A U S

Análisis Matemático I

Funciones
Sucesiones y Series

Mgter. Viviana Paula D'Agostini

Introducción

Durante el transcurso del cuatrimestre se utilizarán diferentes apuntes de apoyo para el desarrollo de las clases. Este material muestra sólo un compendio de los contenidos a desarrollar, se presentan conceptos, propiedades, teoremas, ejemplos, ejercicios y algunas demostraciones. El mismo se completará paulatinamente en el transcurso de las clases.

Al final de cada apunte se encuentra la bibliografía sugerida para que el estudiante recurra a ella para contribuir a una mejor comprensión de los temas.

Se sugiere al estudiante concurrir y participar activamente de las clases, plantear sus dudas, interactuar con sus compañeros, realizar las actividades que se proponen y otras, que podrá encontrar en la bibliografía sugerida o en otros medios.

Su estudio no debe limitarse a los apuntes de clase, ni a recordar una fórmula para el cálculo inmediato. Es importante comprender las definiciones, conocer las diferentes representaciones simbólicas, poder enunciar e interpretar propiedades y teoremas, estableciendo relaciones entre los mismos.

El alumno debe asumirse como estudiante terciario, comprometiéndose responsablemente con el estudio.

Seguramente encontrará dificultades, que no deben desalentarlo. Por el contrario, superar las mismas tiene que ser un desafío.

TEMARIO

Conjuntos numéricos.

Funciones. Definición. Dominio, Codominio, Imagen. Representación en ejes cartesianos. Función par e impar. Función creciente y decreciente. Funciones elementales (Constante. Identidad. Lineal. Definidas por secciones. Valor absoluto. De Potencia. Cuadráticas. Polinómicas. Racionales. Algebraicas. Exponenciales. Logarítmicas. Trigonométricas). Álgebra de funciones (Suma, Resta, Producto, Cociente). Composición de funciones. Función uno a uno. Función inversa.

Sucesiones. Definición. Límite de una sucesión. Sucesiones convergentes y divergentes. Propiedades. Series. Definición. Serie geométrica.

Ejercicios.

Apéndice.

Bibliografía.

Conjuntos numéricos. Repaso

$N = \{1,2,3,4,5,...\}$ *Números naturales*

$N_0 = \{0,1,2,3,4,5,...\} = NU\{0\}$ *Números naturales incluido el cero*

$Z = \{...-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,...\}$ *Números enteros*

$Q = \left\{ \frac{p}{q} / \; p, q \in Z \wedge q \neq 0 \right\}$ *Números racionales*

Un número racional se reconoce si su cifra decimal es finita o infinita periódica.

$0.25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ $\quad 0.33333... = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Un número es irracional (I) si su representación decimal tiene infinitas cifras no periódicas.

$\pi, \quad \sqrt{2}, \quad e$

N C **Z** C **Q**, **Q** U **I** =**R** (**R:** números reales)

Algunas notaciones:

R^+ : *conjunto de los números reales positivos*,

R^- : *conjunto de los números reales negativos*,

R_0^+ : *conjunto de los números reales positivos incluido el cero.*

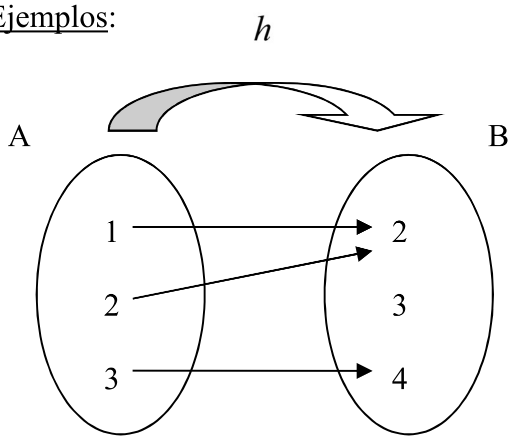
Propuesta 1. Resuelve el ejercicio 1.

FUNCIONES

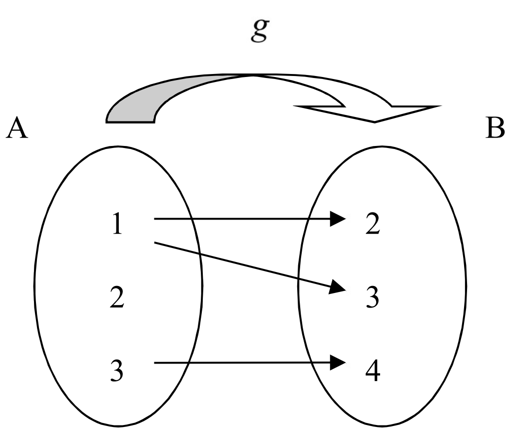
Definición: Si A y B son dos conjuntos no vacíos y f es una ley que *a cada* elemento de A le hace corresponder *un único* elemento de B, decimos que la terna (A, B, f) es una **función** de A en B.

