



Unidad 4: Estudio de la ecuación general de segundo grado

1. INTRODUCCIÓN

Comenzamos esta unidad recordando la definición de la ecuación general de segundo grado.

Definición 1. . *Un ecuación de segundo grado en las variables x e y es una expresión de la forma*

$$(1) \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ donde } A, B \text{ y } C \text{ no son simultáneamente nulos.}$$

Es decir, al menos uno de los valores A , B o C es distinto de cero.

En una ecuación cuadrática como (1), el término Bxy se llama *término rectangular* de la ecuación. En esta unidad estudiaremos qué lugares geométricos pueden ser descriptos por una ecuación *general* de segundo grado. Es decir, dados números A , B , C , D , E y F donde los tres primeros no son simultáneamente nulos, estudiaremos en función de esos números, cuál es el lugar geométrico $\mathcal{L}$ definido por:

$$\mathcal{L} = \{P(x, y) : Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\}.$$

Ya vimos en la unidad anterior que toda circunferencia, toda elipse, toda hipérbola y toda parábola (las tres últimas con ejes focales o directriz paralelas a los ejes coordenados) pueden ser descriptas por una ecuación de segundo grado.

Hemos visto que la ecuación canónica o cartesiana de las cónicas estudiadas en la unidad anterior es posible escribirla de la forma (1) distribuyendo los cuadrados y «acomodando» los términos de un lado de la igualdad, dejando 0 del otro. En el próximo cuadro se presenta cada ecuación canónica y los coeficientes que se obtienen al distribuirla como lo hecho en el ejemplo anterior. Se sugiere al lector corroborar los coeficientes dados en la tabla.

Cónica	Ec. Canónica	$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$	Obs. ($B = 0$)
Circunferencia	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$	$A = C = 1, B = 0;$ $D = -2x_0, E = -2y_0, F = x_0^2 + y_0^2 - r^2.$	$A = C$
Elipse	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	$A = \frac{1}{a^2}, B = 0; C = \frac{1}{b^2}$ $D = \frac{-2x_0}{a^2}, E = \frac{-2y_0}{b^2}, F = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1.$	$A \cdot C > 0$
Elipse	$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$	$A = \frac{1}{b^2}, B = 0; C = \frac{1}{a^2}$ $D = \frac{-2x_0}{b^2}, E = \frac{-2y_0}{a^2}, F = \frac{x_0^2}{b^2} + \frac{y_0^2}{a^2} - 1.$	$A \cdot C > 0$
Hipérbola	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	$A = \frac{1}{a^2}, B = 0; C = -\frac{1}{b^2}$ $D = \frac{-2x_0}{a^2}, E = \frac{2y_0}{b^2}, F = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 1.$	$A \cdot C < 0$
Hipérbola	$-\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$	$A = -\frac{1}{b^2}, B = 0; C = \frac{1}{a^2}$ $D = \frac{2x_0}{b^2}, E = -\frac{2y_0}{a^2}, F = -\frac{x_0^2}{b^2} + \frac{y_0^2}{a^2} - 1.$	$A \cdot C < 0$
Parábola	$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$	$A = 1, B = C = 0$ $D = -2x_0, E = -2p, F = x_0^2 + 2py_0.$	$A \cdot C = 0$
Parábola	$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$	$A = 1, B = C = 0$ $D = -2x_0, E = 2p, F = x_0^2 - 2py_0.$	$A \cdot C = 0$
Parábola	$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$	$A = B = 0, C = 1$ $D = -2p, E = -2y_0, F = y_0^2 + 2px_0.$	$A \cdot C = 0$
Parábola	$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$	$A = B = 0, C = 1$ $D = 2p, E = -2y_0, F = y_0^2 - 2px_0.$	$A \cdot C = 0$

Notar que en cada uno de los casos las ecuaciones cuadráticas resultantes **NO** tienen término rectangular, es decir $B = 0$. Ésto, veremos más adelante, se relaciona con el hecho que siempre los ejes de las elipses e hipérbolas y las directrices de las parábolas estudiadas en la unidad anterior son paralelos a los ejes coordenados.

A continuación definimos el «tipo» de una ecuación general de segundo grado.

Definición 2. Una ecuación de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

se dice de tipo elíptico si $AC - \frac{B^2}{4} > 0$, de tipo hiperbólico si $AC - \frac{B^2}{4} < 0$ y de tipo parabólico si $AC - \frac{B^2}{4} = 0$.

Observación 3. Cuando una ecuación de segundo grado no tiene término rectangular, es decir $B = 0$, entonces el «tipo» de la ecuación, depende del signo del número $A \cdot C$, o de si es cero.

Del cuadro de arriba se deduce que las ecuaciones de segundo grado que describen las circunferencias y las elipses son de tipo elíptico; las ecuaciones que describen las hipérbolas son de tipo hiperbólico y las ecuaciones que describen las parábolas son de tipo parabólico. Podemos deducir entonces que no es casual el nombre elegido para los tipos de ecuación.

