Instituto Politécnico Superior
General San Martín

UNIVERSIDAD NACIONAL
DE ROSARIO

A U S

Análisis Matemático I

Límite y Continuidad de Funciones

Mgter. Viviana Paula D'Agostini

TEMARIO

Límite de una función. Propiedades. Cálculo de límites mediante propiedades. Límites laterales. Límites infinitos. Propiedades. Asíntotas verticales y horizontales.
Función continua en un punto. Función continua en un intervalo. Propiedades. Teorema del valor intermedio. Teorema de Bolzano.
Ejercicios.
Bibliografía.

Límite de una función

Supongamos que se nos pide esbozar la gráfica de la función f dada por

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}, \quad Df = R - \{1\} .$$

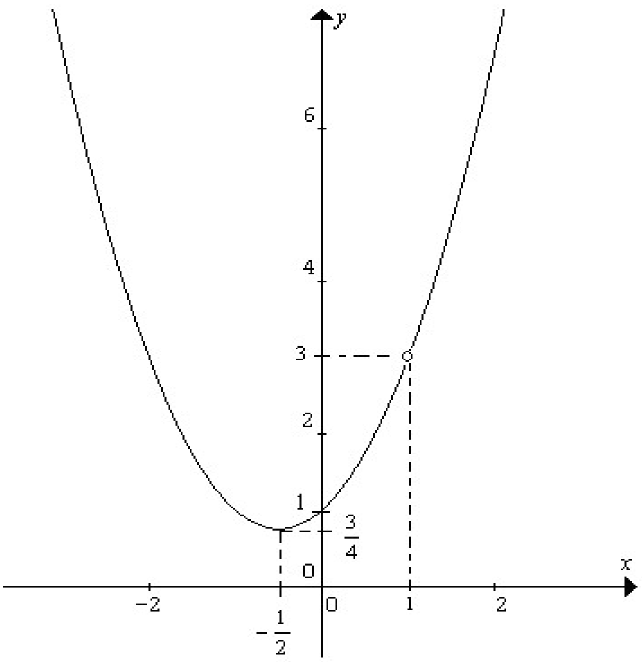
¿Qué ocurre con el comportamiento de f en las proximidades de 1?

x tiende a 1 *por la izquierda* $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ *x tiende a* 1 *por la derecha*

x	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1	1,25	1,5
f	1,750	2,313	2,710	2,970	2,997	$\nexists$	3,003	3,030	3,310	3,813	4,750

$\longrightarrow$ $f(x)$ *tiende a* 3 $\longleftarrow$ $f(x)$ *tiende a* 3

Graficando f, se obtiene:



$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x^2 + x + 1)(x - 1)}{x - 1} =$$

$$= x^2 + x + 1, \quad x \neq 1$$

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}, \quad x \neq 1$$

<u>Definición</u> Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo abierto alrededor de *c, excepto posiblemente en c*, si $f(x)$ se hace arbitrariamente próximo a un *único* número L cuando x se aproxima a c por *ambos lados*, decimos que el **límite** de $f(x)$, cuando x tiende a c, es L y escribimos: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$. Se lee "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a *c* es L".

Sobre el ejemplo anterior podemos decir: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$.

Notas: - El límite de una función si existe es único.

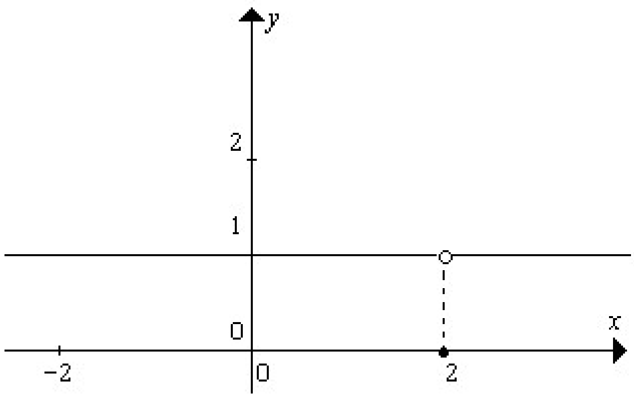
- La existencia de $f(x)$ en $x = c$ no afecta a la existencia del límite de f cuando x tiende a c.

Ejemplo 1. Hallar el límite cuando x tiende a 2, de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \neq 2 \\ 0 & si\ x = 2 \end{cases} \qquad Df = R$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 1$$

$$f(2) = 0$$

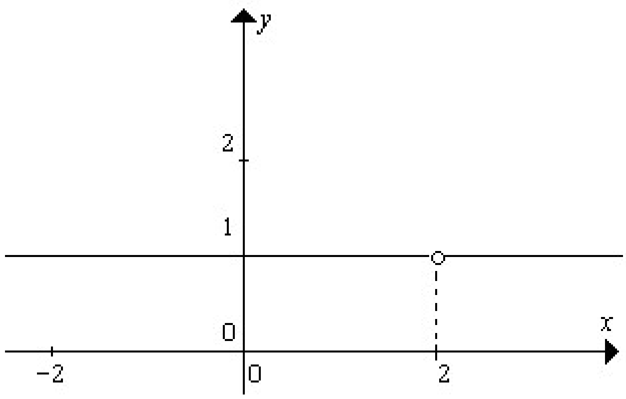


Ejemplo 2. Hallar el límite cuando x tiende a 2, de la función:

$$f(x) = 1 \quad si\ x \neq 2$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 1$$

f *no está definida en* 2

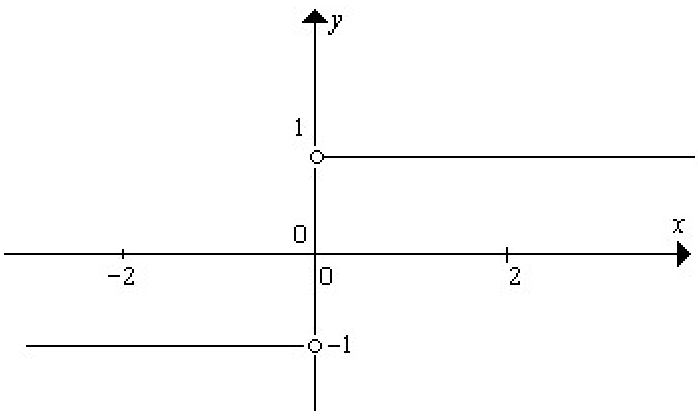


Ejemplo 3.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{cases}$$

f *no está definida en* 0

$$¿\lim_{x \to 0} f(x)?$$



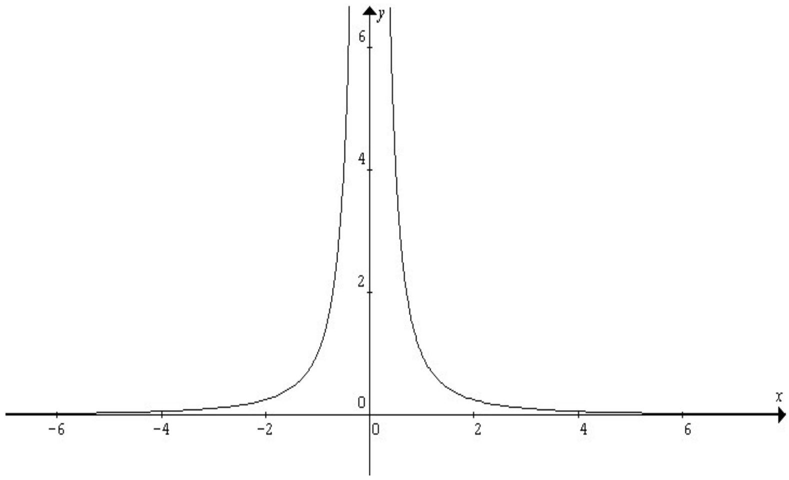
$f(x)$ tiende a números diferentes según nos acerquemos a c por la derecha o por la izquierda. Por lo tanto NO existe $\lim_{x \to 0} f(x)$.