Se simboliza: $f : A \to B$

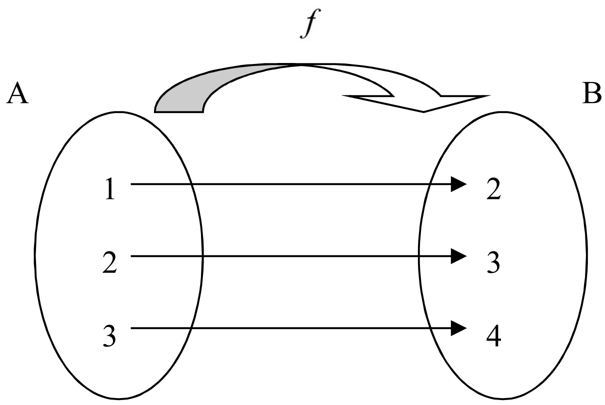
Ejemplos:



h es una función



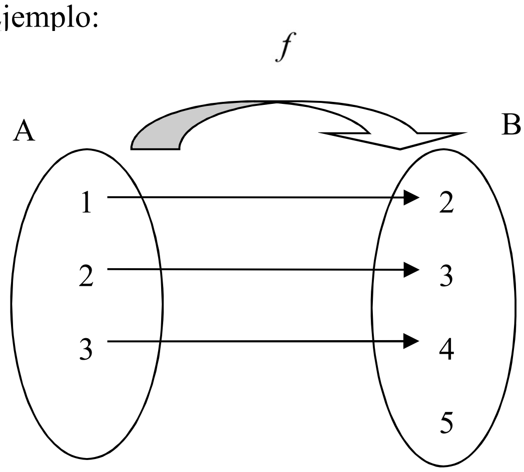
g no es una función



f es una función que tiene por ley: $f(a) = a + 1$

Los conjuntos A y B son llamados **dominio** y **codominio** de la función respectivamente. El conjunto **imagen o recorrido** de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(a)$ (se lee f de a), conforme "a" varía en todo el dominio A, es decir Imf $= \{f(a), a \in A\}$. Se dice que $b \in B$ es la imagen de $a \in A$ (o que a es una preimagen de b) y lo simbolizamos $b = f(a)$, si b es el correspondiente de a por la ley f.

Ejemplo:



$Df = \{1,2,3\}, \quad Cf = \{2,3,4,5\}, \quad \operatorname{Im} f = \{2,3,4\}$

$f = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

$f(1) = 2, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 4$

La preimagen de 2 *es* 1

Propuesta 2. Resuelve el ejercicio 2.

Consideraremos funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales, llamadas **funciones reales**. La ley se da por una o más fórmulas que expresan la relación que existe entre los elementos del dominio (variables independientes) y los del codominio (variables dependientes) a los que se simboliza con x e y respectivamente.

Para dar una función solo se explicitará la ley f, aceptando que su **dominio** es el conjunto de todos los números reales x tales que existe $f(x)$ y su **codominio** es **R**.

$Df = \{x \in R / \exists\, f(x)\}$ $\quad Cf = R$

Notas:

- Cada elemento del dominio de una función tiene una y sola una imagen en el recorrido.

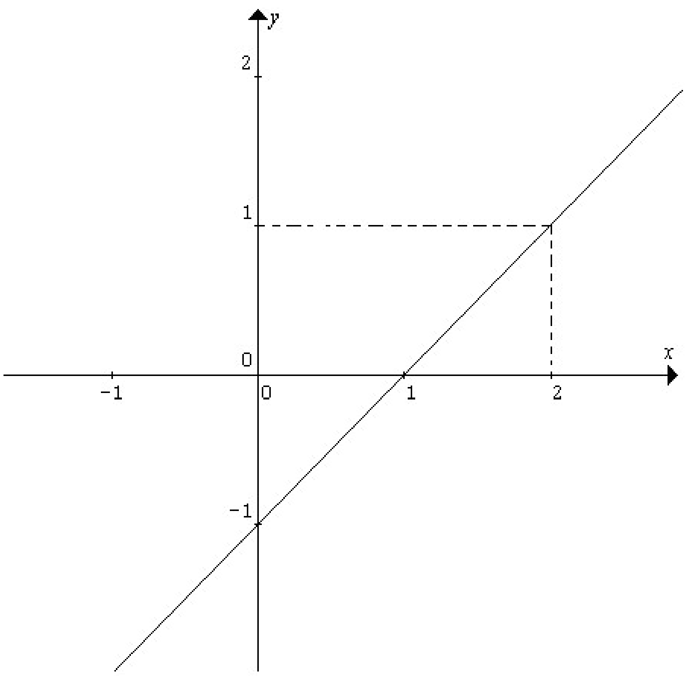
- Un elemento del recorrido puede ser imagen de más de un elemento del dominio, es decir puede tener más de un preimagen. (Observar la función h)

En la representación en ejes cartesianos:

Dominio $\longleftrightarrow$ eje x (eje de abscisas)

Imagen $\longleftrightarrow$ eje y (eje de ordenadas)

