_1P}\, | - |\, \overrightarrow{F_2P}\, || = 2a$ si y sólo si se da alguna de las dos siguientes situaciones:*
$$|\, \overrightarrow{F_1P}\, | - |\, \overrightarrow{F_2P}\, | = 2a \text{ o bien } |\, \overrightarrow{F_1P}\, | - |\, \overrightarrow{F_2P}\, | = -2a.$$
- *Tomar $P(x, y)$ cualquiera en el plano y escribir los vectores $\overrightarrow{F_1P}$ y $\overrightarrow{F_2P}$ en coordenadas, teniendo en cuenta que $F_1(x_0 - c, y_0)$ y $F_2(x_0 + c, y_0)$.*
- *Con las ecuaciones arriba, escribir en coordenadas las expresiones $|\, \overrightarrow{F_1P}\, | - |\, \overrightarrow{F_2P}\, | = 2a$ y $|\, \overrightarrow{F_1P}\, | - |\, \overrightarrow{F_2P}\, | = -2a$. Trabajar algebraicamente ambas para llegar a la ecuación requerida.*

La ecuación (12) se llama *ecuación cartesiana* de la hipérbola con eje focal horizontal. Damos a continuación la interpretación de los parámetros a, b y c:

- $2c$ mide la distancia focal.

- Si el eje de la hipérbola es paralelo al eje x, vemos de (12) que los puntos
$$V_1(x_0 - a, y_0) \quad \text{y} \quad V_2(x_0 + a, y_0)$$
son puntos de $\mathcal{H}$ y yacen en el eje focal; más precisamente entre F_1 y C y entre F_2 y C respectivamente. Estos puntos se llaman *vértices* de la hipérbola y son los puntos de intersección de la misma con el eje focal.
- El parámetro b está asociado a las asíntotas de la hipérbola: las rectas que pasan por el centro C y con pendientes $-\frac{b}{a}$ y $\frac{b}{a}$ se llaman *asíntotas de la hipérbola* y sus ecuaciónes son
$$r_1)\ y = -\frac{b}{a}(x - x_0) + y_0, \qquad r_2)\ y = \frac{b}{a}(x - x_0) + y_0.$$
En particular,
$$Q_1(x_0 - a, y_0 + b),\ Q_2(x_0 + a, y_0 - b) \in r_1 \qquad \text{y} \qquad Q_3(x_0 + a, y_0 + b),\ Q_4(x_0 - a, y_0 - b) \in r_2.$$

Representamos gráficamente los elementos mencionados:



Notar que para las hipérbolas también se tiene un triángulo rectángulo con lados de longitud a, b, c, sólo que ahora c es la hipotenusa y a y b los catetos (por ejemplo $\overset{\triangle}{CV_1Q_1}$).

Las rectas r_1 y r_2 se llaman *asíntotas* de la hipérbola $\mathcal{H}$ y se debe a que éstas se acercan tanto como uno quiera a $\mathcal{H}$, sin intersecarla nunca. Las ramas de la hipérbola quedan dentro de la región determinada por las rectas r_1 y r_2, que contiene más de un punto del eje focal.

El hecho que r_1 y r_2 sean *asíntotas* de la hipérbola indica que para cada valor $\epsilon > 0$ que uno tome, hay puntos de la hipérbola que distan menos de ϵ de r_1 y puntos de la hipérbola que distan menos de ϵ de r_2. A continuación probamos este hecho para el caso de eje focal paralelo al eje x y puntos acercándose a r_2 con $x > x_0$ e $y > y_0$.

Una ecuación equivalente a la dada para r_2 es $bx - ay + ay_0 - bx_0 = 0$. Si $P(x, y)$ pertenece a $\mathcal{H}$ entonces por (12) se tiene que $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, por lo tanto podemos despejar su segunda coordenada:
$$y = b\sqrt{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - 1} + y_0 = \frac{b}{a}\sqrt{(x - x_0)^2 - a^2} + y_0.$$

Entonces, usando la ecuación $r_2)\, bx - ay + ay_0 - bx_0 = 0$, calculamos la distancia de P a r_2, que resulta:

$$\text{(13)} \qquad d(P, r_2) = \left| \frac{bx - a\left(\frac{b}{a}\sqrt{(x - x_0)^2 - a^2} + y_0\right) + ay_0 - bx_0}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left| (x - x_0) - \sqrt{(x - x_0)^2 - a^2} \right|.$$

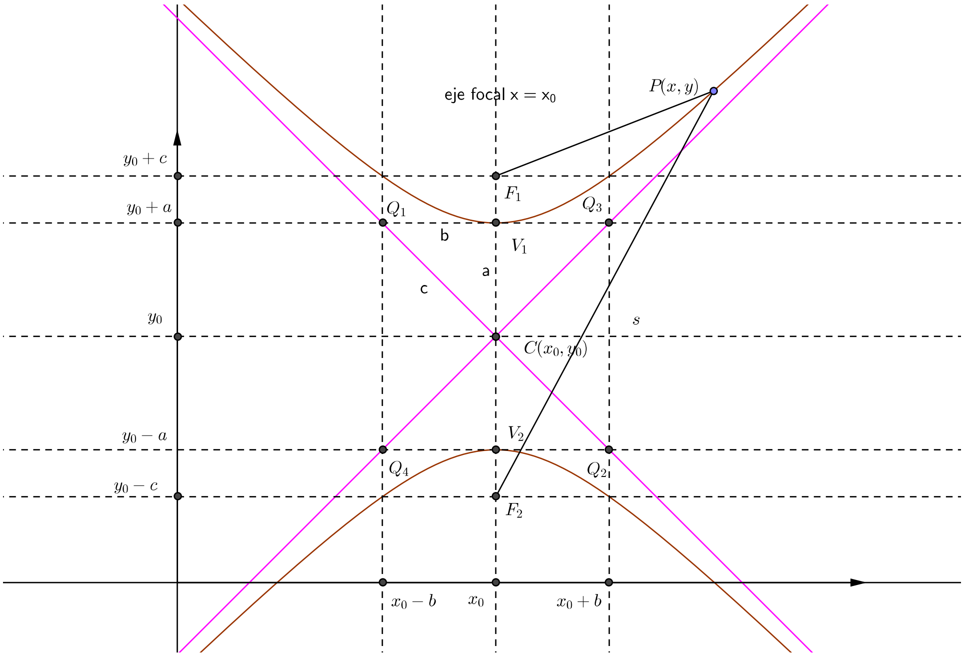
Sabiendo que
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left| (x - x_0) - \sqrt{(x - x_0)^2 - a^2} \right| = 0, \quad \text{concluimos que} \quad \lim_{x \longrightarrow \infty} d(P, r_2) = 0.$$