Sin embargo no es verdad que toda ecuación de tipo elíptico describa una elipse o circunferencia; no es verdad que toda ecuación de tipo hiperbólico describe una hipérbola y tampoco es verdad que toda ecuación de tipo parabólico describe una parábola. Veamos con cuidado los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4. La ecuación $x^2 + y^2 + 5 = 0$ es de segundo grado de tipo elíptico y el lugar geométrico que define es el conjunto vacío.

En efecto, esta ecuación tiene como coeficientes $A = C = 1$, $B = D = E = 0$ y $F = 5$ y por lo tanto $AC - \frac{B^2}{4} = 1 \cdot 1 - 0/4 = 1 > 0$. Por otro lado, sea

$$\mathcal{L} = \{P(x, y) : x^2 + y^2 + 5 = 0\}.$$

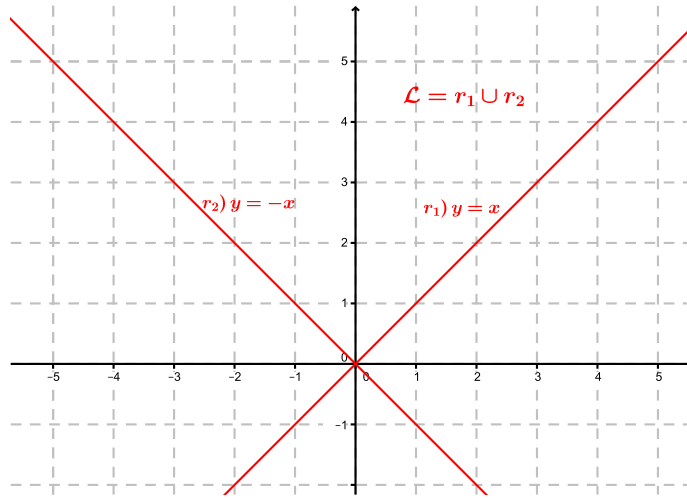
Es claro que $\mathcal{L} = \emptyset$, pues el número $x^2 + y^2 + 5$ es positivo para cualquier punto $P(x, y)$ (observar que $x^2 + y^2$ un número mayor o igual que cero y al sumarle 5, resulta $x^2 + y^2 + 5$ un número estrictamente positivo y por lo tanto nunca cero).

Ejemplo 5. La ecuación $x^2 - y^2 = 0$ es de segundo grado de tipo hiperbólico y el lugar geométrico que define son dos rectas que se intersectan en un punto.

Nuevamente llamamos $\mathcal{L}$ al lugar geométrico definido por esta ecuación. Los coeficientes de esta ecuación son $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$ y $E = F = 0$; por lo tanto $A \cdot C - \frac{B^2}{4} = 1 \cdot (-1) - 0/4 < 0$ y es de tipo hiperbólico.

$$(2) \quad x^2 - y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad (y = x \text{ o bien } y = -x).$$

Es decir un punto $P(x, y) \in \mathcal{L}$ si y sólo si sus coordenadas satisfacen $y = x$ o bien $y = -x$. Estas dos últimas ecuaciones definen dos rectas que pasan por el origen y con pendientes 1 y -1 respectivamente. La gráfica a continuación presenta el lugar geométrico $\mathcal{L}$:



Ejemplo 6. La ecuación $x^2 = 0$ es de segundo grado de tipo parabólico y el lugar geométrico que define es una recta.

En esta ecuación los coeficientes son $A = 1$, $B = C = D = E = F = 0$ por lo tanto $AC - \frac{B^2}{4} = 1 \cdot 0 - 0/4 = 0$ y es de tipo parabólico. Los únicos puntos $P(x, y)$ que satisfacen $x^2 = 0$ son aquellos que tienen $x = 0$, pudiendo tomar y cualquier valor. Luego, el lugar geométrico definido por esta ecuación parabólica es la recta $r) x = 0$.

Concluimos entonces que dada una ecuación de segundo grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, el lugar geométrico que ella describe puede ser una circunferencia, una elipse, una parábola, una hipérbola y también el conjunto vacío o rectas, entre otras cosas. A continuación, estudiamos en detalle las ecuaciones de segundo grado para poder identificar el lugar geométrico que ella determina a partir de sus coeficientes.

