Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

Álgebra y Geometría Analítica I

Licenciatura en Fisica - Año 2015

Apunte de teoría N°1: **Descomposición de vectores en el espacio**

Con los vectores del espacio es posible efectuar un estudio análogo al hecho para vectores en el plano. Introduciremos las coordenadas de los mismos en un sistema coordenado dado y usaremos estas coordenadas para escribir las operaciones entre vectores (suma, producto por escalares, producto cartesiano, etc...). Luego introduciremos nuevas propiedades de los vectores.

Consideramos en el espacio un sistema coordenado cartesiano $\{O, \overline{OP_1}, \overline{OP_2}, \overline{OP_3}\}$. Quedan determinados los siguientes versores, llamados, versores canónicos del sistema coordenado: $\vec{i} = \vec{OP_1}$, $\vec{j} = \vec{OP_2}$ y $\vec{k} = \vec{OP_3}$.

Teorema 1. *Dado un vector $\vec{u}$ en el espacio, existen únicos escalares α, β, γ de manera que*

$$\vec{u} = \alpha\ \vec{i} + \beta\ \vec{j} + \gamma\ \vec{k}\ .$$

Demostración. Sea $\vec{u}$ un vector del espacio. Recordar que es válida la siguiente igualdad

$$\vec{u} = proy_{\vec{i}}\ \vec{u} + proy_{\vec{j}}\ \vec{u} + proy_{\vec{k}}\ \vec{u}\ .$$

Además, sabemos que para cualquier vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ resulta $proy_{\vec{v}}\ \vec{u} = (\vec{u} \times \vec{v})\ \vec{v}$, por lo tanto la igualdad anterior se escribe como

$$\vec{u} = (\vec{u} \times \vec{i})\ \vec{i} + (\vec{u} \times \vec{j})\ \vec{j} + (\vec{u} \times \vec{k})\ \vec{k} \tag{1}$$

Definiendo $\alpha = \vec{u} \times \vec{i}$, $\beta = \vec{u} \times \vec{j}$, $\gamma = \vec{u} \times \vec{k}$ la fórmula (1) se reescribe $\vec{u} = \alpha\ \vec{i} + \beta\ \vec{j} + \gamma\ \vec{k}$, como queríamos probar. □

La expresión (1):

$$\vec{u} = (\vec{u} \times \vec{i})\ \vec{i} + (\vec{u} \times \vec{j})\ \vec{j} + (\vec{u} \times \vec{k})\ \vec{k}$$

se llama *descomposición del vector $\vec{u}$ en los versores canónicos* y a los números $\alpha = \vec{u} \times \vec{i}$, $\beta = \vec{u} \times \vec{j}$, $\gamma = \vec{u} \times \vec{k}$ se los denomina *componentes del vector $\vec{u}$ en el sistema coordenado* $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Dado un vector $\vec{u}$ en el espacio de coordenadas α, β, γ en $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, escribimos $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$. De esta manera quedan identificados los vectores del espacio con una terna de números reales de manera biunívoca.

$$\vec{u} \in V_3 \iff (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Análogo a lo que vimos en el plano, un vector $\vec{u}$ tiene coordenadas (α, β, γ) si y sólo si $\vec{u} = \vec{OP}$ donde P es el punto del espacio tal que $P(\alpha, \beta, \gamma)$.

Entonces quedan identificados los puntos del espacio, con las ternas de números reales y a su vez con los vectores del espacio.

$$\vec{u} \in V_3 \iff (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \iff P \text{ punto del espacio.}$$

Operaciones por componentes

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores del espacio con componentes $\vec{u}= (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v}= (x_2, y_2, z_2)$. Entonces el vector suma $\vec{w}=\vec{u} + \vec{v}$ es otro vector del espacio, que tiene componentes y las denotamos $\vec{w}= (x_3, y_3, z_3)$. Nos interesa saber cómo se relacionan las coordenadas (x_3, y_3, z_3) del vector suma $\vec{w}$ y las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. El siguiente teorema describe exactamente esta relación, así como las componentes de otros vectores obtenidos a partir de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ mediante operaciones de vectores.

Teorema 2. *Sean $\vec{u}= (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v}= (x_2, y_2, z_2)$ dos vectores en el espacio y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces*

1. $\vec{u} + \vec{v}= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$,
2. $\lambda\ \vec{u}= (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$,
3. $\vec{u} \times \vec{v}= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Corolario 3. *Sea $\vec{u}= (x, y, z)$ un vector del espacio, entonces*

1. $-\ \vec{u}= (-x, -y, -z)$,
2. $|\ \vec{u}\ | = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Teorema 4. *Dados dos puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ del espacio, el vector $\vec{PQ}$ tiene coordenadas*

$$\vec{PQ}= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

y la distancia entre ellos es $d(P, Q) = |\ \vec{PQ}\ | = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Dados una cantidad finita de vectores del espacio $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_k$, decimos que estos vectores son coplanares si todos ellos pertenecen a un mismo plano del espacio.

Cualesquiera dos vectores no nulos del espacio $\vec{u}, \vec{v}$ son siempre coplanares ya que o bien son colineales o determinan un plano. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son colineales, es decir, uno no es un múltiplo del otro, entonces el plano π que ellos determinan está formado por todos los vectores de la forma $\alpha\ \vec{u} +\beta\ \vec{v}$. Es decir $\pi = \{\alpha\ \vec{u} +\beta\ \vec{v}\colon \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Por otro lado, los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{i} + \vec{j}$ son coplanares pues se encuentran en el plano coordenado xy. Sin embargo tres vectores cualesquiera no siempre son coplanares. Por ejemplo los tres versores canónicos no son coplanares.