<u>Ejemplo 4.</u>

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

f no está definida en 0

¿ $\lim_{x \to 0} f(x)$?



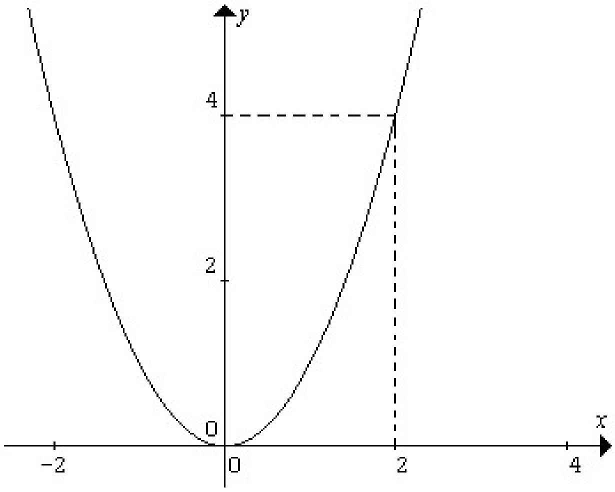
$f(x)$ crece cuando x tiende a c. Por lo tanto NO existe $\lim_{x \to 0} f(x)$.

<u>Ejemplo 5.</u>

$f(x) = x^2$

$Df = R$

$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$

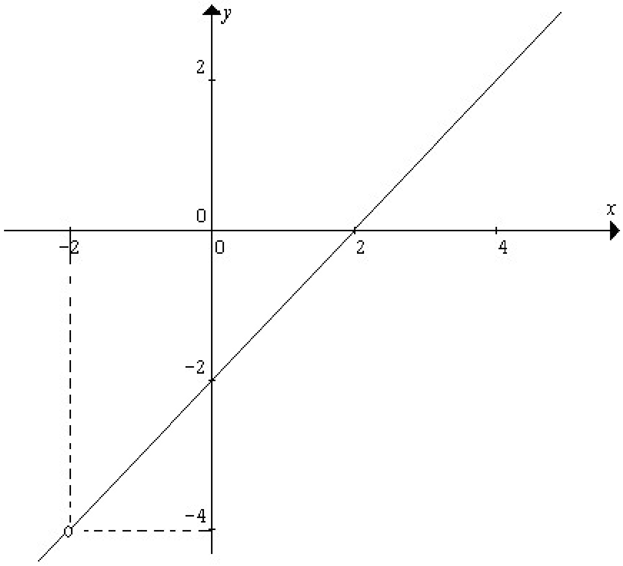


Cuando el límite es precisamente $f(c)$ entonces decimos que el límite se puede calcular por sustitución directa. Esto es, $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Las funciones que poseen este comportamiento serán estudiadas más adelante con mayor detenimiento.

<u>Teorema 1:</u> Sea c un número real y $f(x) = g(x)$ para todo los $x \neq c$ en un intervalo abierto que contiene a c. Si el límite de $g(x)$ cuando x tiende a c existe, entonces también existe el límite de $f(x)$ y además $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(c)$.

<u>Ejemplo</u>:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$$



$$Df=R-\{-2\}$$

$$\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}=x-2,\quad x\neq -2$$

$$g(x)=x-2$$

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2} g(x)=\lim_{x\to -2}(x-2)=-4$$

<u>Propuesta 1.</u> Resolver el ejercicio 1.

<u>Teorema 2</u>. Si b y c son números reales y n un entero (positivo si $c=0$) entonces se cumple: $i)\ \lim_{x\to c} b=b$ $\quad ii)\ \lim_{x\to c} x=c$ $\quad iii)\ \lim_{x\to c} x^n=c^n$

<u>Ejemplos</u>:

1) $\lim_{x\to 2} 3=3$ 2) $\lim_{x\to 1} x=1$ 3) $\lim_{x\to 2} x^3=2^3=8$

<u>Teorema 3</u>. Si b y c son números reales, n un entero positivo y f y g funciones que tienen límite cuando x tiende a c entonces son ciertas las siguientes propiedades:

1) $\lim_{x\to c} b\,f(x)=b\lim_{x\to c} f(x)$

2) $\lim_{x\to c}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to c} f(x)\pm\lim_{x\to c} g(x)$

3) $\lim_{x\to c}(f(x).g(x))=\lim_{x\to c} f(x).\lim_{x\to c} g(x)$

4) $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$ $\quad si\ \lim_{x\to c} g(x)\neq 0$

5) $\lim_{x\to c}\left[f(x)^n\right]=\left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$

Ejemplo: Sea $f(x)=4x^2+3$, hallar $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

$$\lim_{x\to 2}(4x^2+3)=\lim_{x\to 2}4x^2+\lim_{x\to 2}3=4\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}3=4.4+3=19$$

Nota: f es una función polinómica y el límite resultó ser igual a $f(2)$.

Teorema 4. Límite de una función polinómica.

Si p es un polinomio y c es un número real entonces $\lim\limits_{x\to c} p(x)=p(c)$.

Demostración: $\lim\limits_{x\to c}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0)=$

$$=\lim_{x\to c}a_nx^n+\lim_{x\to c}a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+\lim_{x\to c}a_2x^2+\lim_{x\to c}a_1x+\lim_{x\to c}a_0=$$

$$=a_n\lim_{x\to c}x^n+a_{n-1}\lim_{x\to c}x^{n-1}+\ldots+a_2\lim_{x\to c}x^2+a_1\lim_{x\to c}x+\lim_{x\to c}a_0=$$

$$=a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\ldots+a_2c^2+a_1c+a_0=p(c)$$

Teorema 5:

Si r es una función racional dada por $r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ y c es un número real / $q(c)\neq 0$ entonces $\lim\limits_{x\to c} r(x)=r(c)=\dfrac{p(c)}{q(c)}$.

Demostración: $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{n-1}x^{m-1}+\ldots+b_2x^2+b_1x+b_0}=$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to c}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0)}{\lim\limits_{x\to c}(b_mx^m+b_{n-1}x^{m-1}+\ldots+b_2x^2+b_1x+b_0)}=$$

$$=\frac{a_n\lim\limits_{x\to c}x^n+a_{n-1}\lim\limits_{x\to c}x^{n-1}+\ldots+a_2\lim\limits_{x\to c}x^2+a_1\lim\limits_{x\to c}x+\lim\limits_{x\to c}a_0}{b_m\lim\limits_{x\to c}x^m+b_{m-1}\lim\limits_{x\to c}x^{m-1}+\ldots+b_2\lim\limits_{x\to c}x^2+b_1\lim\limits_{x\to c}x+\lim\limits_{x\to c}b_0}=$$

$$=\frac{a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\ldots+a_2c^2+a_1c+a_0}{b_mc^m+b_{m-1}c^{n-1}+\ldots+b_2c^2+b_1c+b_0}=\frac{p(c)}{q(c)}$$

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \dfrac{1^2 + 1 + 1}{1 + 1} = \dfrac{3}{2}$

Teorema 6: Si $c > 0$ y n es cualquier entero positivo o si $c < 0$ y n es un entero positivo impar entonces $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$.