Ejercicio 15. *Sea s la recta perpendicular al eje focal de $\mathcal{H}$ que pasa por el centro C de $\mathcal{H}$, es decir $s)\, x = x_0$. Usando la ecuación* (12) *probar que la hipérbola es siempre simétrica con respecto al eje focal y a la recta s.*

A continuación trabajaremos con la ecuación cartesiana de una hipérbola $\mathcal{H}(F_1, F_2, a)$ cuyo eje focal sea paralelo al eje y.

Como el eje focal es vertical y $C(x_0, y_0)$ pertenece al mismo, resulta que el eje focal tiene ecuación $x = x_0$. Es posible probar que un punto $P(x, y)$ del plano es un punto de la hipérbola $\mathcal{H}(F_1, F_2, a)$ si y sólo si sus coordenadas satisfacen

$$-\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1. \tag{14}$$



Ejercicio 16. *Demostrar que toda hipérbola con eje focal vertical está descripta por una ecuación como en* (14).

Sea s la recta perpendicular al eje focal de $\mathcal{H}$ que pasa por el centro C de $\mathcal{H}$, es decir $s)\, y = y_0$. La ecuación (14) implica que la hipérbola es simétrica con respecto al eje focal y a la recta s.

En este caso (14) es la *ecuación cartesiana* de la hipérbola con eje focal vertical. Los parámetros a, b y c presentes en la ecuación cartesiana y en el desarrollo describen los mismos elementos que en el caso anetrior: distancia focal, vértices y asíntotas, sólo que las ecuaciones se modifican de la siguiente manera:

La ecuación (14) implica que ahora los puntos

$$V_1(x_0, y_0 - a) \quad \text{y} \quad V_2(x_0, y_0 + a)$$

son los vértices de $\mathcal{H}$, cuando ésta tiene eje focal vertical. Éstos son puntos de la hipérbola y pertenecen al eje focal; también se encuentran entre F_1 y C y entre F_2 y C respectivamente. Observar que V_1 y V_2 son los puntos de intersección de la misma con el eje focal.

Las asíntotas de $\mathcal{H}$ son rectas que pasan por el centro C y con pendientes $-\frac{a}{b}$ y $\frac{a}{b}$. Es decir, las rectas

$$r_1)\; y = -\frac{a}{b}(x - x_0) + y_0, \qquad r_2)\; y = \frac{a}{b}(x - x_0) + y_0.$$

En particular, los puntos

$$Q_1(x_0 - b, y_0 + a),\, Q_2(x_0 + b, y_0 - a) \in r_1 \qquad \text{y} \qquad Q_3(x_0 + b, y_0 + a),\, Q_4(x_0 - b, y_0 - a) \in r_2.$$

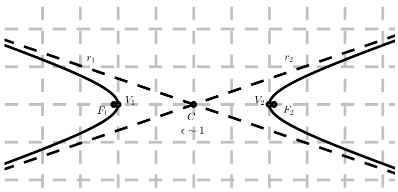
Es claro que la propiedad de que los puntos de las asíntotas y de la hipérbola se acercan tanto como uno quiera sin tocarse, también se verifica en este caso.

4.1. Generalidades y ejemplos. Notar que la información que se lee en las ecuaciones cartesianas (12) y (14) son: las coordenadas del centro (x_0, y_0), los parámetros a (que define la distancia en (11)) y b.

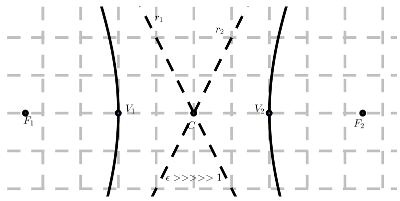
Es importante aprender a distinguir a partir de la eucación de una hipérbola de la forma (12) o (14), cuándo el eje focal es horizontal o vertical. Notar que en este caso, contraro a lo hecho para elipse, no podemos establecer una relación entre los valores a y b en cuanto a quién es mayor o menor pues ambos son catetos del triángulo rectángulo descipto dentro de la hipérbola. En este caso, para determinar si el eje focal de $\mathcal{H}$ es horizontal o vertical es necesario notar el lugar que ocupe el signo negativo en la ecuación.