Luego, tres vectores en el espacio no siempre pertenecesn a un mismo plano. El siguiente teorema nos brinda una herramienta para determinar si tres vectores dados son o no coplanares.

Teorema 5. *Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ en el espacio son coplanares si y sólo si existen dos números reales α y β tal que $\vec{u}= \alpha\ \vec{v} +\beta\ \vec{w}$.*

Demostración. Ejercicio para el estudiante. □

Ejemplo 6. *Considerar los vectores $\vec{u}= (1, 3, -2)$ $\vec{v}= (-1/2, -3/2, 1)$, $\vec{w}= (0, -1, 4)$, $\vec{s}= (2, 5, -8)$, $\vec{t}= (10, -4, -1)$. Determinaremos entre ellos, algunas ternas de vectores que sean coplanares. Realizando algunas cuentas podemos comprobar que*

- *$\vec{v}= -\frac{1}{2}\ \vec{u}$ y por lo tanto son colineales y coplanares.*
- *$\vec{u}$ y $\vec{w}$ no son coolineales (notar que los cocientes enetre sus dos primeras componentes son $\frac{0}{1} \neq \frac{-1}{3}$). Ellos determinan un plano π que es:*

$$\pi = \{\alpha(1, 3, -2) + \beta(0, -1, 4) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha, 3\alpha - \beta, -2\alpha + 4\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

- *$\vec{s}= 2\ \vec{u} - \vec{w}$, entonces $\vec{u}, \vec{w}$ y $\vec{s}$ son coplanares por el teorema anterior.*

- $\vec{t}$, $\vec{u}$ y $\vec{w}$ *no son coplanares. Si así lo fueran, por el teorema anterior, existen números* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tal que* $\vec{t} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{w}$. *Es decir,* α, β *son soluciones del sistema lineal*

$$\begin{aligned} 10 &= \alpha \\ -4 &= 3\alpha - \beta \\ -1 &= -2\alpha + 4\beta. \end{aligned}$$

Sin embargo, es claro que este sistema no tiene solución. Luego los tres vectores no son coplanares.

Cosenos directores

Definición 7. *Dado un vector no nulo* $\vec{u}$ *en el espacio, se llaman cosenos directores de* $\vec{u}$ *a los números reales* $\cos(\overset{\wedge}{\vec{u}, \vec{i}})$, $\cos(\overset{\wedge}{\vec{u}, \vec{j}})$ *y* $\cos(\overset{\wedge}{\vec{u}, \vec{k}})$.

Si $\vec{u} = (x, y, z) \neq \vec{0}$, entonces los cosenos pueden calcularse usando el producto escalar o las componentes del vector

$$\begin{aligned} \cos(\overset{\wedge}{\vec{u}, \vec{i}}) &= \frac{\vec{u} \times \vec{i}}{|\,\vec{u}\,|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ \cos(\overset{\wedge}{\vec{u}, \vec{j}}) &= \frac{\vec{u} \times \vec{j}}{|\,\vec{u}\,|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ \cos(\overset{\wedge}{\vec{u}, \vec{k}}) &= \frac{\vec{u} \times \vec{k}}{|\,\vec{u}\,|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \end{aligned}$$

Tal como sucede para los vectores en el plano, los cosenos directores de un vector $\vec{u}$ describen su dirección y el sentido de $\vec{u}$. Sin embargo, no describen su módulo. Por ejemplo, los vectores $\vec{u} = (1, 2, -2)$ $\vec{v} = (1/2, 1, -1)$ tienen iguales cosenos directores: $\cos(\overset{\wedge}{\vec{u}, \vec{i}}) = \cos(\overset{\wedge}{\vec{v}, \vec{i}}) = 1/3$, $\cos(\overset{\wedge}{\vec{u}, \vec{j}}) = \cos(\overset{\wedge}{\vec{v}, \vec{k}}) = 2/3$, $\cos(\overset{\wedge}{\vec{u}, \vec{k}}) = \cos(\overset{\wedge}{\vec{v}, \vec{k}}) = -2/3$ pero distintos módulos: $|\,\vec{u}\,| = 3$ mientras que $|\,\vec{v}\,| = 3/2$.

Teorema 8. *Sea* $\vec{u} = (x, y, z)$ *un vector no nuloen el espacio y sean* $a = \cos(\overset{\wedge}{\vec{u}, \vec{i}})$, $b = \cos(\overset{\wedge}{\vec{u}, \vec{j}})$ *y* $c = \cos(\overset{\wedge}{\vec{u}, \vec{k}})$ *sus cosenos directores. Entonces*

1. $\vec{u} = |\,\vec{u}\,|(a, b, c)$,
2. $\vec{u}_0 = (a, b, c)$.
3. *Un vector* $\vec{v}$ *es paralelo a* $\vec{u}$ *y tiene igual sentido si y sólo si los cosenos directores de* $\vec{v}$ *son* a, b, c.

Notar que las coordenadas de un versor coinciden con los cosenos directores del mismo. Además una terna de numeros reales a, b, c son los cosenos directores de un vector $\vec{u}$ del espacio si y sólo si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Proposición 9. *Si* $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *son tres vectores del espacio no nulos y no coplanares, entonces para cualquier vector* $\vec{r}$ *existen únicos números reales* α, β, γ *tal que*

$$\vec{r} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} + \gamma\,\vec{w}\,.$$

Definición 10. *Una base del espacio es un conjunto de tres vectores no nulos y no coplanares.*

Ejemplo 11. 1. *Fijado un sistema coordenado cartesiano* $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, *el conjunto* $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ *es una base del espacio llamada* base canónica. **2.** $\{(2, 1, 1), (1, 0, 1), (-1, -1, 1)\}$ *es una base del espacio.* **3.** $\{(2, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ *no es una base del espacio.*