2. ESTUDIO DE LA ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

2.1. Ecuaciones de segundo grado sin término rectangular. Por simplicidad comenzamos estudiando las ecuaciones sin término rectangular. Es decir aquellas de la forma

$$(3) \quad Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{donde } A \text{ y } C \text{ no son simultáneamente nulos.}$$

Observemos que esta ecuación es de tipo elíptico si $AC > 0$, de tipo hiperbólico si $AC < 0$ y de tipo parabólico si $AC = 0$. Escrito de otra manera:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{es de tipo} \quad \begin{cases} \text{elíptico,} & \text{si } A \text{ y } C \text{ tienen igual signo,} \\ \text{hiperbólico,} & \text{si } A \text{ y } C \text{ tienen distinto signo,} \\ \text{parabólico,} & \text{si alguno entre } A \text{ o } C \text{ es cero.} \end{cases}$$

Analizaremos los lugares geométricos que se obtienen según el tipo de la ecuación.

2.1.1. Tipo elíptico. Sea la ecuación

$$(4) \quad Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{donde } A \text{ y } C \text{ son no nulos y tienen igual signo.}$$

Podemos trabajar la ecuación de segundo grado llegando a una equivalente:

$$\begin{aligned} Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F &= A\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) + C\left(y^2 + \frac{E}{C}y\right) + F \\ &= A\left(x^2 + 2\frac{D}{2A}x + \left(\frac{D}{2A}\right)^2 - \left(\frac{D}{2A}\right)^2\right) + C\left(y^2 + 2\frac{E}{2C}y + \left(\frac{E}{2C}\right)^2 - \left(\frac{E}{2C}\right)^2\right) + F \\ &= A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 + F - \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C}. \end{aligned}$$

Si $F - \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C} = 0$, entonces la ecuación (4) es equivalente a

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = 0.$$

Como A y C son distintos de cero y tienen igual signo, esta ecuación tiene única solución $x = -\frac{D}{2A}$ e $y = -\frac{E}{2C}$.

Si $F - \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C} \neq 0$, denotamos $\mu = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$ y la ecuación (4) es equivalente a

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{1}{A}\mu} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{1}{C}\mu} = 1.$$

Notar que μ/A y μ/C tienen igual signo. Esta ecuación no tiene solución si μ/A y μ/C son ambos negativos. Por otro lado, esta ecuación define una elipse si μ/A y μ/C son positivos y distintos; ésta tendrá eje focal vertical u horizontal dependiendo de si $\mu/A > \mu/C$ o $\mu/A < \mu/C$. En caso que $\mu/A = \mu/C > 0$, la ecuación describe una circunferencia.

Conclusión: si $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es de tipo elíptico, entonces el lugar geométrico que describe es uno de los siguientes:

- el conjunto vacío,
- un punto,
- una elipse,
- una circunferencia.

Ejercicio 7. Dar una ecuación de segundo grado de tipo elíptico tal que el lugar geométrico que describa sea el conjunto vacío. Reptir el ejercicio para cada uno de los casos en la lista de arriba.

2.1.2. Tipo hiperbólico. Sea la ecuación

$$(5) \quad Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{donde } A \text{ y } C \text{ son no nulos y tienen distinto signo.}$$

Trabajando la ecuación de manera análoga a lo hecho en el tipo elíptico, llegamos a que esta ecuación es equivalente a:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \Leftrightarrow A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F.$$

Si $F - \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C} = 0$, entonces la ecuación (4) es equivalente a

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = 0, \quad \text{o bien} \quad -\frac{A}{C}\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = \left(y + \frac{E}{2C}\right)^2;$$

pero ahora A y C tienen signos diferentes y por lo tanto $-\frac{A}{C}$ es un número positivo. Son soluciones de esta ecuación, todos los valores (x, y) tal que

$$\sqrt{-\frac{A}{C}}\left(x + \frac{D}{2A}\right) = \left(y + \frac{E}{2C}\right) \quad \text{o} \quad \sqrt{-\frac{A}{C}}\left(x + \frac{D}{2A}\right) = -\left(y + \frac{E}{2C}\right)$$

Es decir, el lugar geométrico definido por la ecuación (5) es una unión de dos rectas cuyas ecuaciones son:

$$r_1) \sqrt{-\frac{A}{C}}x - y + \sqrt{-\frac{A}{C}}\frac{D}{2A} - \frac{E}{2C} = 0; \quad r_2) \sqrt{-\frac{A}{C}}x + y + \sqrt{-\frac{A}{C}}\frac{D}{2A} + \frac{E}{2C} = 0.$$

Notar que el punto $(-D/2A, -E/2C)$ pertenece a ambas rectas, por lo tanto r_1 y r_2 son secantes.

Por el contrario, si $F - \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C} \neq 0$, denotamos $\mu = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$ y la ecuación (5) es equivalente a

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{1}{A}\mu} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{1}{C}\mu} = 1.$$

Notar que μ/A y μ/C tienen diferente signo. Entonces siempre describe una hipérbola y su eje focal es horizontal o vertical según sea $\mu/A > 0$ y $\mu/C < 0$ o viceversa.

Conclusión: si $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es de tipo hiperbólico, entonces el lugar geométrico que describe es uno de los siguientes:

- dos rectas que se cortan,
- una hipérbola.