Definición 17. *Se llama excentricidad de la hipérbola al valor $\frac{c}{a}$ y se la denota con la letra ϵ (epsilon).*

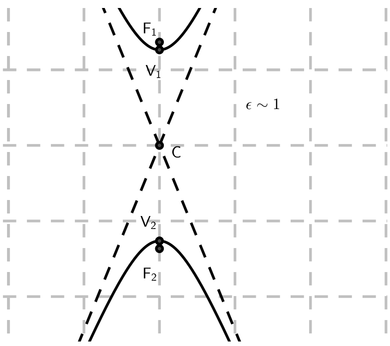
Contrariamente a lo que sucede en la elipse, aquí la excentricidad es siempre mayor que uno: $\epsilon = \frac{c}{a} > 1$. La excentricidad de una hipérbola determina cuán «achatada» o «alejada» con respecto al eje focal es. Si ϵ es cercano a 1, quiere decir que c es próximo a a y b próximo a cero; luego la hipérbola se achata hacia el eje focal, como muestran las figuras



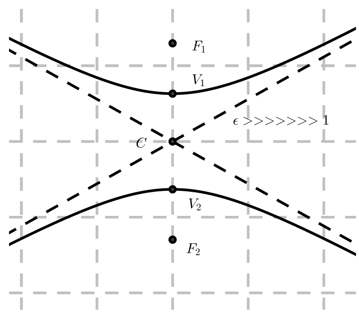
Excentricidad cercana a 1



Excentricidad mucho mayor que 1



Excentricidad cercana a 1



Excentricidad mucho mayor que 1

Ejemplo 18. *Sea $\mathcal{H}$ la hipérbola de focos $F_1(-\sqrt{2}, 0)$ y $F_2(\sqrt{2}, 0)$ y $a = 1$. Dar la ecuación cartesiana de $\mathcal{H}$. Además, hallar su centro, sus vértice, dar la excentricidad y las ecuaciones de sus asíntotas. Esbozar su gráfica.*

Vemos que los focos se encuentran sobre el eje x, por lo tanto, su eje focal es $y = 0$. La ecuación cartesiana tendrá la forma de (12). Calculamos a continuación los elementos necesarios para completar la ecuación cartesiana.

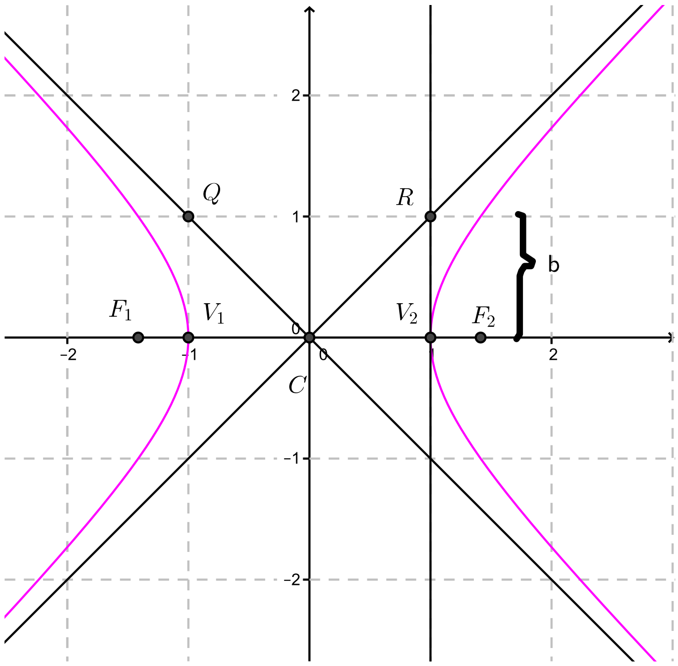
La distancia focal es $d(F_1, F_2) = 2\sqrt{2}$, por lo tanto $c = \sqrt{2}$; como $a = 1$, tenemos que $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{2 - 1} = 1$. Sólo resta determinar el centro de la hipérbola, que es el punto medio de $\overline{F_1F_2}$; el centro de la hipérbola es $C(0, 0)$, el origen. Ya tenemos todos los elementos necesarios para dar la ecuación cartesiana pedida de la hipérbola $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = 1$ o bien,

$$\mathcal{H}(F_1, F_2, 1): \quad x^2 - y^2 = 1.$$

Para graficar la hipérbola, primero ubicamos los dos focos y el centro. Luego los vértices: según vimos, éstos se encuentran sobre el eje focal a una distancia a del centro, es decir $V_1(-1, 0)$ y $V_2(1, 0)$.

Al fijar los vértices podemos dibujar las asíntotas de la siguiente manera. Se toma la perpendicular al eje focal que pasa por los vértices y se mide hacia arriba una distancia b, marcando los puntos Q y R como muestra la gráfica. Es decir, $R(1, 1)$ y $Q(-1, 1)$. Las rectas $\overleftrightarrow{CR}$ y $\overleftrightarrow{CQ}$ son las asíntotas. La hipérbola queda encerrada dentro de la región determinada por las asíntotas que contiene al eje focal.

¡OJO! *Al dibujar la hipérbola a mano alzada NUNCA se debe graficar una intersección entre la hipérbola y sus asíntotas.*



Resta dar la excentricidad y las ecuaciones de las asíntotas. La excentricidad $\epsilon = c/a = \sqrt{2}/1 = \sqrt{2}$. *Observar la gráfica dada con respecto a esta excentricidada.*

Las asíntotas son rectas que tienen pendiente $-b/a = -1$ *y* $b/a = 1$ *que pasan por el centro* $(0,0)$, *por lo tanto sus ecuaciones son:*

$$r_1)\ y = -x, \qquad r_2)\ y = x.$$

En el siguiente ejemplo, haremos un proceso inverso. Dada la ecuación de la hipérbola, determinaremos los focos y sus ejes focales a partir de la información presente en la ecuación dada.