Propuesta 2. Resolver los ejercicios 2, 3, 4 y 5.

Técnicas para calcular límites

Si al evaluar un límite de una función por sustitución directa, se obtiene $\dfrac{0}{0}$, llamamos a tal expresión una forma indeterminada, porque no es posible (a simple vista) determinar el límite. Entonces se puede intentar reescribir la fracción de manera que ya no estemos en un caso **indeterminado**.

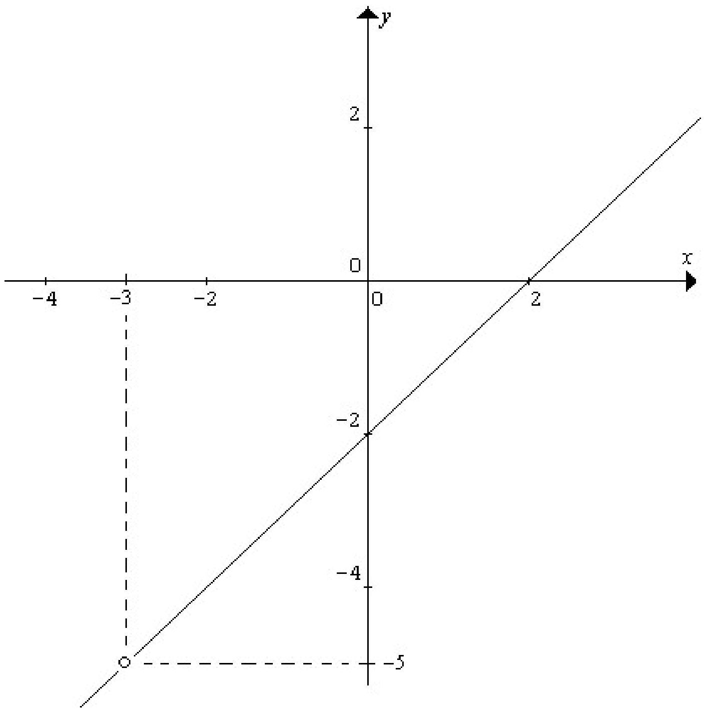
Ejemplo 1: Técnica de cancelación. Dada $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$ $\quad Df = R - \{-3\}$

$$\lim_{x \to -3} \frac{\overset{\to 0}{x^2 + x - 6}}{\underset{\to 0}{x + 3}} =$$

$$\lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(x-2)}{x+3} =$$

$$\lim_{x \to -3} (x - 2) = -5$$

La gráfica de f coincide con la de $g(x) = x - 2$, excepto en el punto $(-3,-5)$.



Escribimos la fracción de manera que el nuevo denominador no tenga ya límite cero.

Ejemplo 2: Técnica de racionalización

$$\lim_{x \to 0} \frac{\overset{\to 0}{\sqrt{x+1} - 1}}{\underset{\to 0}{x}} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \right) \left(\frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{(x+1) - 1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

Racionalizamos el numerador y pudimos deshacer la indeterminación.

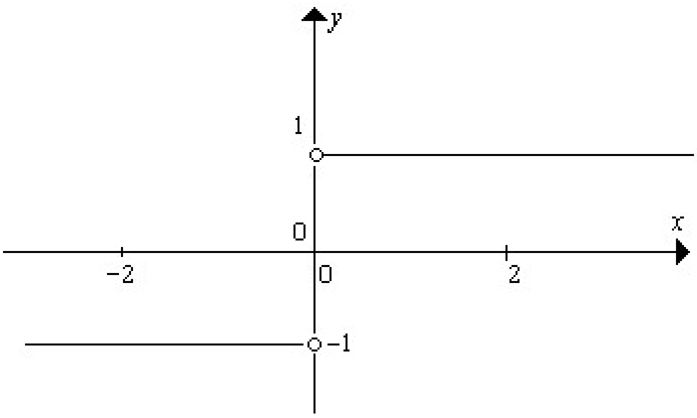
Límites laterales

Límite lateral por la derecha: $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$. $f(x)$ se hace arbitrariamente cercano a L cuando x se aproxima hacia c por valores mayores que el propio c.

Limite lateral por la izquierda: $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$. $f(x)$ se hace arbitrariamente cercano a L cuando x se acerca a c por valores menores que c.

Ejemplo 1:

$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{cases}$ $\qquad Df = R - \{0\}$ $\qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ $\qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$



$\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe ya que los límites laterales son distintos.

Ejemplo 2: $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ $\qquad$ (Recordar que $Df = R_0^+$)

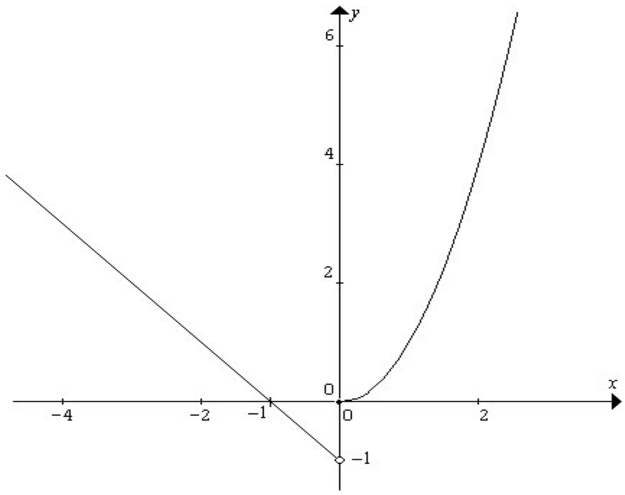
Ejemplo 3: $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x-1} = 0$

Teorema 7. La existencia de límite

Si f es una función y si c y L son números reales, el límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia c es L $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$.

Este teorema es apropiado para probar que un límite no existe.

Ejemplo: $f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ x \geq 0 \\ -x-1 & si\ x<0 \end{cases}$



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

$$No\ existe\ \lim_{x \to 0} f(x)$$

Propuesta 3. Resolver el ejercicio 6.