Ejemplo: $f(x) = x - 1$



$Df = R$

$\operatorname{Im} f = R$

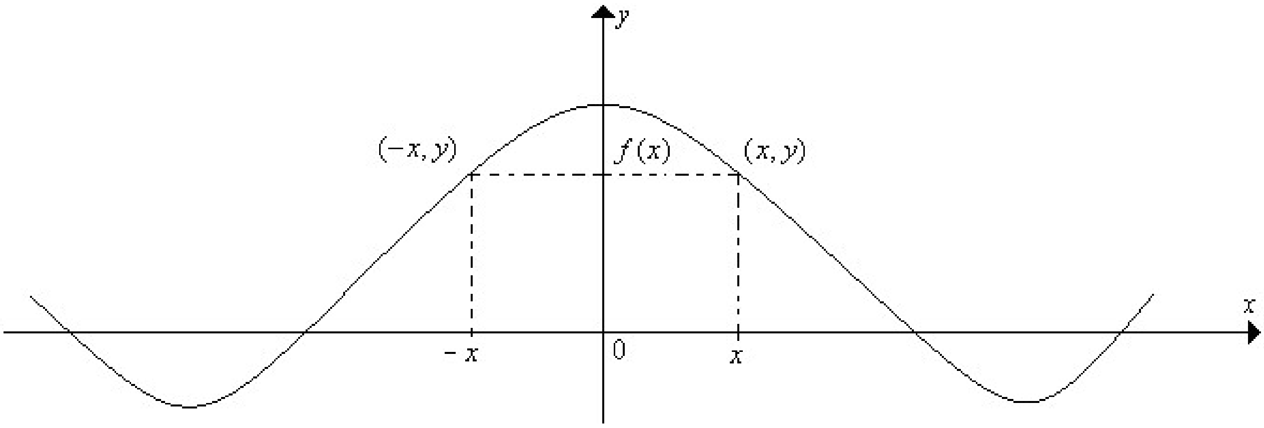
$f(0) = -1$

la preimagen de 1: $\quad x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$

Paridad. Sea f una función:

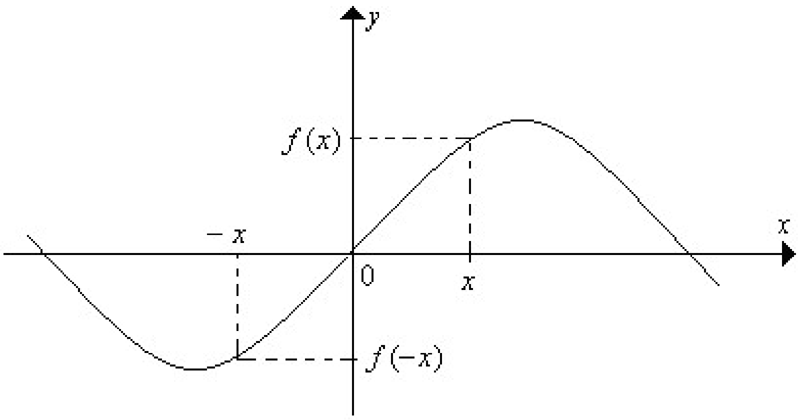
f es **par** si $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in Df$

La gráfica de una función par es simétrica respecto del eje y. Si trazamos la gráfica de f para $x \geq 0$, obtenemos toda la gráfica con solo reflejar con respecto al eje y.



f es **impar** si $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in Df$

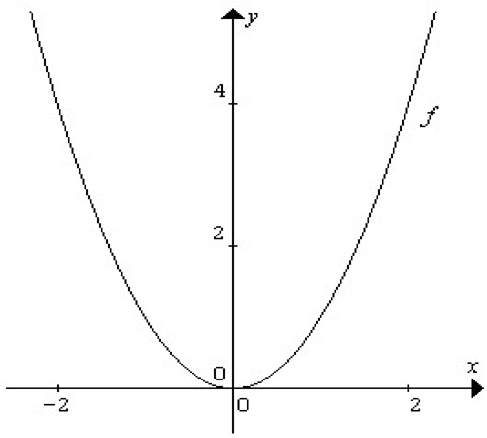
La gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen. Si trazamos la gráfica de f para $x \geq 0$, obtenemos toda la gráfica al hacerla girar 180º alrededor del origen.



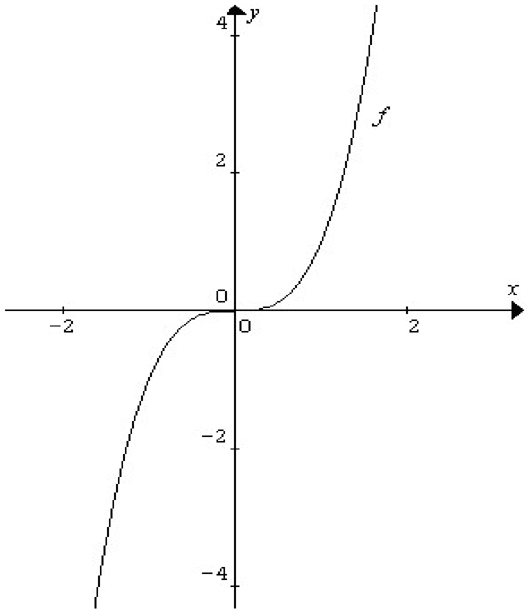
Ejemplo1:

$f(x) = x^2 \qquad Df = R$

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \quad \therefore f \; es \; par$



Ejemplo 2:



$f(x) = x^3 \qquad Df = R$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

$\therefore f$ *es impar*

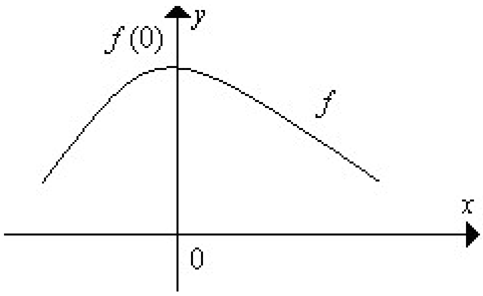
Ejemplo3:

$f(x) = x - 1, \quad Df = R. \quad g(x) = x^2 \; en \; [-2,4]$

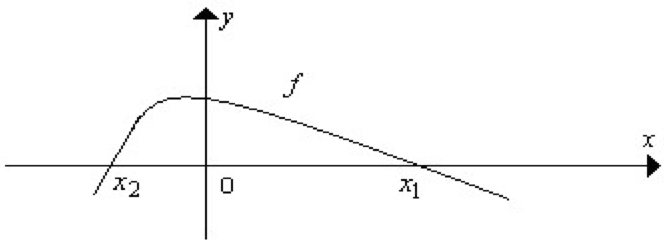
f y g no son funciones pares ni impares.

Intersecciones con los ejes coordenados

Intersección con el eje y: se obtiene para $x = 0$. Si existe, es única. $P(0, f(0))$.



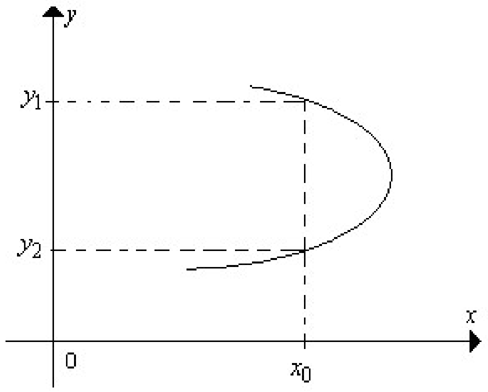
Intersección con el eje x: puntos del dominio, donde el valor de la función es cero. Reciben el nombre de ceros o raíces de la función. $P(x_0, 0)$.



La gráfica de una función puede intersecar al eje y a lo suma una vez, pero puede cortar al eje x más de una vez.

Cualquier recta paralela al eje y corta a la gráfica de una función a lo sumo en un solo punto.

La siguiente gráfica no corresponde a una función:

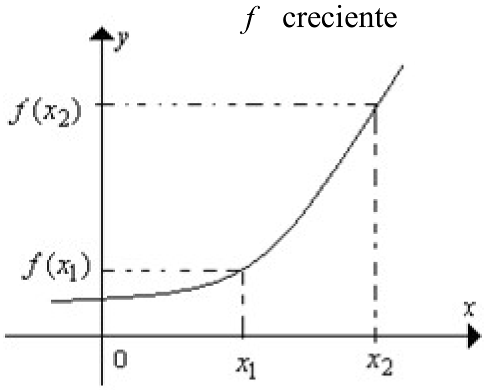


Funciones creciente y decrecientes

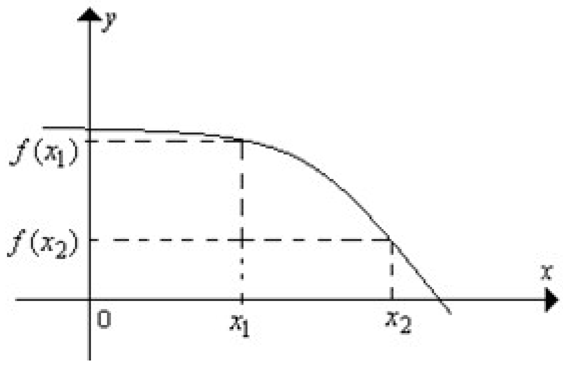
Se dice que una función f es **creciente** sobre un intervalo I (de números reales) $si \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I$

Se dice que f es **decreciente** en I: $si \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I$

f creciente



f decreciente



Ejemplo 1: $f(x) = x^2$ *es creciente en* $[0,+\infty)$ *y decreciente en* $(-\infty,0]$.

Ejemplo 2:

$f(x) = 2x+1 \qquad Df = R \qquad x_1, x_2 \in Df$

$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Luego f es creciente en su dominio.

Ejemplo 3:

$f(x) = -3x+2 \qquad Df = R \qquad x_1, x_2 \in Df$

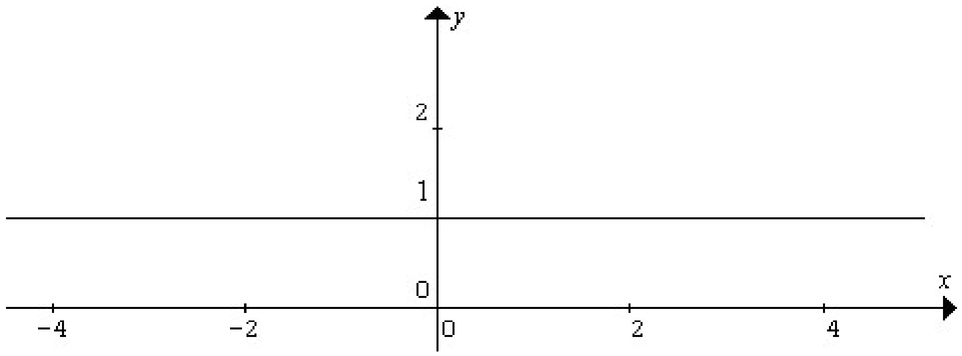
$x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2 \Rightarrow -3x_1 + 2 > -3x_2 + 2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Luego f es decreciente en su dominio.