Ejercicio 8. Dar una ecuación de segundo grado de tipo hiperbólico tal que el lugar geométrico que describa sea dos rectas secantes. Reptir el ejercicio para una hipérbola.

2.1.3. *Tipo parabólico.* Sea la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{donde } A \text{ o } C \text{ son cero (no ambos al mismo tiempo).}$$

Vamos a suponer primero que $C = 0$, entonces la ecuación a estudiar es:

$$(6) \quad Ax^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

y sea $\mathcal{L} = \{P(x, y) : Ax^2 + Dx + Ey + F = 0\}$. Es claro que si $E = 0$, entonces esta ecuación se traduce en una ecuación cuadrática en x : $Ax^2 + Dx + F = 0$. Esta cuadrática tiene a lo sumo dos soluciones reales. Si no tiene soluciones reales, entonces $\mathcal{L}$ es el conjunto vacío; si esta cuadrática tiene una única solución x_0 , entonces el lugar geométrico es $\mathcal{L} = \{P(x_0, y) : y \in \mathbb{R}\}$, una recta paralela a la eje y ; por último, si la cuadrática tiene dos soluciones x_0, x'_0 , el lugar geométrico definido por (6) es $\mathcal{L} = \{P(x_0, y) : y \in \mathbb{R}\} \cup \{P(x'_0, y) : y \in \mathbb{R}\}$: la unión de dos rectas paralelas al eje y .

Cuando $E \neq 0$, podemos escribir la ecuación (6) de la siguiente manera:

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = 2 \cdot \left(-\frac{E}{2A}\right) \cdot \left(y - \frac{D^2}{4AE} + \frac{F}{E}\right).$$

Es fácil ver que esta ecuación describe una parábola con directriz paralela al eje x . Sus ramas serán hacia arriba o hacia abajo según el signo de $\frac{E}{2A}$.

Queda como ejercicio para el lector, trabajar la ecuación (6) en el caso que $A = 0$. Es claro que el razonamiento será análogo al hecho recién, sólo que aparecen en este caso parábolas con directriz vertical y rectas paralelas al eje x .

Conclusión: si $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es de tipo parabólico, entonces el lugar geométrico que describe es uno de los siguientes:

- el conjunto vacío,
- una recta,
- dos rectas paralelas,
- una parábola.

Ejercicio 9. *Dar una ecuación de segundo grado de tipo parabólico tal que el lugar geométrico que describa sea el conjunto vacío. Reptir el ejercicio para cada uno de los casos en la lista de arriba.*

2.1.4. *Observaciones finales y ejemplos.* Es importante estudiar y recordar qué lugares geométricos surgen de cada tipo de ecuación (resumido en las conclusiones al final de cada caso). Al momento de enfrentarse con un ejercicio, se debe proceder completando cuadrados e interpretando el resultado, según el tipo de la ecuación. A continuación resolvemos algunos ejercicios a modo de ejemplo.

Ejemplo 10. *Determinar el lugar geométrico $\mathcal{L}$ que describe la siguiente ecuación:*

$$x^2 - 9y^2 - 6x + 9 = 0.$$

Los coeficientes principales de esta cuadrática son $A = 1$, $B = 0$ y $C = -9$ por lo tanto es de tipo hiperbólico. Ya sabemos que el lugar geométrico que ella determina es o bien una hipérbola o bien un par de rectas que se cortan.

Trabajamos la expresión de la ecuación completando cuadrados: $x^2 - 9y^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 - 9y^2$ por lo tanto $\mathcal{L}$ está descrito por la ecuación $(x - 3)^2 = 9y^2$. Los valores (x, y) que satisfacen esta ecuación son aquellos que

$$x - 3 = 3y \quad \text{o bien} \quad x - 3 = -3y,$$

por lo tanto $\mathcal{L}$ es la unión de dos rectas de ecuaciones $r_1) x - 3y - 3 = 0$ y $r_2) x + 3y - 3 = 0$ que se cortan en el punto $(3, 0)$.

Ejemplo 11. *Determinar el lugar geométrico $\mathcal{L}$ que describe la siguiente ecuación:*

$$2x^2 + 3y^2 + 4x - 30y + 71 = 0.$$

Los coeficientes principales de esta cuadrática son $A = 2$, $B = 0$ y $C = 3$ por lo tanto es de tipo elíptico. Ya sabemos que el lugar geométrico que ella determina es o bien el conjunto vacío, o un punto, o una elipse, o una circunferencia. Es importante reflexionar sobre estas posibilidades pues nos permitirán evitar futuros errores.