Límites infinitos

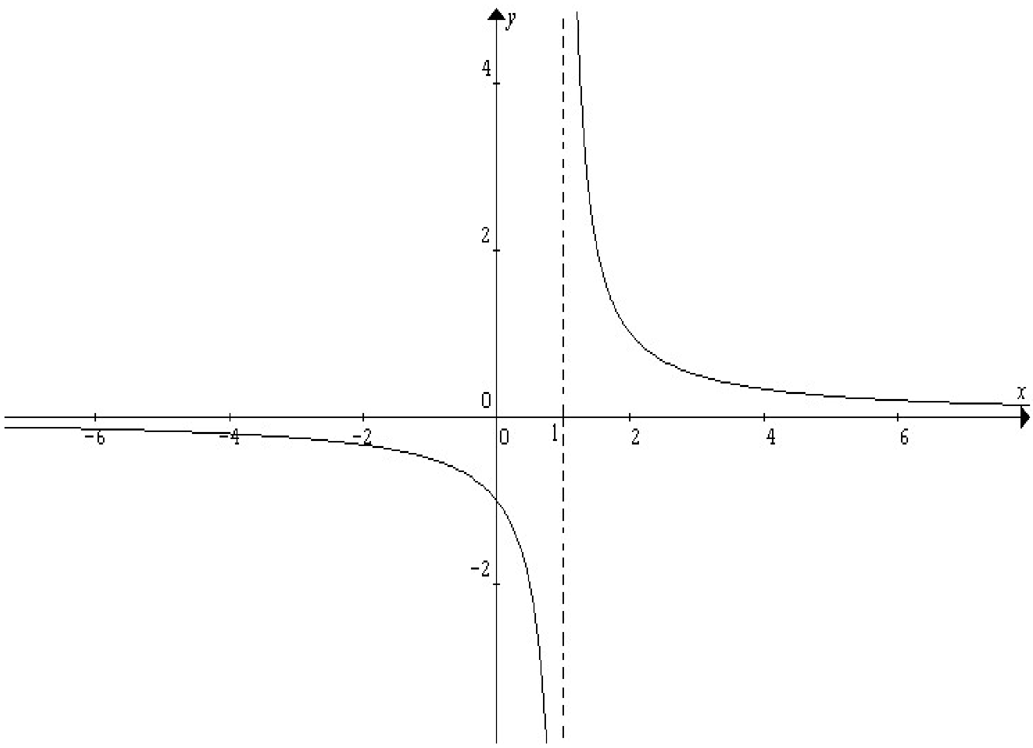
Sea $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $Df = R - \{1\}$. ¿Qué ocurre con el comportamiento de f en las proximidades de 1?

x tiende a 1 por la izquierda → ← *x tiende a 1 por la derecha*

x	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1	1,25	1,5
f	-2	-4	-10	-100	-1000	$\nexists$	1000	100	10	4	2

→ ←

$f(x)$ decrece sin tope *$f(x)$ crece sin tope*



Definición

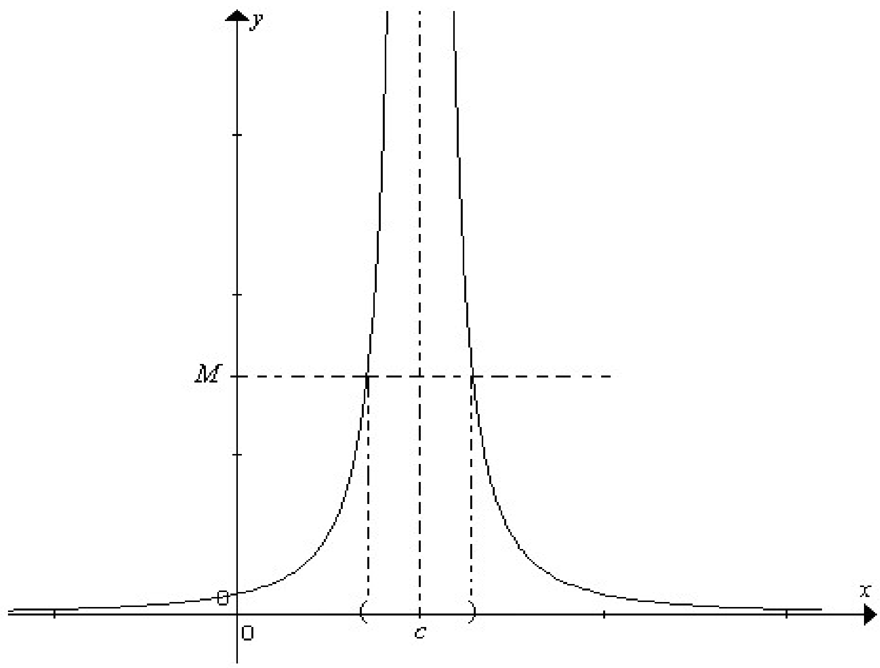
La afirmación $\lim\limits_{x \to c} f(x) = +\infty$ significa que $f(x)$ crece sin tope cuando x tiende a c.

La afirmación $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$ significa que $f(x)$ decrece sin tope cuando x tiende a c.

El signo de igualdad en $\lim f(x) = \infty$ NO significa que el límite existe. Nos indica la falta de existencia del límite, poniendo de manifiesto el comportamiento no acotado de $f(x)$ cuando x tiende a c.

Si $f(x)$ crece sin tope cuando $x \to c$ significa que para cada $M > 0$ existe un intervalo abierto I, que contiene a c, tal que $f(x) > M$ para todo x en I (distinto de $x = c$). Una interpretación similar define lo que se entiende al decir que $f(x)$ decrece sin tope.

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = +\infty$



Los límites infinitos por la izquierda y por la derecha se definen análogamente. Los cuatro posibles límites laterales infinitos son:

$\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = +\infty$

Sobre nuestro ejemplo de página 12 podemos decir que:

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$

Definición de asíntota vertical

La recta $x = c$ es una **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$ si por lo menos se cumple una de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty \;,\quad \lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty \;,\quad \lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty \;,\quad \lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$$

En nuestro ejemplo: $x = 1$ es una asíntota vertical.

Definición de asíntota horizontal.

La recta $y = L$ $(L \in R)$ se llama **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$ si se cumple cualquiera de las dos condiciones siguientes:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \;,\qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

En nuestro ejemplo de pág. 12: $y = 0$ es una asíntota horizontal, ya que $\lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$ y además $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$.

Veamos otro ejemplo:

Sea $r(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4}$ $\qquad Dr = R - \{-2, 2\}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1 \qquad AH : y = 1$$

$$\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = \frac{(x+4)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x+4}{x+2} \qquad x \neq -2,\ x \neq 2$$

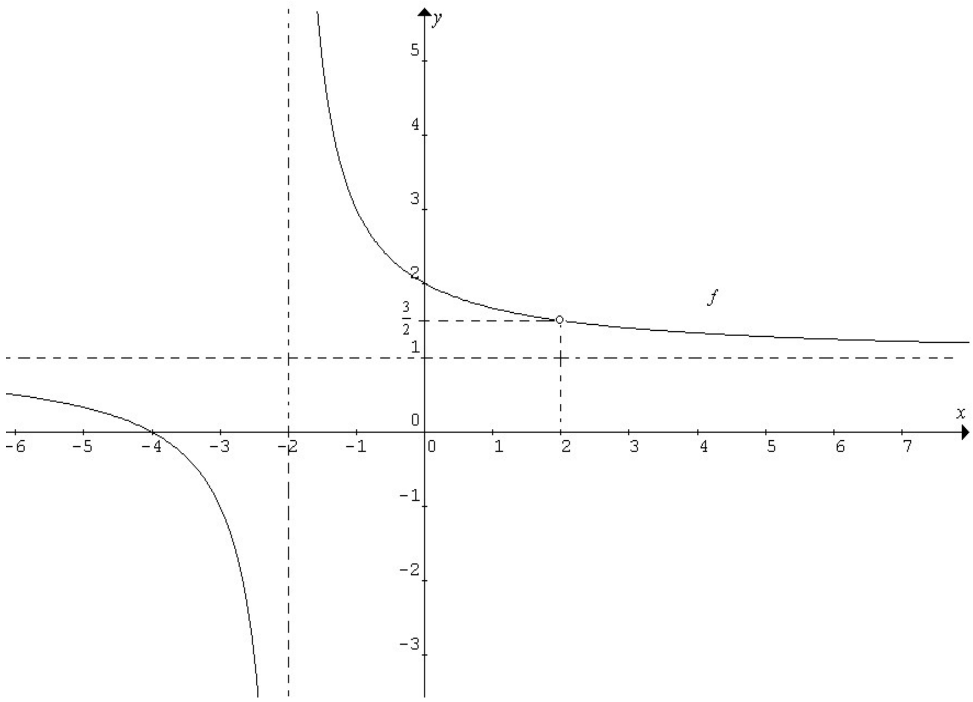
Salvo en $x = 2$ la gráfica de r coincide con la de $h(x) = \dfrac{x+4}{x+2}$. ($Dh = R - \{-2\}$)

r no está definida en 2 pero h sí está definida en 2.