Ejemplo 19. *Considerar* $\mathcal{L}$ *el siguiente lugar geométrico:*

$$\mathcal{L} = \{P(x,y) : 5y^2 - 20y - 4x^2 + 8x = 4\}.$$

Determinar si $\mathcal{L}$ *es una hipérbola y en tal caso dar su ecuación cartesiana y sus elementos característicos, es decir: focos, centro, vértices, asíntotas. Esbozar su gráfica.*

A primera vista, la ecuación $5x^2 - 20y - 4x^2 + 8x = 4$ *no se asemeja ninguna de las ecuaciones cartesianas* (12) *ni* (14). *Trabajamos un poco la expresión:*

$$\begin{aligned} 5y^2 - 20y - 4x^2 + 8x - 4 &= 5(y^2 - 4y) - 4(x^2 - 2x) - 4 \\ &= 5(y^2 - 2 \cdot 2 \cdot y + 2^2 - 2^2) - 4(x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2 - 1^2) - 4 \\ &= 5(y-2)^2 - 4(x-1)^2 - 20. \end{aligned}$$

Luego, $5y^2 - 20y - 4x^2 + 8x - 4 = 0$ *si y sólo si* $5(y-2)^2 - 4(x-1)^2 = 20$ *o lo que es equivalente,*

$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{5} = 1.$$

Esta ecuación equivalente define a $\mathcal{L}$ *y por lo tanto es una hipérbola.*

A continuación interpretaremos los datos que nos brinda esta ecuación, para aprender a leerla:

- *El signo menos que se encuentra delante del término cuadrático de* x *indica que la hipérbola tiene eje focal paralelo al eje* y.
- *De lo anterior y comparando con la ecuación* (14), *vemos que* $b^2 = 5$ *y* $a^2 = 4$. *Por lo tanto* $b = \sqrt{5}$, $a = 2$ *y* $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3$.
- *El centro es* $C(1,2)$ *pues son los coeficientes dentro de los términos cuadráticos.*

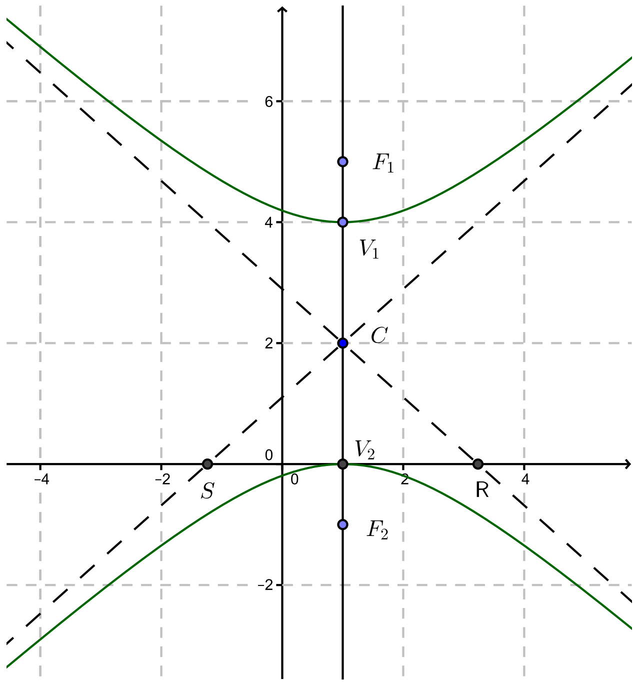
A partir de estos datos, podemos comenzar la gráfica de la hipérbola. Ubicamos su centro $C(1,2)$*, y el eje focal (vertical)* $x = 1$*. Los focos se encuentran sobre esta recta, a una distancia* $c = 3$ *del centro, por lo tanto ellos son:* $F_1(1,5)$ *y* $F_2(1,-1)$*.*

A continuación, ubicamos los vértices que se encuentran a una distancia $a = 2$ *del centro, sobre el eje focal:* $V_1(1,4)$ *y* $V_2(1,0)$*.*

Las asíntotas se obtienen trazando una perpendicular al eje focal por uno de los vértices y midiendo una distanca $b = \sqrt{5}$ *sobre esta perpendicular, marcando los puntos* R *y* S *como indica el dibujo. Las rectas* $\overleftrightarrow{CR}$ *y* $\overleftrightarrow{CS}$ *son las asíntotas de la hipérbola.*

Para obtener las ecuaciones de las asíntotas, tenemos en cuenta que éstas tienen pendiente $\pm\, a/b = \pm 2/\sqrt{5}$ *y pasan por el punto* $C(1,2)$*, por lo tanto sus ecuaciones son:*

$$r_1)\, y = \frac{2}{\sqrt{5}}(x-1)+2, \qquad r_2)\, y = -\frac{2}{\sqrt{5}}(x-1)+2.$$



Finalmente, notemos que toda hipérbola de ecuación (12) o (14), puede ser descripta por una ecuación de segundo grado en las variables x e y. En efecto

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{a^2}x^2 - \frac{1}{b^2}y^2 - \frac{2}{a^2}x_0x + \frac{2}{b^2}y_0y + \left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right) = 0$$

$$-\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1 \quad \rightsquigarrow \quad -\frac{1}{b^2}x^2 + \frac{1}{a^2}y^2 + \frac{2}{b^2}x_0x - \frac{2}{a^2}y_0y + \left(-\frac{x_0^2}{b^2} + \frac{y_0^2}{a^2} - 1\right) = 0$$

Observar que ambas ecuaciones cuadráticas tienen $B = 0$, es decir, no aparece el término rectangular «xy». Además, A y C tienen distinto signo.

Es necesario destacar también que no toda ecuación de segundo grado con $B = 0$ y A y C de distinto signo define una hipérbola. En efecto el conjunto $\mathcal{L} = \{P(x,y) : x^2 - y^2 = 0\}$ es la unión de dos rectas: $\mathcal{L} = r_1 \cup r_2$ donde $r_1)\, x = y$ y $r_2) x = -y$.

Fecha: 20 de mayo de 2015.