Trabajamos la expresión de la ecuación completando cuadrados: $2x^2 + 3y^2 + 4x - 30y + 71 = 2(x+1)^2 + 3(y-5)^2 - 6$ por lo tanto $\mathcal{L}$ está descripto por la ecuación

$$\frac{(x+1)^2}{3} + \frac{(y-5)^2}{2} = 1.$$

Luego $\mathcal{L}$ es una elipse de con eje focal horizontal ($3 > 2$), y centro $C(-1, 5)$. Los parámetros a y b se ven de esta ecuación y son: $a = \sqrt{3}$ y $b = \sqrt{2}$; por lo tanto $c = 1$. Luego los focos son los puntos $F_1(-2, 5)$ y $F_2(0, 5)$.

Ejemplo 12. Determinar el lugar geométrico $\mathcal{L}$ que describe la siguiente ecuación:

$$4y^2 + 3x - 8y + 4 = 0.$$

Los coeficientes principales de esta cuadrática son $A = B = 0$ y $C = 4$ por lo tanto es de tipo parabólico. Ya sabemos que el lugar geométrico que ella determina es o bien el conjunto vacío, o una recta, o dos rectas paralelas o una parábola.

Completamos cuadrados en la ecuación que define a $\mathcal{L}$: $4y^2 + 3x - 8y + 4 = 4(y-1)^2 + 3x$ por lo tanto $\mathcal{L}$ está descripto por la ecuación

$$(y-1)^2 = -\frac{3}{4}x.$$

Luego $\mathcal{L}$ es una parábola de vértice $V(0, 1)$ y directriz paralela al eje y . Además $p = 3/8$ y el foco se encuentra a la izquierda de la directriz; el foco es $F(-3/8, 1)$ y la directriz es la recta de ecuación $d) x = 3/8$.

Invitamos al lector a revisar los ejemplos 4, 5 y 6 comparando los lugares geométricos obtenidos con los tipos de ecuación, teniendo en cuenta la clasificación hecha arriba de los lugares geométricos que se obtiene para cada tipo.

2.2. Ecuación general de segundo grado. Hemos preparado toda la teoría para ahora sí enfrentarnos al caso más «difícil» del estudio de una ecuación general de segundo grado

$$(7) \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

donde el término rectangular es no nulo: $B \neq 0$.

Sea $\mathcal{L}$ el lugar geométrico de los puntos P del plano descriptos por esta ecuación. Es decir:

$$\mathcal{L} = \{P(x, y) : Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\}.$$

Veremos que los lugares geométricos $\mathcal{L}$ que se describen por una ecuación de esta forma *general* son los mismos que en el caso $B = 0$, sólo que las cónicas obtenidas no tienen sus ejes paralelos a los ejes coordenados. Por lo tanto, debemos trabajar con cambio de coordenadas por rotación (en caso de no tenerlos bien frescos en la memoria, se sugiere repasarlos antes de continuar la lectura de este apunte).

Dada la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $B \neq 0$ definimos un ángulo $\theta \in [0, \pi/2)$ de la siguiente manera:

- $\theta = \pi/4$ si $A = C$.
- θ tal que $\tan(2\theta) = \frac{B}{A-C}$.

Consideramos el cambio de coordenadas que se obtiene de rotar los ejes un ángulo θ . Es decir, sea $\{O, \vec{i}', \vec{j}'\}$ el sistema coordenado obtenido al rotar un ángulo θ el sistema canónico $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$. Las coordenadas (x', y') de un punto P en el sistema $\{O, \vec{i}', \vec{j}'\}$ se relacionan con las sus coordenadas (x, y) en el sistema $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ de la siguiente manera:

$$(8) \quad \begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$

Reemplazamos las coordenadas x e y en la ecuación (7) y obtenemos

$$(9) \quad \begin{aligned} & A(x' \cos \theta - y' \sin \theta)^2 + B(x' \cos \theta - y' \sin \theta)(x' \sin \theta + y' \cos \theta) + \\ & C(x' \sin \theta + y' \cos \theta)^2 + D(x' \cos \theta - y' \sin \theta) + E(x' \sin \theta + y' \cos \theta) + F = 0 \end{aligned}$$

Esta es una ecuación de segundo grado en las variables x' e y' que tiene la forma $A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ y los coeficientes A' , B' , C' , etc.. se obtienen distribuyendo la expresión de arriba.

Es importante además que el lugar geométrico definido por la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ en el sistema $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ es el mismo que el definido por la ecuación $A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ en el sistema $\{O', \vec{i}', \vec{j}'\}$. Es decir el lugar geométrico $\mathcal{L}$ también se describe como:

$$\mathcal{L} = \{P(x', y') : A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0\}.$$

Es fácil ver que los coeficientes A' , B' y C' de la ecuación (9) son

$$(10) \quad \begin{aligned} A' &= A \cos^2 \theta + B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta \\ B' &= B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2(C - A) \cos \theta \sin \theta = B \cos(2\theta) + (C - A) \sin(2\theta). \\ C' &= A \sin^2 \theta - B \cos \theta \sin \theta + C \cos^2 \theta \end{aligned}$$

Veremos que el coeficiente B' es siempre cero por la manera en que elegimos el ángulo θ .