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -2^-} \frac{\overset{\to 2}{x+4}}{\underset{\to 0^-}{x+2}} = -\infty, \qquad \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -2^+} \frac{\overset{\to 2}{x+4}}{\underset{\to 0^+}{x+2}} = \infty$$

Luego deducimos que hay una asíntota vertical en $x = -2$.

$$\lim_{x \to 2} = \frac{x+4}{x+2} = \frac{3}{2} \quad \lim_{x \to 2} = \frac{x+4}{x+2} = \frac{3}{2}$$ Obsérvese que $x = 2$ no es una asíntota vertical.



Teorema 8. Propiedades de los límites infinitos

Si c, L son números reales y f, g son funciones tales que $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to c} g(x) = L$ entonces las siguientes propiedades son válidas:

1- Suma o diferencia: $\lim_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = \infty$

2- Producto: $\lim_{x\to c} [f(x).g(x)] = \infty \quad L > 0, \quad \lim_{x\to c} [f(x).g(x)] = -\infty \quad L < 0$

3- Cociente: $\lim_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$

Propiedades similares son válidas para límites laterales y para funciones para las cuales el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es $-\infty$.

Ejemplos:

a) $\lim_{x\to 0} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = \infty$ ya que $\lim_{x\to 0} 1 = 1$ y $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \infty$

b) $\lim_{x\to 1^-} \left(\dfrac{x^2+1}{1/(x-1)}\right) = 0$ pues $\lim_{x\to 1^-} x^2 + 1 = 2$ y $\lim_{x\to 1^-} \left(\dfrac{1}{x-1}\right) = -\infty$

Propuesta 4. Resolver los ejercicios 7, 8 y 9.

Continuidad

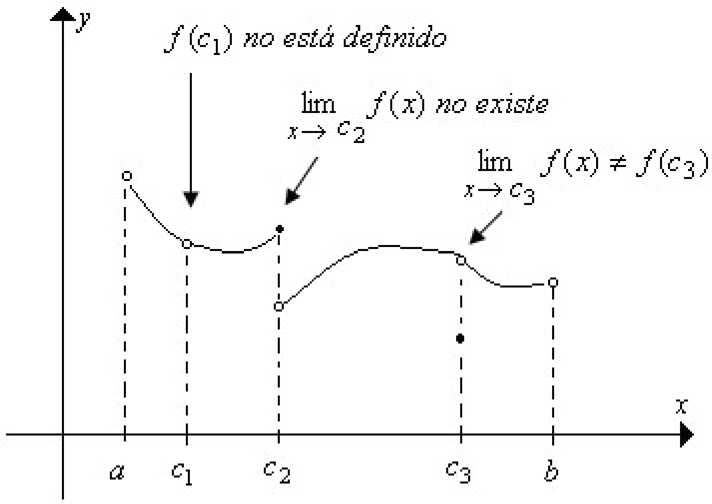
Definición. Una función **f es continua en c** si $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Para ello debe ocurrir que:

- $\exists\, f(c)$
- $\exists \lim_{x\to c} f(x)$, *es decir* $\exists \lim_{x\to c^+} f(x)$, $\exists \lim_{x\to c^-} f(x)$ *y* $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x)$
- $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

Se dice que f es **continua en** el intervalo abierto **(a,b)**, si es continua para todo x perteneciente a él.

Geométricamente, una función es continua en un intervalo si su gráfica no tiene interrupciones, es decir si se puede trazar sin levantar el lápiz del papel.



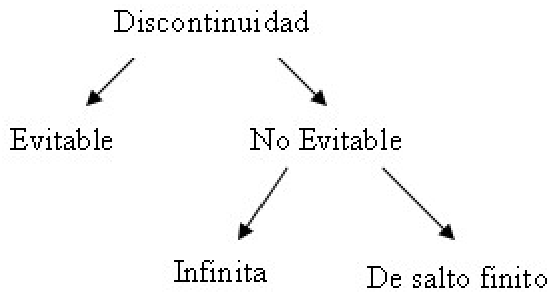
Si f no es continua en c, se dirá que es **discontinua** en c.

Las discontinuidades pueden clasificarse en **evitables** y **no evitables**.

Se dice que una discontinuidad en $x = c$ es evitable si f puede hacerse continua redefiniéndola en $x = c$, para ello debe existir $\lim_{x\to c} f(x)$. En caso contrario se dirá que es inevitable.

Si $\exists \lim_{x\to c^+} f(x)$ *y* $\exists \lim_{x\to c^-} f(x)$ *pero* $\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$ entonces f tiene una discontinuidad de salto finito inevitable.

Si $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ (o si $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$) por la izquierda o por la derecha, decimos que f tiene en $x = c$ una discontinuidad infinita inevitable.



Teniendo en cuenta el gráfico de la página anterior: en c_1 y c_3 las discontinuidades son evitables. En c_2 la discontinuidad es inevitable, de salto finito.

Ejemplo 1. Retomemos el ejemplo 1 de página 4:

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1,\ f(2)=0,\ \lim\limits_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$. La discontinuidad es evitable. Puedo redefinir a f : $f(x)=1 \quad \forall x\in R$, resultando continua en R.

Ejemplo 2. Retomemos el ejemplo 3 de página 4:

f no está definida en 0. La discontinuidad en 0 es inevitable de salto finito ya que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$.

Ejemplo 3. Retomemos el ejemplo 4 de página 5

f no está definida en 0. . La discontinuidad en 0 es inevitable de salto infinito ya que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=+\infty$.

Definición de continuidad en un intervalo cerrado

Una función f es **continua en** el intervalo cerrado **[a,b]** si es continua en el intervalo abierto (a,b) y además $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ y $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$. La función f se dice que es continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

Definiciones análogas cubren el caso de intervalos semiabiertos de la forma (a,b] o [a,b) o intervalos infinitos.

<u>Ejemplo</u>. Discutir la continuidad de $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad Df=[0,+\infty)$

En todos los puntos de $(0,+\infty)$ es continua como consecuencia del teorema 6. Y además

$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}=0=f(0)$. Por lo tanto f es continua en todo su dominio.

<u>Teorema 9</u>. Propiedades de las funciones continuas.