5. Parábola

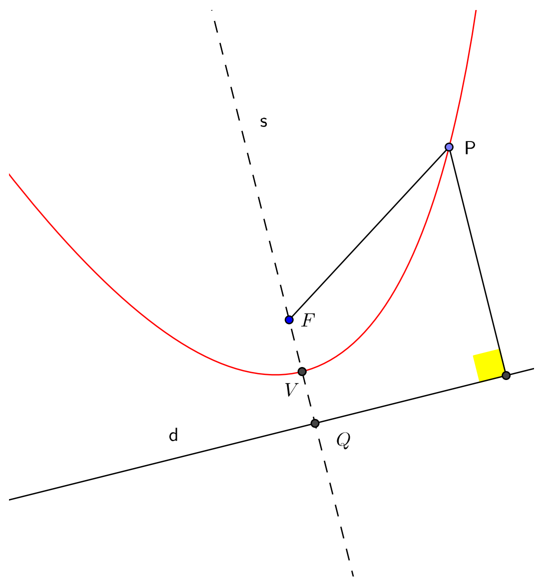
Definición 20. *Dada una recta d y un punto $F \notin d$, se llama* parábola *de directriz d y foco F al lugar geométrico de puntos del plano que equidistan de d y F. A este lugar geométrico lo denotamos $\mathcal{P}(F, d)$.*

Explícitamente, los puntos de la parábola $\mathcal{P}(F, d)$ son:

$$\mathcal{P}(F, d) = \{P \,:\, d(P, F) = d(P, d)\}.$$

Se llama vértice de la parábola $\mathcal{P}(F, d)$ al punto V obtenido de la siguiente manera: sea s la recta perpendicular a d que pasa por F y Q el punto de intersección de s con d. El vértice V se define como el punto medio del segmento $\overline{FQ}$. Notar que V es siempre un punto de la parábola pues $d(F, V) = \frac{1}{2} long(\overline{FQ}) = d(V, d)$ (ver dibujo abajo).

Usando escuadra, lápiz, papel e hilo es posible trazar una parábola, dados su foco y su directriz. Sugerimos al lector dirigirse nuevamente al libro «Lecciones de álgebra y geometría analítica» (Vol. 2) de los autores A. Nasini y R. López, para ver un método mecánico para la construcción de la parábola. La construcción allí descripta nos permite ver que la «forma» de una parábola es:



En esta sección nos avocaremos a determinar las ecuaciones cartesianas de las parábolas cuya directriz sea paralela a alguno de los ejes coordenados.

En esta sección determinaremos las ecuaciones cartesianas de aquellas hipérbolas con ejes focales paralelos a los ejes coordenados.

Fijamos un sistema coordenado cartesiano $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$. Determinaremos las ecuaciones cartesianas de una parábola cuya directriz d sea paralela al eje x.

Sea $\mathcal{P}(F, d)$ la parábola de directriz d y foco F, de manera que $d \parallel$ eje x. Sea V el vértice, escribimos sus coordenadas como $V(x_0, y_0)$. Escribiremos la ecuación de la recta d y del punto F en función de las coordenadas de V.

Sea $p = d(F, d)$, y supongamos que el foco está por encima de la directriz. Entonces, por la definición del vértice se deduce que el foco tiene coordenadas $F(x_0, y_0 + \frac{p}{2})$. Si el foco está por debajo de la directriz, entonces sus coordenadas son $F(x_0, y_0 - \frac{p}{2})$ (ver Figuras 1 y 2 a continuación). Se deduce también que la directriz tiene ecuación $d)\, y = y_0 - \frac{p}{2}$ en el primer caso y $d)\, y = y_0 + \frac{p}{2}$ en el segundo.

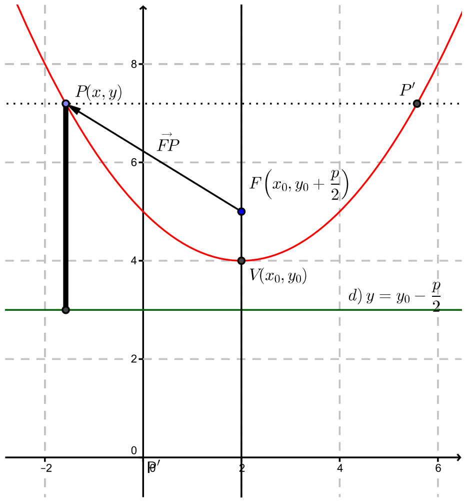


Figura 1: Foco por encima de la directriz.

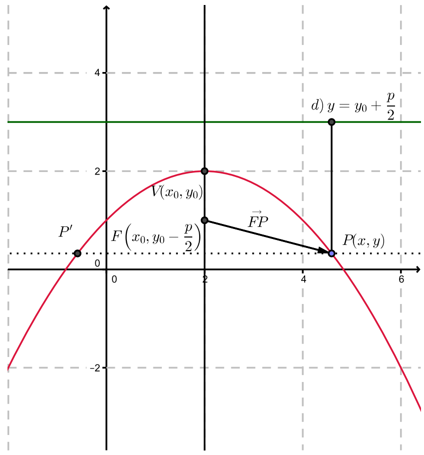


Figura 2: Foco por debajo de la directriz.

Para hallar la ecuación canónica de una parábola con directriz horizontal, primero supondremos que el foco está por encima de la directriz; es decir, nos ubicamos en el caso de la Figura 1.

Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano. Notar que $d(P,d) = |y-(y_0-\frac{p}{2})|$ y $d(P,F) = |\overrightarrow{FP}| = |\left(x - x_0, y - (y_0 + \frac{p}{2})\right)|$. Luego $P \in \mathcal{P}(F,d)$ si y sólo si $d(P,d) = d(P,F)$, es decir,

$$
\begin{aligned}
P \in \mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\left(x - x_0, y - (y_0 + \frac{p}{2})\right)\right| = \left|y - (y_0 - \frac{p}{2})\right| \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0 - \frac{p}{2}))^2} = \left|y - y_0 + \frac{p}{2}\right| \\
&\Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0 - \frac{p}{2}))^2 = (y - y_0 + \frac{p}{2})^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Concluimos entonces que si directriz es horizontal y el foco está por encima de d, entonces la parábola $\mathcal{P}(F,d)$ está descripta por la ecuación

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0). \qquad (16)$$

Si el foco está por debajo de la directriz como muestra la Figura 2, resulta que las coordenadas de F y d cambian de la siguiente manera: $F(x_0, y_0 - \frac{p}{2})$ y $d)\, y = y_0 + \frac{p}{2}$. Entonces si $P(x,y)$ es un punto del plano, resulta $d(P,d) = |y - (y_0 + \frac{p}{2})|$ y $d(P,F) = |\overrightarrow{FP}| = |\left(x - x_0, y - (y_0 - \frac{p}{2})\right)|$. Realizando un procedimiento análogo, obtenemos que en este caso la parábola está descripta por la ecuación

$$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0). \qquad (17)$$

En cualquiera de los dos casos, puede verse que la parábola es simétrica respecto de la recta que contiene al vértice V y al foco F. Es decir, si un punto P pertenece a la parábola $\mathcal{P}$, entonces su simétrico P' con respecto a la recta $\overleftrightarrow{VF}$ también pertenece a $\mathcal{P}$. Queda como **Ejercicio** para el lector demostrar este hecho.

Las ecuaciones (16) y (17) se llaman *ecuaciones cartesianas* de la parábola con directriz horizontal.

Supongamos ahora que se tiene una parábola $\mathcal{P}(F,d)$ cuya directriz es paralela al eje y. Sea F el foco de $\mathcal{P}$ y V su vértice; escribimos las coordenadas del vértice $V(x_0,y_0)$, entonces las coordenadas de F y la ecuación de d se escriben en función de las coordenadas de V y la distancia $p = d(F,d)$.

Nuevamente tenemos dos situaciones: si el foco está a la derecha de la directriz o a la izquierda. En el primer caso, se puede ver que el foco tiene coordenadas $F(x_0 + \frac{p}{2}, y_0)$ y la directriz tiene ecuación $d)\, x = x_0 - \frac{p}{2}$ (ver Figura 3, abajo).

En el segundo caso (Figura 4) resulta $F(x_0 - \frac{p}{2}, y_0)$ y $d)\, x = x_0 + \frac{p}{2}$.

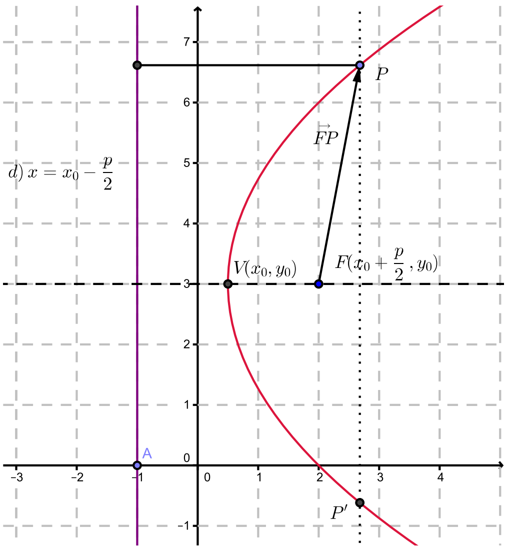


Figura 3: Foco a la derecha de la directriz.

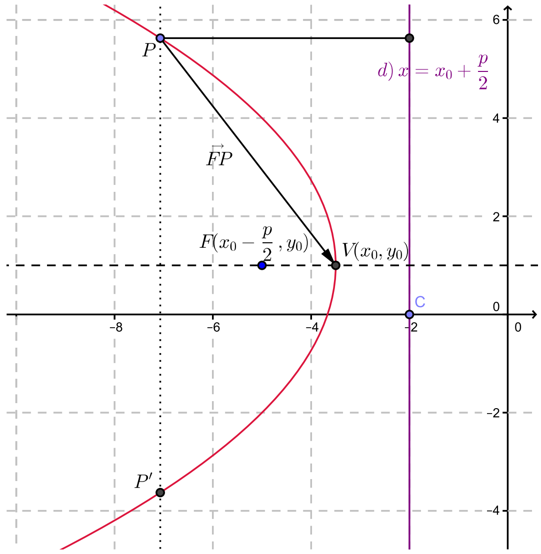


Figura 4: Foco a la izquierda de la directriz.

Tal como fue estudiado en el caso de directriz horizontal, se puede probar que una parábola de foco F y directriz $d \parallel$ eje y está descripta por la ecuación

(18) $$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0), \qquad \text{si el foco está a la derecha de la directriz (Fig. 3);}$$

o bien

(19) $$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0), \qquad \text{si el foco está a la izquierda de la directriz (Fig. 4).}$$

En cualquiera de los dos casos, puede verse que la parábola es simétrica respecto de la recta que contiene al vértice V y al foco F.

Las ecuaciones (18) y (19) se llaman *ecuaciones cartesianas* de la parábola con directriz vertical.