En el caso que $A = C$, tomamos $\theta = \pi/4$ y por lo tanto $\cos(2\theta) = \cos(\pi/2) = 0$ y la expresión de arriba de B' , implica $B' = 0$.

Por otro lado, si $A \neq C$, entonces θ es tal que $\tan(2\theta) = B/(A - C)$ y por lo tanto $B = (A - C) \sin(2\theta) / \cos(2\theta)$. Luego

$$B' = B \cos(2\theta) + (C - A) \sin(2\theta) = (A - C) \sin(2\theta) + (C - A) \sin(2\theta) = 0.$$

En cualquier caso $B' = 0$, como queríamos probar.

Concluimos entonces que $\mathcal{L}$ está descrito por la ecuación de segundo grado $A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ en el sistema $\{O, \vec{i}', \vec{j}'\}$, **SIN** término rectangular. Sabemos de la Sección 2.1. que el lugar geométrico que describe una ecuación de segundo grado sin término rectangular es una hipérbola, una parábola, una elipse, una circunferencia, una recta, un par de rectas paralelas, un par de rectas secantes o el conjunto vacío.

Observación 13. Es posible probar que los coeficientes en A' y C' que se expresan en (10) verifican

$$A' \cdot C' = A \cdot C - \frac{B^2}{4}.$$

Es decir, las ecuaciones de segundo grado

$$\begin{aligned} A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' &= 0 \quad y \\ Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F &= 0 \end{aligned}$$

son ecuaciones de igual tipo. Esto indica que si empezamos trabajando con la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ que es, por ejemplo, de tipo hiperbólico ya podemos asegurar que $A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ es de tipo hiperbólico y por lo tanto describe una hipérbola con eje focal paralelo al eje x' o y' , o bien dos rectas secantes.

Observación 14. Cuando en la ecuación cuadrática $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ se tiene $B \neq 0$ y $A \neq C$ el cálculo del ángulo θ determinado por $\tan(2\theta) = \frac{B}{A-C}$ debe hacerse de manera exacta y no aproximada. Para ello, utilizaremos las fórmulas a continuación:

$$(11) \quad \begin{aligned} \cos^2(2\theta) &= \frac{1}{1 + \tan^2(2\theta)} \quad y \quad \text{signo}(\cos(2\theta)) = \text{signo}(\tan(2\theta)) \\ \sin^2 \theta &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)) \\ \cos^2 \theta &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta)) \end{aligned}$$

Ejemplo 15. Determinar el lugar geométrico $\mathcal{L}$ descrito por la ecuación

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2y - 1 = 0.$$

Esta ecuación cuadrática tiene coeficientes $A = C = 1$ y $B = -2$. Como $AC - \frac{B^2}{4} = 1 \cdot 1 - (-2)^2/4 = 0$ esta ecuación es de tipo parabólico y por lo tanto es el conjunto vacío, o una recta, o dos rectas paralelas, o una parábola.

Para determinar cuál de estos cuatro posibles lugares geométricos es $\mathcal{L}$, realizamos el cambio de coordenadas por rotación con $\theta = \pi/4$ (notar que $A = C = 1$).

El cambio de coordenadas relaciona las coordenadas (x, y) con (x', y') de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x = x' \frac{\sqrt{2}}{2} - y' \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = x' \frac{\sqrt{2}}{2} + y' \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \quad \text{escrito de otra manera:} \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}.$$

Con esta información armamos la ecuación cuadrática en el nuevo sistema (x', y') :

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 + 2y - 1 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \right)^2 - 2 \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \right)^2 + 2 \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') - 1 \\ (12) \quad &= 2(y')^2 + \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' - 1 \\ &= \left(y' + \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x' - \frac{5}{8}\sqrt{2} \right) \end{aligned}$$

El lugar geométrico $\mathcal{L}$ queda determinado por aquellos puntos P de coordenadas (x', y') en el sistema $\{O, \vec{i}', \vec{j}'\}$, que satisfacen la ecuación