Si b es un número real y f y g dos funciones continuas en $x=c$ también son continuas en c, las funciones:

i) $b.f$ iii) $f-g$

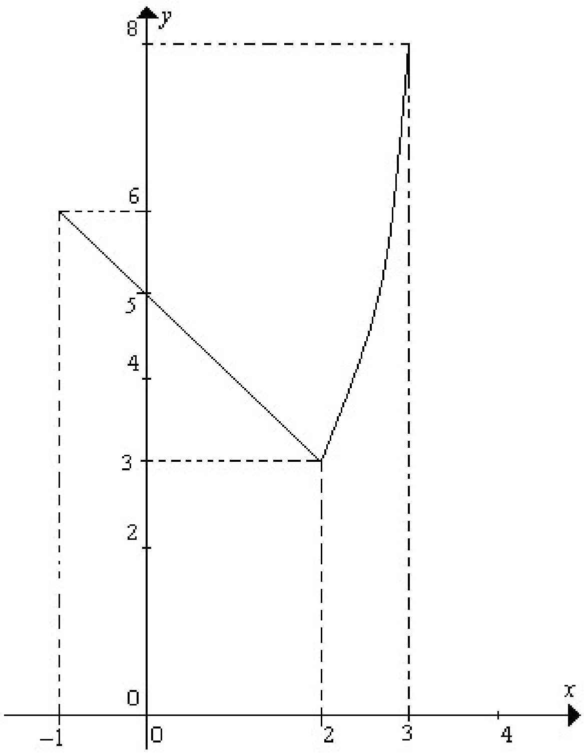
ii) $f+g$ iv) $\dfrac{f}{g}$ $\; si\ g(c)\neq 0$

<u>Notas</u>:

- Son continuas en todo su dominio las funciones polinómicas, racionales y radicales.
- No toda función es continua en su dominio.

<u>Ejemplo</u>: Sea $f(x)=\begin{cases} 5-x & si\ \ -1\leq x\leq 2 \\ x^2-1 & si\ \ 2<x\leq 3 \end{cases}$ discutir la continuidad de f.

$Df=[-1,3]$. f es continua en $(-1,2)$ y en $(2,3)$ pues $y=5-x$ y $y=x^2-1$ son funciones polinómicas por lo tanto continuas en R.



$\lim\limits_{x\to -1^+} 5-x=6=f(-1)$,

$\lim\limits_{x\to 3^-} x^2-1=8=f(3)$,

$\lim\limits_{x\to 2^-} 5-x=3$,

$\lim\limits_{x\to 2^+} x^2-1=3=f(2)$

Como

$\lim\limits_{x\to 2^-} 5-x = \lim\limits_{x\to 2^+} x^2-1=f(2)$,

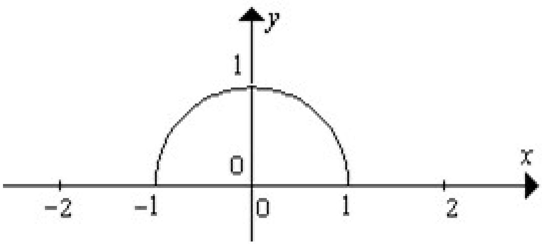
f resulta continua en $x=2$.

Luego f es continua en su $Df=[-1,3]$.

Teorema 10. Continuidad de una función compuesta

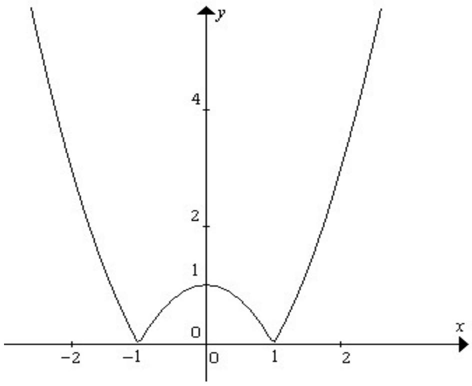
Si g es continua en c y f es continua en $g(c)$, la función compuesta dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en c. (Es decir si $\lim_{x \to c} g(x) = g(c)$ y $\lim_{x \to g(c)} f(x) = f(g(c))$ entonces $\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(g(c))$).

Ejemplo 1: $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$



f es continua en [-1,1]

Ejemplo 2: $f(x) = \left| x^2 - 1 \right|$

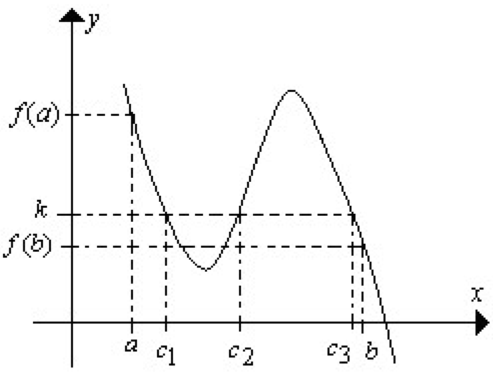


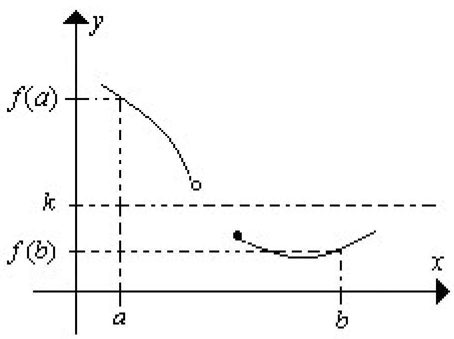
f es continua en R.

Teorema 11. El teorema del valor intermedio

Si f es continua en [a,b] y k es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$ existe al menos un número c en (a,b) para el que $f(c) = k$.

Este teorema establece que para una función continua, si x recorre todos los valores desde a hasta b, entonces $f(x)$ debe tomar todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$. Asegura la existencia de al menos un número c en el intervalo (a,b). Pero puede haber más de uno. Una función discontinua puede no poseer la propiedad del valor intermedio.

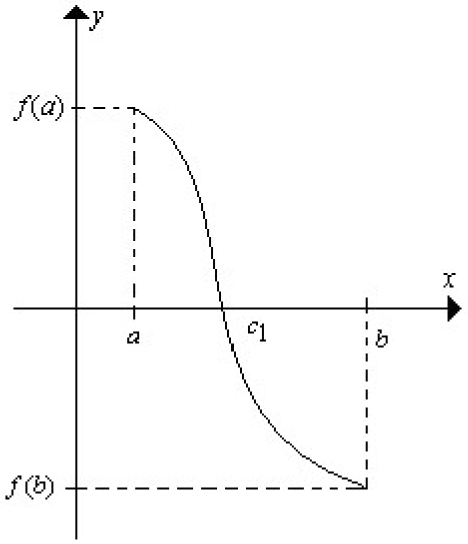


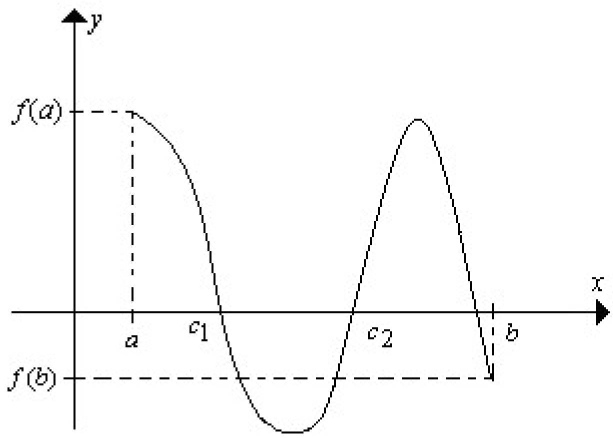


Teorema de Bolzano

Si f es continua en [a,b] , $f(a)$ y $f(b)$ difieren en signo, entonces existe al menos un número c en (a,b) para el que $f(c)=0$. (Es decir f tiene al menos una raíz)

Este teorema nos dice que existe un c en (a,b), pero no proporciona un método parar hallar ese valor c .





