Se presentan a continuación las respuestas de los ejercicios propuestos en el apunte de Funciones, **corresponde al estudiante "justificar"** cada una de las respuestas de acuerdo a los conocimientos desarrollados.

Funciones

1) a) V **b)** F **c)** F **d)** V **e)** F **f)** F **g)** V **h)** V **i)** F

2) f no es función, al elemento 6 no le corresponde ningún valor de B.

g no es función, a un mismo elemento de A le corresponden dos elementos distintos de B. (1,0) (1,2)

h es función. $Df = A \quad Cf = B \quad Im\, f = \{1,2,3\}$

r es función. $Dr = A \quad Cr = B \quad \operatorname{Im} r = \{2\}$

3) $f(0) = 5$ $\quad f(3) = 5$ $\quad f(-3) = 23$

$f(2x) = 4x^2 - 6x + 5$ $\quad f(1+h) = 3 - h + h^2$

4) $Df_1 = R$ $\quad Df_2 = R$ $\quad Df_3 = R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ $\quad Df_4 = R$ $\quad Df_5 = R - \{4,1\}$

$Df_6 = \left[\frac{4}{3},+\infty\right)$ $\quad Df_7 = \left(-\infty,\frac{2}{3}\right]$ $\quad Df_8 = (2,+\infty)$ $\quad Df_9 = R$ $\quad Df_{10} = R$

$Df_{11} = R$ $\quad Df_{12} = \left(\frac{1}{5},+\infty\right)$ $\quad Df_{13} = R$ $\quad Df_{14} = R$ $\quad Df_{15} = R - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

5) $Df_1 = R = \operatorname{Im} f_1$ $\quad Df_2 = R = \operatorname{Im} f_2$ $\quad Df_3 = R = \operatorname{Im} f_3$

$Df_4 = R$ $\quad \operatorname{Im} f_4 = [-1,+\infty)$ $\quad Df_5 = R$ $\quad \operatorname{Im} f_5 = \left(-\infty,\frac{9}{4}\right]$

$Df_6 = R$ $\quad \operatorname{Im} f_6 = (-\infty,3]$ $\quad Df_7 = R - \{-5\}$ $\quad \operatorname{Im} f_7 = R - \{-10\}$

$Df_8 = [0,3)$ $\quad \operatorname{Im} f_8 = \{-1\} \cup (2,6)$

$Df_9 = (-\infty,-1] \cup \{0\} \cup [1,+\infty)$ $\quad \operatorname{Im} f_9 = \{-5\} \cup [1,+\infty)$

$Df_{10} = R - \{0\}$ $\quad \operatorname{Im} f_{10} = [-1,+\infty)$ $\quad Df_{11} = R = \operatorname{Im} f_{11}$

$Df_{12} = [1,+\infty)$ $\quad \operatorname{Im} f_{12} = R_0^+$ $\quad Df_{13} = R - \{4,-4\}$ $\quad \operatorname{Im} f_{13} = R - \left\{0,\frac{1}{8}\right\}$

$Df_{14} = R$ $\quad \operatorname{Im} f_{14} = R_0^+$

6) a) $Df = R = Dg$ $\quad D_{f+g} = R = D_{f-g} = D_{f.g}$

$(f+g)(x)=3x+2$

$(f-g)(x)=-x+4$

$(f.g)(x)=2x^2+5x-3$

$D_{\frac{f}{g}}=R-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ $\quad D_{\frac{g}{f}}=R-\{-3\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x+3}{2x-1}$ $\quad \left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{2x-1}{x+3}$

b) $Df=R \quad Dg=(2,+\infty) \quad D_{f+g}=(2,+\infty)=D_{f-g}=D_{f.g}$

$(f+g)(x)=x^2+2+\ln(x-2)$

$(f-g)(x)=x^2+2-\ln(x-2)$

$(f.g)(x)=(x^2+2)(\ln(x-2))$

$D_{\frac{f}{g}}=(2,+\infty)-\{3\}$ $\quad D_{\frac{g}{f}}=(2,+\infty)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2+2}{\ln(x-2)}$ $\quad \left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{\ln(x-2)}{x^2+2}$

c) $Df=(-\infty,3] \quad Dg=[-5,+\infty) \quad D_{f+g}=[-5,3]=D_{f-g}=D_{f.g}$

$(f+g)(x)=\sqrt{3-x}+\sqrt{x+5}$

$(f-g)(x)=\sqrt{3-x}-\sqrt{x+5}$

$(f.g)(x)=\sqrt{3-x}.\sqrt{x+5}$

$D_{\frac{f}{g}}=(-5,3]$ $\quad D_{\frac{g}{f}}=[-5,3)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+5}}$ $\quad \left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{3-x}}$