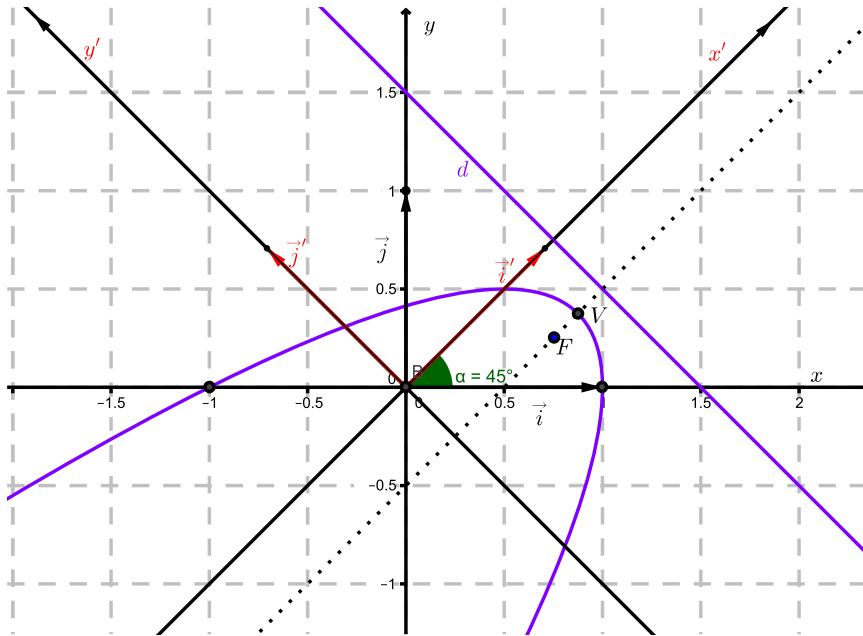
$$\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(x' - \frac{5}{8}\sqrt{2} \right).$$

Es sencillo ver que esta ecuación define una parábola con directriz paralela al eje coordenado y' con $p = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Además el vértice tiene coordenadas $V(\frac{5}{8}\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4})$ en el sistema $\{O, \vec{i}', \vec{j}'\}$ y el foco F se encuentra a la izquierda de la directriz. Las coordenadas del foco son $F(\frac{5}{8}\sqrt{2} - \frac{p}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}) = F(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4})$ y la directriz tiene ecuación $d) x' = \frac{5}{8}\sqrt{2} + \frac{p}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$.

A continuación graficamos esta situación. Para localizar el vértice V puede ser conveniente encontrar sus coordenadas en el sistema original $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$. Para ello usamos las ecuaciones

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}, \quad y \quad \begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) \end{cases}.$$

Utilizando las primeras, obtenemos que V tiene coordenadas $(\frac{7}{8}, \frac{3}{8})$ y el foco F tiene coordenadas $F(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ en el sistema $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$. Por medio de las segundas ecuaciones obtenemos que la recta directriz tiene ecuación $d) \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{3}{4} = 0$.



Ejemplo 16. Determinar el lugar geométrico $\mathcal{L}$ descrito por la ecuación

$$4xy + 3y^2 + 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y = 0$$

Esta ecuación cuadrática tiene coeficientes $A = 0$, $B = 4$ y $C = 3$. Como $AC - \frac{B^2}{4} = -4 < 0$, esta ecuación es de tipo hiperbólico y por lo tanto el lugar geométrico que determina es un par de rectas secantes o bien una hipérbola.

Para determinar cuál de estos dos posibles lugares geométricos es $\mathcal{L}$ y graficarlo, realizamos un cambio de coordenadas por rotación de un ángulo θ . Como $A \neq C$, elegimos θ tal que

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A - C} = -\frac{4}{3}$$

Observemos que $\theta \simeq 63^\circ 26' 5,82''$, pero NO nos sirve un valor aproximado. Utilizamos las ecuaciones (11) para obtener:

$$\cos^2(2\theta) = \frac{9}{25}, \quad \cos(2\theta) < 0 \Rightarrow \cos(2\theta) = -\frac{3}{5}$$

y por lo tanto

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

El cambio de coordenadas relaciona las coordenadas (x, y) con (x', y') de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x = x' \frac{1}{\sqrt{5}} - y' \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') \\ y = x' \frac{2}{\sqrt{5}} + y' \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \end{cases}.$$

Con esta información armamos la ecuación cuadrática que describe a $\mathcal{L}$ en el sistema (x', y') :

$$\begin{aligned} 4xy + 3y^2 + 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y &= 4 \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') + 3 \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \right)^2 + \\ &\quad 2\sqrt{5} \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') + 4\sqrt{5} \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \\ &= 4(x')^2 - (y')^2 + 10x'. \\ &= 4 \left(x' + \frac{5}{4} \right)^2 - (y')^2 - \frac{25}{4}. \end{aligned}$$

El lugar geométrico $\mathcal{L}$ queda determinado por aquellos punto P de coordenadas (x', y') en el sistema $\{O, \vec{i}', \vec{j}'\}$ que satisfacen la ecuación