Ejemplo: Consideremos $f(x)=x^3+2x-1$ en $[0,1]$

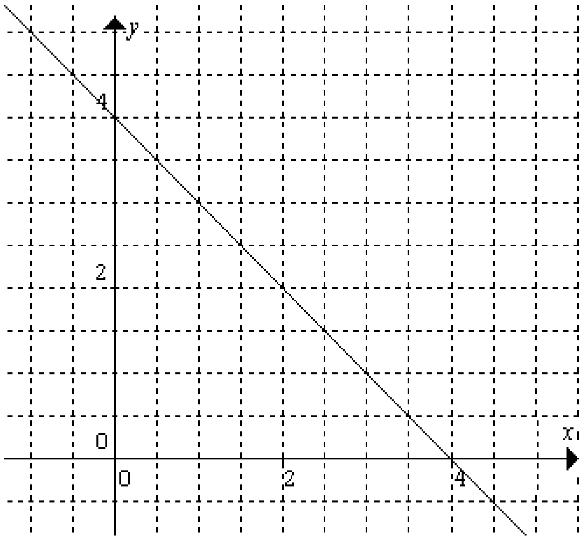
f es una función polinómica por lo tanto es continua en R, en particular es continua en $[0,1]$. $f(0)=-1<0$ y $f(1)=2>0$. Luego por el teorema de Bolzano podemos decir que f tiene una raíz en (0,1).

Propuesta 5. Resolver los ejercicios 10, 11, 12 y 13.

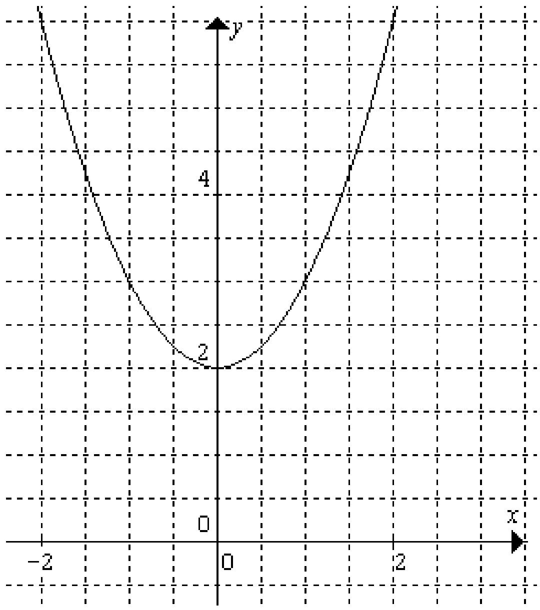
EJERCICIOS

1) En cada caso hallar el límite (si existe) utilizando la gráfica de f, en el caso que no exista justifique porqué.

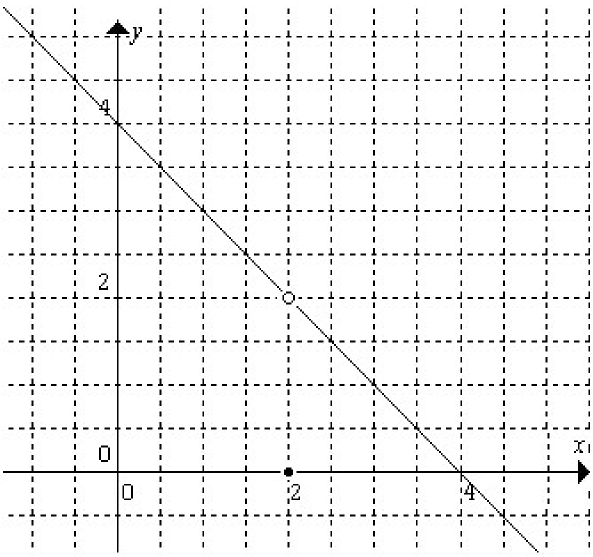
a) $\lim_{x \to 3} f =$



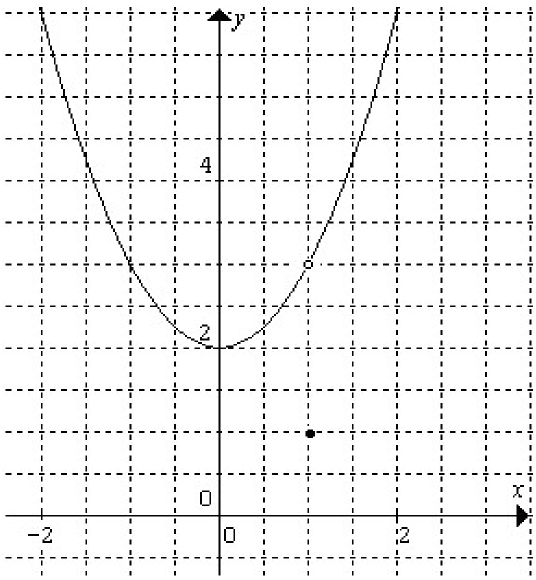
b) $\lim_{x \to 1} f =$



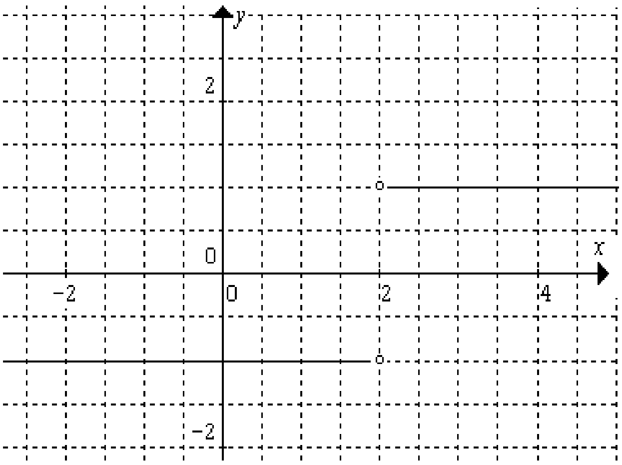
c) $\lim_{x \to 2} f =$



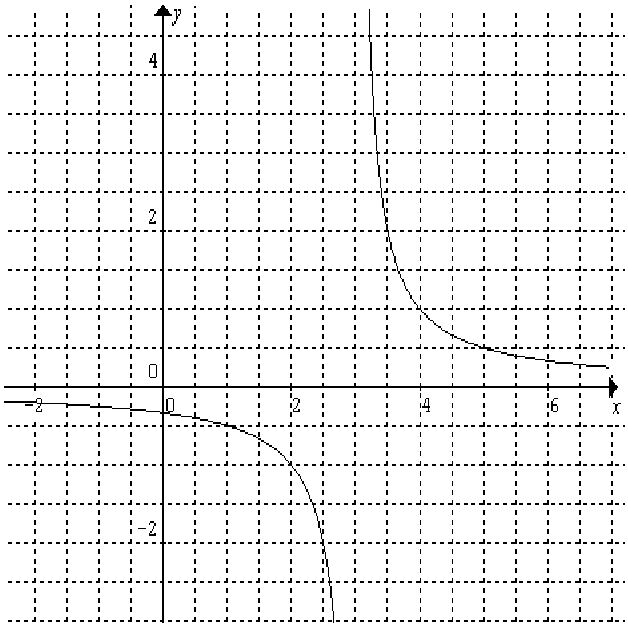
d) $\lim_{x \to 1} f =$



e) $\lim_{x\to 2} f =$



f) $\lim_{x\to 3} f =$



2) Calcular:

a) $\lim_{x\to 1}(-x^2+1)=$

b) $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-4}=$

c) $\lim_{x\to -3}\dfrac{2}{x+2}=$

d) $\lim_{x\to 2}\dfrac{2x^3-x^2-3}{-x^2+1}=$

3) Si $\lim_{x\to c} f(x)=2$ y $\lim_{x\to c} g(x)=3$, hallar:

a) $\lim_{x\to c} 5g(x)=$

b) $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x))=$

c) $\lim_{x\to c} f(x).g(x)=$

d) $\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=$

4) Si $f(2)=4$, ¿podemos concluir algo sobre $\lim_{x\to 2} f(x)$?. Justifique su respuesta.