7) a) $g(x)=x^2+3 \quad h(x)=\sqrt{x} \quad f(x)=(h\circ g)(x)$

b) $g(x)=-2x^3 \quad h(x)=\cos(x) \quad g(x)=(h\circ f)(x)$

c) $r(x)=\sqrt{x} \quad h(x)=(r\circ r)(x)$

8) a) $(f\circ g)(x)=x+2 \quad Df\circ g=\{x\in[-1,+\infty)/\sqrt{x+1}\in R\}=[-1,+\infty)$

b) $(f\circ g)(x)=x^2 \quad Df\circ g=\left\{x\in R-\{0\}/\frac{1}{x}\in R-\{0\}\right\}=R-\{0\}$

c) $(f\circ g)(x)=\dfrac{1}{x}$ $\quad Df\circ g=\left\{x\in R_0^+ / \sqrt{x}\in R-\{0\}\right\}=R^+$

d) $(f\circ g)(x)=\ln x^2$ $\quad D_{f\circ g}=\left\{x\in R / x^2+2\in(2,+\infty)\right\}=R-\{0\}$

9) a) i) No es uno a uno ya que existen dos valores diferentes del dominio que tienen la misma imagen, $f(2)=f\left(\frac{-5}{2}\right)=5$

ii) $f(1)=1$. Las preimágenes de 5 son $x=2,\quad x=\dfrac{-5}{2}$.

iii) f_9 *es creciente en* $(1,+\infty)$. f_9 *es decreciente en* $(-\infty,-1)$

iv) f_9 no es par ni impar, ya que su gráfica no es simétrica respecto del eje y ni respecto del origen.

b) i) Sí, toda recta paralela al eje x corta a la gráfica de la función una sola vez.

$$f_{11}(x_1)=f_{11}(x_2)\Rightarrow x_1^3-1=x_2^3-1\Rightarrow x_1^3=x_2^3\Rightarrow x_1=x_2 \quad \forall x_1,x_2\in Df_{11}$$

ii) $f_{11}(-2)=-9$, $\quad x^3-1=7\Rightarrow x=2$

iii) f_{11} crece en R, nunca decrece.

iv) f_{11} no es par ni impar, ya que su gráfica no es simétrica respecto del eje y ni respecto del origen.

$$f_{11}(-x)=-x^3-1,\quad -x^3-1\neq f_{11}(x) \quad f_{11}\ \textit{no es par},$$
$$-x^3-1\neq -f_{11}(x) \quad f_{11}\ \textit{no es impar}$$

10) f es una función lineal por lo tanto es uno a uno ya que:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2x_1-1=2x_2-1\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2 \quad \forall x_1,x_2\in Df$$

g no es uno a uno, $g(-1)=g(1)=2$.

$g_1(x)=x^2+1,\quad x\in R_0^+$

11) $f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{2}$ $\qquad g^{-1}(x)=x^2-5$ $\qquad h^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+2}$

$Df=R=\operatorname{Im} f=Df^{-1}=\operatorname{Im} f^{-1}$ $\qquad Dg=[-5,+\infty)=\operatorname{Im} g^{-1}$ $\qquad Dg^{-1}=R_0^+=\operatorname{Im} g$

$Dh=[0,+\infty)=\operatorname{Im} h^{-1}$ $\qquad Dh^{-1}=[-2,+\infty)=\operatorname{Im} h$

Sucesiones

12) a) Divergente. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ **b)** Convergente. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

c) Convergente. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ **d)** Divergente $\nexists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

13) a) ∞ **b)** 12 **c)** ∞

d) Indeterminado **e)** ∞ **f)** Indeterminado

g) ∞ **h)** 0 **i)** ∞

14) a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** -3

e) ∞ **f)** 0 **g)** 2 **h)** ∞

i) ∞ **j)** $\frac{11}{3}$ **k)** ∞ **l)** 0

Series

15) a) $\frac{4}{15}$ **b)** $\frac{3}{2}$ **c)** $\frac{1}{6}$