Algunos tipos de funciones

Función constante: $f(x) = c, \quad c \in R, \quad \forall x \in R$

Ejemplo:



$f(x) = 1$

$Df = R$

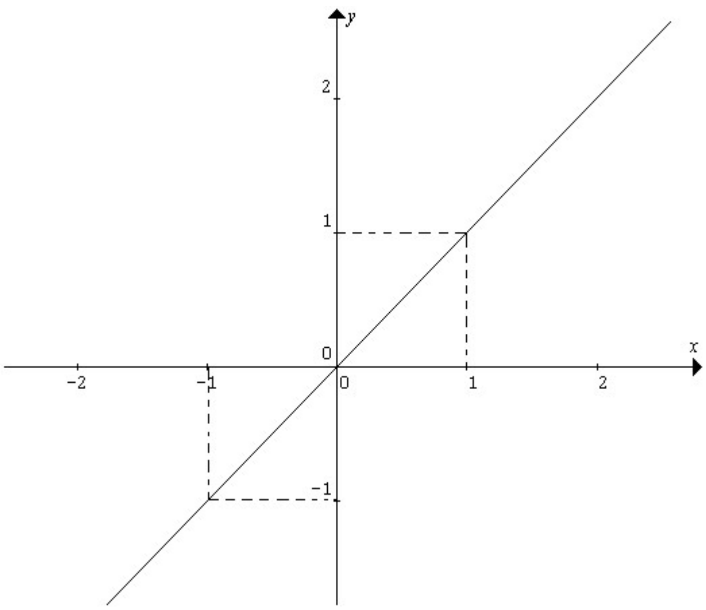
$\operatorname{Im} f = \{1\}$

Función identidad:

$f(x) = x$

$Df(x) = R$

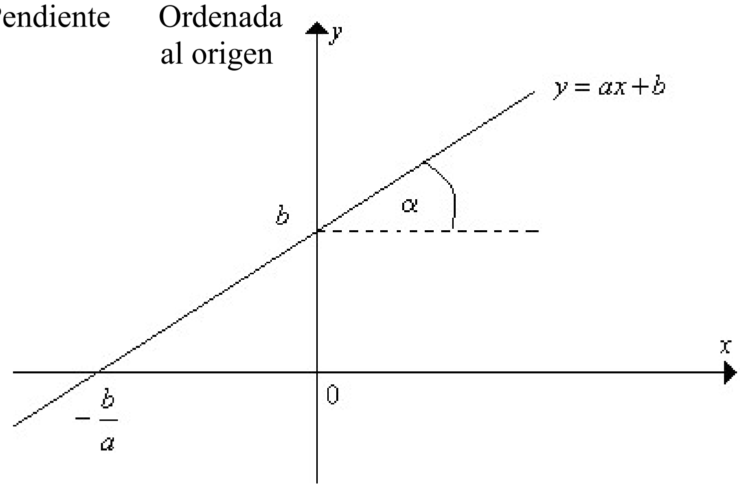
$\operatorname{Im} f = R$



Función lineal:

$f(x) = ax + b \qquad a, b \in R$

Pendiente Ordenada al origen



$Df = R, \qquad \operatorname{Im} f = R$

$(0, b) \quad \left(-\frac{b}{a}, 0\right) \qquad a \neq 0$

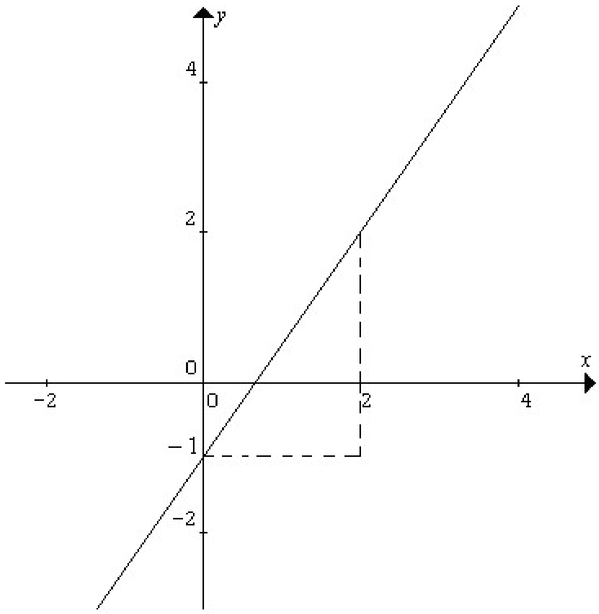
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - b}{-\frac{b}{a}} = a = tg\alpha$$

$0 < \alpha < 90^\circ \Leftrightarrow tg\alpha > 0 \Leftrightarrow a > 0$

$90^\circ < \alpha < 180^\circ \Leftrightarrow tg\alpha < 0 \Leftrightarrow a < 0$

$tg180^\circ = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Ejemplo: $f(x)=\dfrac{3}{2}x-1$