5) Si $\lim_{x\to 2} f(x)=4$, ¿podemos concluir algo sobre $f(2)$?. Justifique su respuesta.

6) En caso de ser posible calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=$

b) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=$

c) $\lim_{x\to -1}\dfrac{2x^2-x-3}{x+1}=$

d) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}=$

e) $\lim_{x\to 2}\dfrac{2-x}{x^2-4}=$

f) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}=$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x} =$ **h)** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} =$ **i)** $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x-5}{x^2-25} =$

j) $Si\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6 & si\ x < 2 \\ -x^2 + 4x - 2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$

k) $Si\ f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & si\ x \leq 1 \\ 1 - x & si\ x > 1 \end{cases}$ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$

7) Estudiar los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{(x+2)^2} =$ **b)** $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{x+2} =$

c) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+2}{x^2-4} =$ **d)** $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x+2}{x^2-4} =$

8) Hallar las asíntotas verticales de $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

9) Hallar las asíntotas verticales y horizontales de las funciones dadas

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{2+x}{1-x}$

c) $f(x) = \dfrac{-4x}{x^2+4}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x-2}$

10) Hallar los puntos de discontinuidad (si los hay) para las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{2}$ **,** **b)** $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$, **c)** $f(x) = \begin{cases} x & si\ x < 1 \\ 2 & si\ x = 1 \\ 2x - 1 & si\ x > 1 \end{cases}$

11) Hallar las discontinuidades (si las hay) de la función dada. ¿Cuáles son evitables?

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}$

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x-2}$ **e)** $f(x) = \begin{cases} x & si\ x \leq 1 \\ x^2 & si\ x > 1 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 1 & si\ x \leq 2 \\ 3 - x & si\ x > 2 \end{cases}$ **g)** $f(x) = \begin{cases} 3 + x & si\ x \leq 2 \\ x^2 + 1 & si\ x > 2 \end{cases}$

12) Hallar un valor para la constante "a" de modo que la siguiente función sea continua en toda la recta real.

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & si\ x \le 2 \\ ax^2 & si\ x > 2 \end{cases}$$

13) Hallar valores para las constantes a y b de modo que la siguiente función sea continua en toda la recta real.

$$f(x)=\begin{cases} 2 & si\ x \le -1 \\ ax+b & si\ -1 < x < 3 \\ -2 & si\ x \ge 3 \end{cases}$$

<u>Práctica Complementaria</u>

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{3x} =$	Rta: $+\infty$
2) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3} =$	Rta: $+\infty$
3) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3}{x-2} =$	Rta: $-\infty$
4) $\lim\limits_{x\to -8^+} \dfrac{2x}{x+8} =$	Rta: $+\infty$
5) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{4}{(x-7)^2} =$	Rta: $+\infty$
6) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-3}{x^2-4} =$	Rta: $-\infty$
7) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-3}{x^2-4} =$	Rta: $+\infty$
8) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-3}{x^2-4} =$	Rta: $\nexists$
9) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2-x}{(x-2)^3} =$	Rta: $-\infty$
10) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4} =$	Rta: $\frac{1}{4}$

11) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} =$	Rta: $\frac{1}{2}$
12) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x+3}{5x+7} =$	Rta:$\frac{2}{5}$
13) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2+3}{5x^2+7} =$	Rta:$\frac{3}{5}$
14) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-4x+8}{3x^3} =$	Rta: 0
15) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2-7x+1} =$	Rta: 0
16) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-7x}{x+1} =$	Rta:+∞
17) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-x} =$	Rta:3
18) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{x^2-25} =$	Rta:$\frac{1}{10}$
19) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+3x-10}{x+5} =$	Rta: - 7
21) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1} =$	Rta:$\frac{3}{2}$
21) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-2x-4}{x^3+2x^2} =$	Rta:$\frac{-1}{2}$
22) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9} =$	Rta:$\frac{1}{6}$
23) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} =$	Rta:4
24) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2} =$	Rta:$\frac{1}{2}$
25) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3} =$	Rta:$\frac{3}{2}$

26) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{x^2+4x+3} =$	Rta:$\frac{-1}{2}$
27) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-7x+10}{x-2} =$	Rta: 3
28) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-2} =$	Rta:$\frac{-1}{3}$
29) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^3+8x^2}{3x^4-16x^2} =$	Rta:$\frac{-1}{2}$
30) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}} =$	Rta:16
31) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1} =$	Rta:$\frac{-1}{3}$
32) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3} =$	Rta:$\frac{-3}{2}$
33) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{4-x}{5-\sqrt{x^2+9}} =$	Rta:$\frac{5}{4}$
34) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2x}{x^2-1}\right) =$	Rta:$\frac{-1}{2}$
35) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x-2}{x^2+4x-3} =$	Rta:$\frac{1}{2}$
36) $\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{x^2-x+12}{x+3} =$	Rta:$+\infty$
37) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x^2-x-6} =$	Rta:$\frac{-1}{5}$
38) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-5)^2-25}{x} =$	Rta:-10
39) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^2-1}{x} =$	Rta:2
40) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{9-x}{3-\sqrt{x}} =$	Rta:6

41) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2 - x - 12}{x+3} =$	Rta:-7
42) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} =$	Rta:- 3
43) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2+x)^3 - 8}{x} =$	Rta:12
44) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} =$	Rta:$\frac{5}{4}$
45) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{5-x} - \sqrt{5}}{x} =$	Rta:$\frac{-1}{2\sqrt{5}}$
46) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1}\right) =$	Rta:$\frac{1}{2}$
47) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - x^2}{1 - \sqrt{x}} =$	Rta: 2
48) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x-2} =$	Rta:$\frac{-1}{4}$
49) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3} =$	Rta:108
50) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 1} =$	Rta:11
51) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2 + 6x + 4}{x+1} =$	Rta:2
52) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{-x^2 - x + 2} =$	Rta:$\frac{-1}{3}$
53) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 2} =$	Rta:$\frac{3}{4}$
54) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3 + x^2 + 3x}{x^4 + 2x^2 - x} =$	Rta:-3
55) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9 - (x-3)^2}{x^2 - x} =$	Rta:- 6
56) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{2x}{x^2-4} - \dfrac{1}{x-2}\right) =$	Rta:$\frac{1}{4}$

57) $\lim_{x\to 3} \dfrac{2x-6}{x^2-9} =$	Rta:$\frac{1}{3}$
58) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}}{3x} =$	Rta:$+\infty$
59) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x^2}}{x^2} =$	Rta:$+\infty$
60) $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3x+2}{x-1} - \dfrac{1-x}{x^2-x}\right) =$	Rta: 3

BIBLIOGRAFÍA

- Steward J. Cálculo. (2008). Sexta Edición. Cengage Learning.
- Thomas. Cálculo Una variable. (2005). Undécima edición. Pearson Addison Wesley.
- Rabuffetti Hebe T. (1995) Introducción al Análisis Matemático.
- Miguel de Guzmán. Análisis Matemático I. Editorial Anaya.
- Spivack Michael. (1988). Cálculo Infinitesimal. Editorial Reverté.