5.1. Generalidades y ejemplos. Las ecuaciones (16), (17), (18), (19) son muy similares entre sí. Es importante destacar la información presente en cada una de ellas:

- En todas, tenemos que los coeficientes (x_0, y_0) son las coordenadas del vértice.
- El valor p representa distancia del foco a la directriz.
- La potencia cuadrática indica cuál es la posición de la directriz: si aparece el término cuadrático en la x como en las Ecs. (16), (17) la directriz es horizontal; si por el contrario, el término cuadrático se encuentra en la y como en las Ecs. (18), (19), la directriz es vertical.
- Toda ecuación de parábola tiene un término cuadrático y uno lineal. Por ejemplo:

$$\underbrace{(y-y_0)^2}_{\text{término cuadrático}} = -2p \underbrace{(x-x_0)}_{\text{término lineal}}, \qquad \underbrace{(x-x_0)^2}_{\text{término cuadrático}} = 2p \underbrace{(y-y_0)}_{\text{término lineal}}.$$

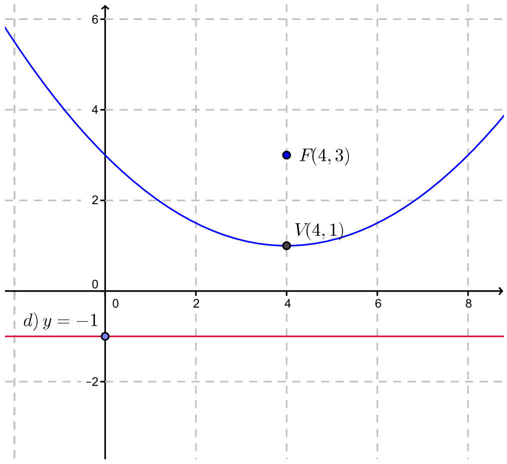
  El término lineal siempre se acompaña del coeficiente $2p$ o $-2p$, siendo p un número positivo. Cuando aparece el signo negativo, el foco se encuentra por debajo o a la izquierda de la directriz, dependiendo si la directriz es horizontal o vertical, respectivamente. En caso que el coeficiente del término lineal sea $2p$ (positivo!), la posición del foco es por arriba o a la derecha de la directriz, dependiendo si la directriz es horizontal o vertical, respectivamente.

Ejemplo 21. *Dar las ecuaciones cartesianas de la parábola de foco* $F(4, 3)$ *y directriz* $y = -1$.

La directriz $d)\, y=-1$ es una recta horizontal. Además, el foco F está por encima de la recta $y=-1$, por lo tanto la ecuación de esta parábola será de la forma (16), es decir,

$$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0).$$

Determinaremos los elementos (x_0, y_0) y p para completar esta la ecuación canónica de $\mathcal{P}$.
La distancia del punto F a la recta d es $p=4$. Entonces $p/2=2$ y el vértice V se encuentra sobre la recta $x=4$, 2 unidades por debajo de F; es decir $V(4,1)$.



Ejemplo 22. *Sea $\mathcal{L}$ el lugar geométrico definido por la ecuación $x^2-2x+2y-3=0$. Determinar si $\mathcal{L}$ es una parábola y en tal caso dar su foco y directriz.*

Trabajamos la expresión $x^2-2x+2y-3$ obteniendo,

$$x^2-2x+2y-3 = x^2-2x+1-1+2y-3 = (x-1)^2+2(y-2).$$

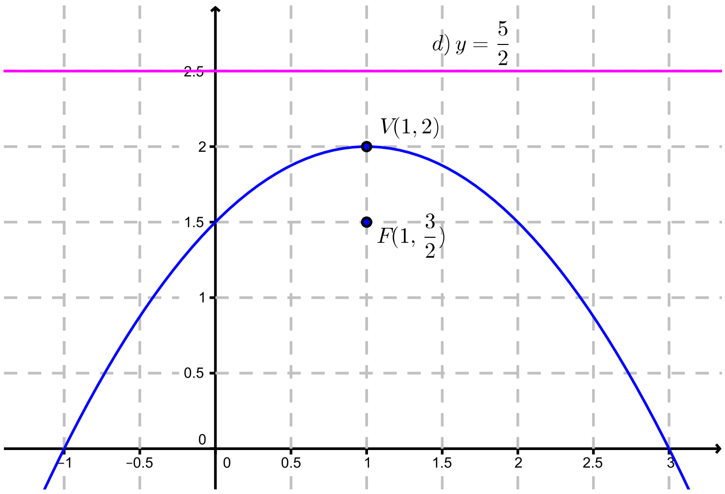
Luego, $x^2-2x+2y-3=0$ si y sólo si $(x-1)^2=-2(y-2)$ y el lugar geométrico $\mathcal{L}$ está definido por la ecuación

$$(x-1)^2 = -2(y-2). \tag{20}$$

Esta ecuación describe una parábola por lo tanto $\mathcal{L}$ sí es una parábola. A continuación enunciamos la información que obtenemos de (20), siguiendo el orden mencionado en los ítems de arriba.

- *Las coordenadas del vértice son $V(1,2)$,*
- *la distancia del foco a la directriz es $p=1$,*
- *la potencia cuadrática se ubica sobre la x, por lo tanto esta parábola tiene directriz paralela al eje x,*
- *el término* **no** *cuadrático que es $(y-2)$ está acompañado por el coeficiente $-1\cdot p=-1\cdot 1$. Es decir, un número negativo multiplica al número positivo p. Por lo tanto el foco está por debajo de la directriz.*

Teniendo en cuenta esta información empezamos a graficar la parábola ubicando el vértice $V(1,2)$. Sobre la recta $x=1$, medimos $p/2=1/2$ hacia arriba y ubicamos la directriz como la recta $d)\, y=2+1/2=5/2$. Sobre la misma recta pero hacia abajo, ubicamos el foco a distancia $p/2$ de V.