$Df(x)=R$

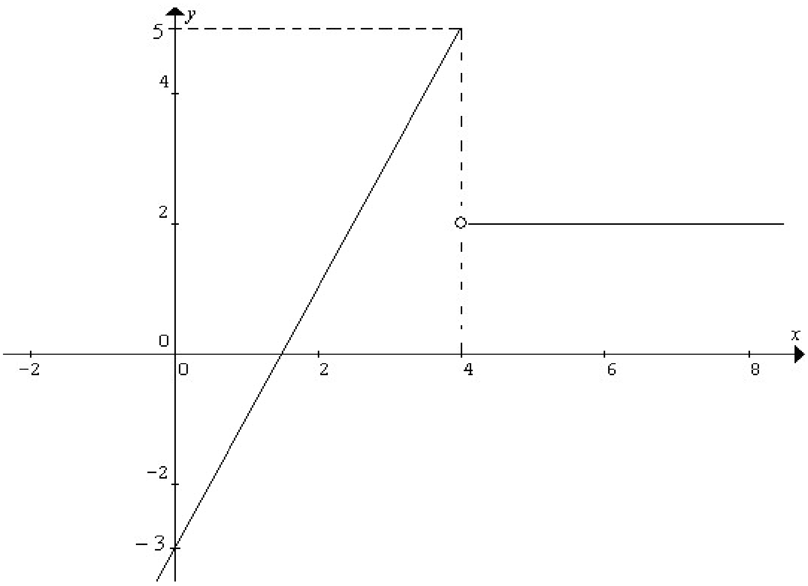
$\operatorname{Im} f = R$

$a = tg\alpha = \dfrac{CO}{CA} = \dfrac{3}{2}$

a partir de $(0,-1)$ *se construye un triángulo de* $CA = 2$ *y* $CO = 3$

Función definida por secciones

Ejemplo:



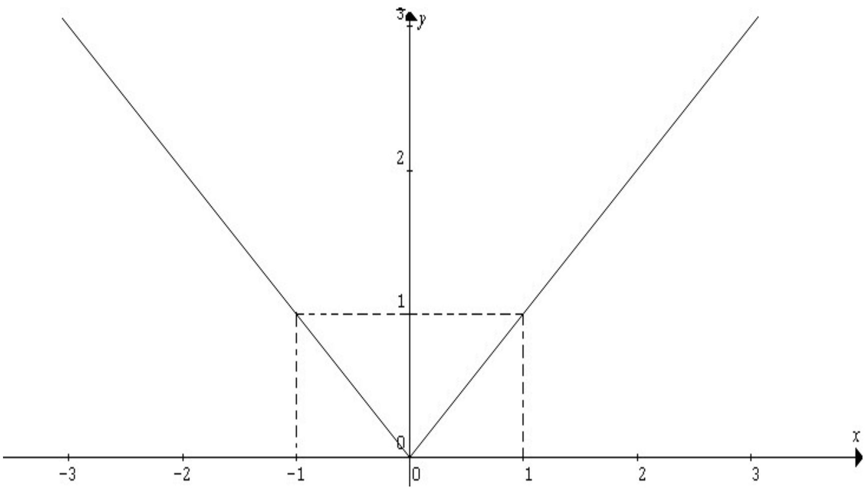
$$h(x)=\begin{cases}2x-3 & si \quad x\le 4\\ 2 & si \quad x>4\end{cases}$$

$Df = R \qquad \operatorname{Im} h = (-\infty,5]$

$h(0) = 2.0-3 = -3$

preimagen de $5: x = 4$

Función valor absoluto:



$$f(x)=|x|=\begin{cases}x & si\ x\ge 0\\ -x & si\ x<0\end{cases}$$

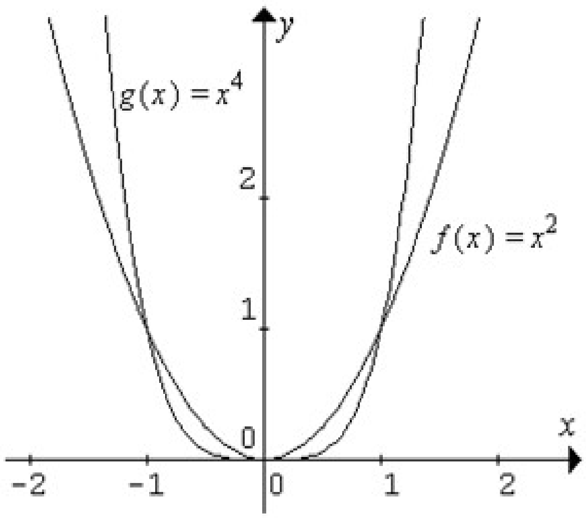
$Df = R$

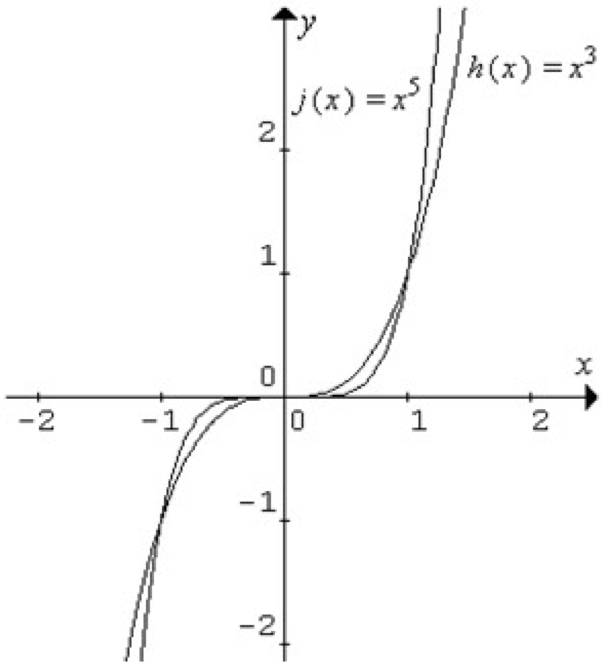
$\operatorname{Im} f = R_0^+$

<u>Funciones de potencia</u>: $f(x) = x^a$ donde a es una constante.

Consideremos algunos casos:

a) a = n, n entero positivo.

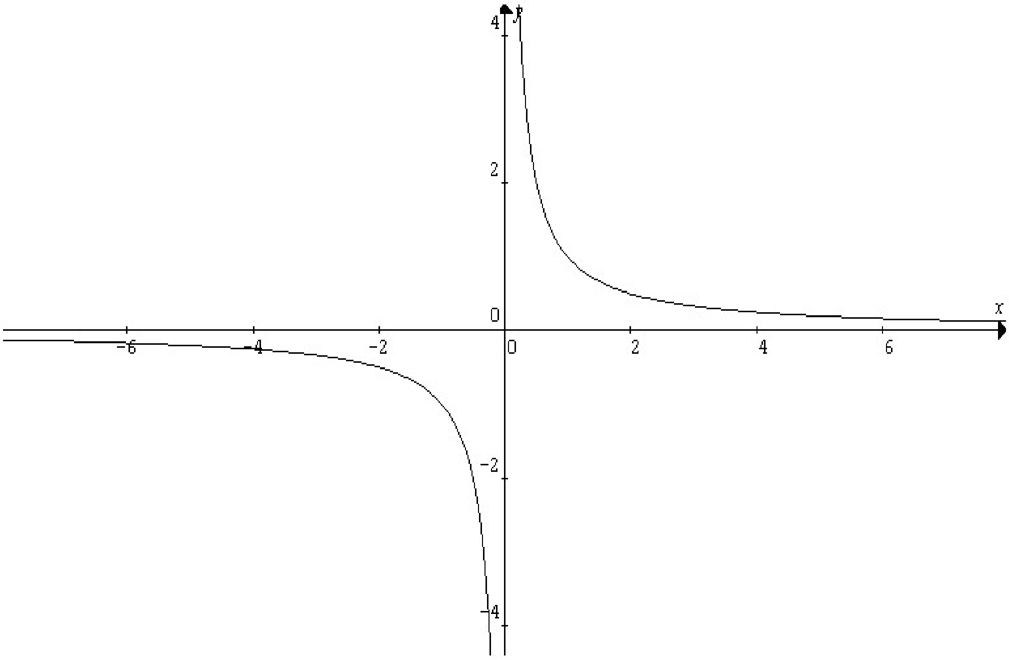




$Df = R$, $Dg = R$, $\operatorname{Im} f = R_0^+$, $\operatorname{Im} g = R_0^+$

$Dh = R$, $Dj = R$, $\operatorname{Im} h = R$, $\operatorname{Im} j = R$

b) a = -1, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $Df = R - \{0\}$ $\operatorname{Im} f = R - \{0\}$



x	**y**
1	1
2	1/2
3	1/3
1/2	2
1/3	3
1/4	4
-1	-1
-2	-1/2
-3	-1/3

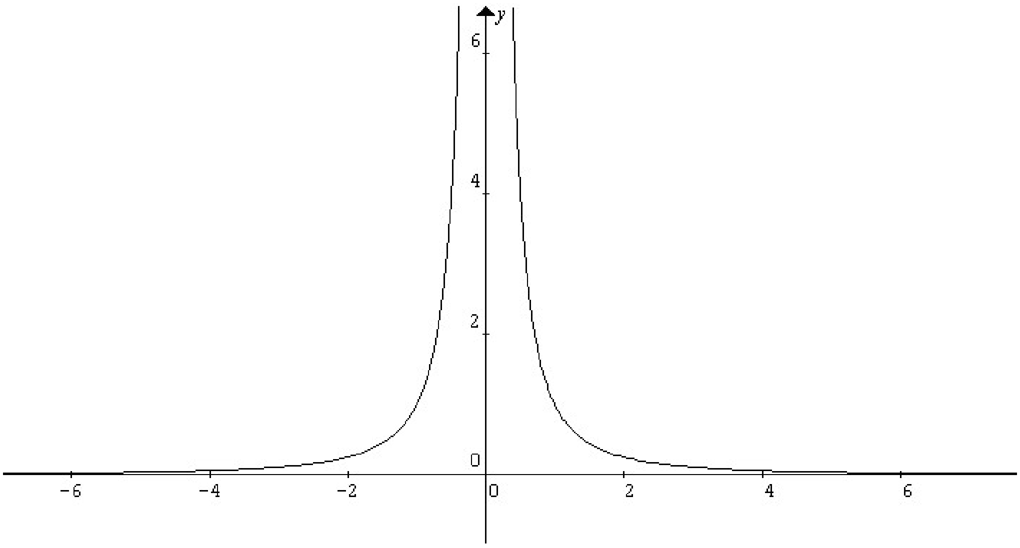
<u>Nota</u>: las tablas de valores sólo ayudan a realizar las representaciones gráficas de funciones con un comportamiento muy particular, no son una buena opción en la mayoría de los casos. Se debe ser prudente con su utilización.