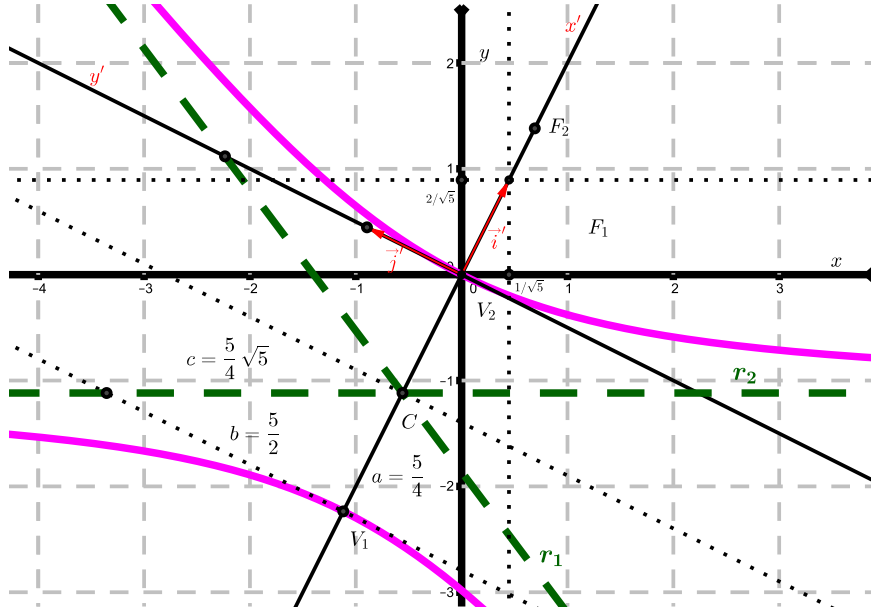
$$\frac{\left(x' + \frac{5}{4}\right)^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} - \frac{(y')^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = 1.$$

Es sencillo ver que esta ecuación define una hipérbola con eje focal paralelo al eje x' . Su centro C tiene coordenadas $(-\frac{5}{4}, 0)$ en el sistema rotado (o primado), luego su eje focal es justamente el eje x' . Los parámetros de la hipérbola son $a = \frac{5}{4}$ y $b = \frac{5}{2}$ por lo tanto $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{5}{4}\sqrt{5}$. Deducimos de esto que sus focos son $F_1(-\frac{5}{4} - c, 0)$ y $F_2(-\frac{5}{4} + c, 0)$: $F_1(\frac{5}{4}(-1 - \sqrt{5}), 0)$ $F_2(\frac{5}{4}(-1 + \sqrt{5}), 0)$. Los vértices son $V_1(-\frac{5}{4} - a, 0)$ y $V_2(-\frac{5}{4} + a, 0)$: $V_1(-\frac{5}{2}, 0)$ y $V_2(0, 0)$; es decir, el origen de coordenadas (de ambos sistemas) es un punto de la hipérbola, más aún, es un vértice de la misma. Observar que todas las coordenadas dadas en este párrafo son relativas al sistema primado.

Las ecuaciones de las asíntotas en este mismo sistema son:

$$\begin{aligned} r_1) y' &= \frac{b}{a}(x' - x'_0) + y'_0 \rightsquigarrow r_1) y' = 2(x' + \frac{5}{4}) \rightsquigarrow r_1) 2x' - y' + \frac{5}{2} = 0; \\ r_2) y' &= -\frac{b}{a}(x' - x'_0) + y'_0 \rightsquigarrow r_2) y' = -2(x' + \frac{5}{4}) \rightsquigarrow r_2) 2x' + y' + \frac{5}{2} = 0. \end{aligned}$$

Para realizar su gráfica, primero graficamos los nuevos ejes. De nuevo, no intentamos calcular θ explícitamente, nos basta conocer su seno y su coseno. En efecto, observemos que el versor $\vec{i}' = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$, o sea que tiene componentes $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ en el sistema $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$.



Usando las ecuaciones

$$\begin{cases} x = x' \frac{1}{\sqrt{5}} - y' \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') \\ y = x' \frac{2}{\sqrt{5}} + y' \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} x' = x \frac{1}{\sqrt{5}} + y \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) \\ y' = -x \frac{2}{\sqrt{5}} + y \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y) \end{cases}$$

podemos ver que en el sistema canónico $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ se tienen las siguientes coordenadas de los puntos: $C(-\frac{5}{4\sqrt{5}}, -\frac{5}{4\sqrt{5}})$, $F_1(-\frac{5}{4\sqrt{5}}(1 + \sqrt{5}), -\frac{5}{2\sqrt{5}}(1 + \sqrt{5}))$, $F_2(\frac{5}{4\sqrt{5}}(\sqrt{5} - 1), \frac{5}{2\sqrt{5}}(\sqrt{5} - 1))$, $V_1(\frac{5}{2\sqrt{5}}, -\frac{5}{\sqrt{5}})$, $V_2(0, 0)$. Además las ecuaciones de las asíntotas son: $r_1) 4x + 3y + \frac{5\sqrt{5}}{2} = 0$ y $r_2) y = -\frac{5}{2\sqrt{5}}$. Notar que r_2 es paralela al eje x , como se ve en el dibujo.