Ejemplo 23. *Sea $\mathcal{L}$ el lugar geométrico descripto por la ecuación $y^2-4x-4y+28=0$. Determinar si $\mathcal{L}$ es una parábola y en tal caso dar su foco y directriz.*

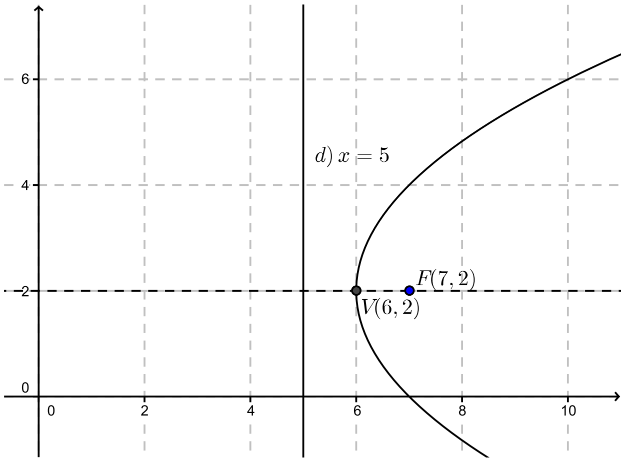
Nuevamente, trabajamos la expresión $y^2 - 4x - 4y + 28 = 0$, *y resulta equivalente a*

$$(y-2)^2 = 4(x-6). \tag{21}$$

Por lo tanto $\mathcal{L}$ *también está descripto por esta ecuación que, como vimos, describe una parábola.*

Dado que el término cuadrático acompaña la «y», podemos afirmar que la directriz d de esta parábola es vertical. Por otro lado, (21) está expuesta como ecuación canónica y no posee el signo menos, por lo tanto las ramas de la parábola se orientan hacia la derecha. O dicho de otra manera, el foco se encuentra a la derecha de la directriz d. Por último vemos que el vértice de la parábola es $V(6,2)$ *y* $p = 2$.

Con todos estos elementos, podemos determinar que el foco tiene coordenadas $F(7,2)$ *y la directriz es la recta de ecuación* $x = 5$. *¡¡Grafiquemos esta parábola!!*



Tal como lo hicimos con las otras secciones cónicas estudiadas en el capítulo, estudiaremos que las parábolas pueden ser descriptas por ecuaciones de segundo grado en las variables x e y. En efecto, las ecuaciones antes vistas permiten ver que, idependientemente de si su directriz es paralela al eje x o eje y, entonces su ecuación es equivalente a una ecuación de segundo grado:

$$\begin{aligned}
(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0) \quad &\rightsquigarrow \quad x^2 - 2x_0x - 2py + \left(x_0^2 - 2py_0\right) = 0\\
(x-x_0)^2 = -2p(y-y_0) \quad &\rightsquigarrow \quad x^2 - 2x_0x + 2py + \left(x_0^2 + 2py_0\right) = 0\\
(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0) \quad &\rightsquigarrow \quad y^2 - 2y_0y - 2px + \left(y_0^2 - 2px_0\right) = 0\\
(y-y_0)^2 = -2p(x-x_0) \quad &\rightsquigarrow \quad y^2 - 2y_0y + 2px + \left(y_0^2 + 2px_0\right) = 0
\end{aligned}$$

Observar que ambas ecuaciones cuadráticas tienen $B = 0$, es decir, no aparece el término rectangular «xy». En algunos casos $A = 0$ y $C \neq 0$, en otros es $C = 0$ y $A \neq 0$; resumimos esto como: $AC = 0$ siempre que la ecuación sea una parábola.

¿¿Será verdad que toda ecuación cuadrática con $B = 0$ y $AC = 0$ describa una parábola?? El siguiente ejemplo es bien sencillo y muestra que la respuesta a esta pregunta es negativa.

Sea $\mathcal{L} = \{P(x,y) : x^2 = 0\}$. Notemos que la ecuación $x^2 = 0$ es cuadrática con $A = 1$, $B = C = D = E = F = 0$; en particular $AC = 0$. Sin embargo, las únicas soluciones son los valores (x,y) tal que $x = 0$. Luego $\mathcal{L}$ es la recta $x = 0$, que claramente, **no es una parábola**.

Para finalizar la unidad, se presenta, a modo de resumen, un cuadro con las ecuaciones cartesianas estudiadas y los elementos característicos de cada sección cónica.

CÓNICA	Parámetros	Ecuación	Elementos característicos
Circunferencia de radio $r > 0$ y centro $C(x_0, y_0)$	r	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$	Radio y centro.
Elipse de focos F_1 y F_2 y distancia $2a$ $(2a > d(F_1, F_2))$.	$c = \frac{1}{2}d(F_1, F_2)$, $b = \sqrt{a^2 - c^2} > 0$, $a > b$, $a > c$, $\epsilon = \frac{c}{a}$, $0 < \epsilon < 1$.	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ eje focal $\parallel$ eje x $\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$ eje focal $\parallel$ eje y	Centro, focos, vértices.
Hipérbola de focos F_1 y F_2 y distancia $2a$ $(2a < d(F_1, F_2))$.	$c = \frac{1}{2}d(F_1, F_2)$, $b = \sqrt{c^2 - a^2} > 0$, $c > b$, $c > a$, $\epsilon = \frac{c}{a}$, $\epsilon > 1$.	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ eje focal $\parallel$ eje x $-\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$ eje focal $\parallel$ eje y	Centro, focos, vértices, asíntotas
Parábola de foco F y directriz d, $F \notin d$.	$p = d(F, d) > 0$	$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ eje focal $\parallel$ eje x, foco encima de la directriz. $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$ eje focal $\parallel$ eje x, foco debajo de la directriz. $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ eje focal $\parallel$ eje y, foco a la derecha de la directriz. $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$ eje focal $\parallel$ eje y, foco a la izquierda de la directriz.	Foco, directriz, vértice.