$a = -2$

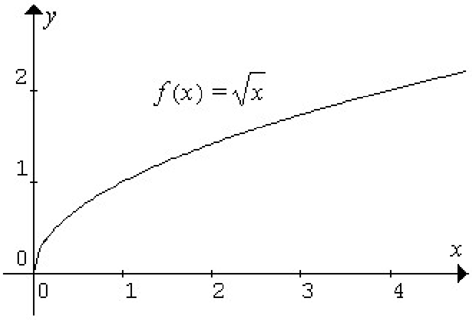
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

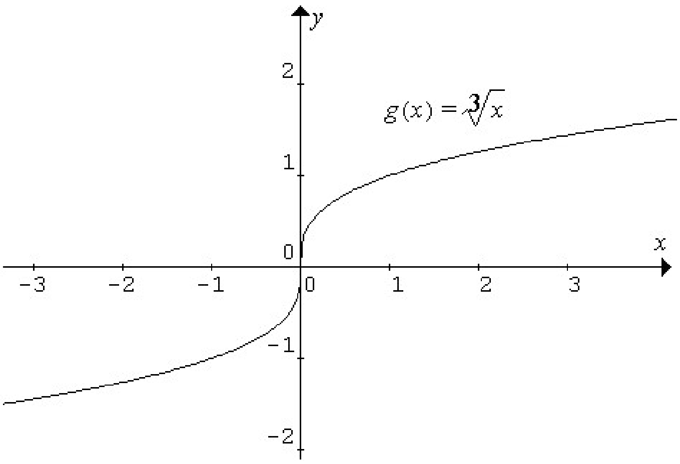
$Df = R - \{0\}$

$\operatorname{Im} f = R^+$



c) $a = ½$, $a = 1/3$





$Df = R_0^+ = \operatorname{Im} f$ $\quad$ $Dg = R,\ Img = R$

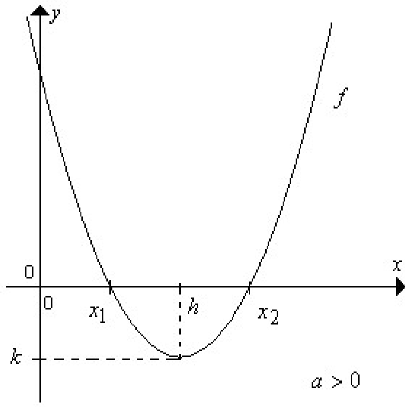
<u>Función cuadrática</u>: $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a,b,c \in \Re, \quad a \neq 0 \qquad Df = R$

$f(x) = a(x-h)^2 + k$, $\quad f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (Para profundizar las ideas ver en el apéndice: Ecuación cuadrática)

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\quad y \quad$ $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ son llamadas raíces o ceros de la función

Vértice: $V\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)\right) = \left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}\right) = (h,k)$

Eje de simetría la recta de ecuación $x = h = \frac{-b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2}$



$Si\ a > 0 \Rightarrow$ las ramas de la parábola quedarán hacia arriba ya que $(x-h)^2 > 0\ y\ k$ es la ordenada al origen.

$Si\ a < 0 \Rightarrow$ las ramas de la parábola quedarán hacia abajo.

Ejemplos:

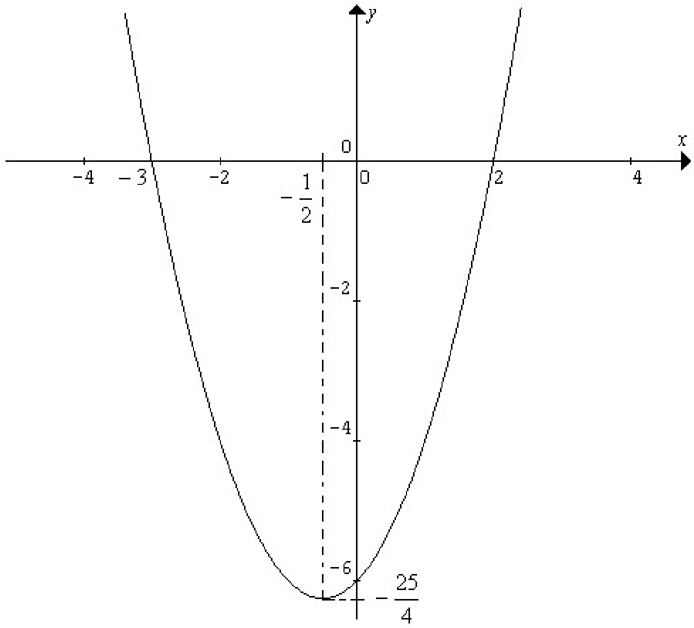
1)

$f(x) = x^2 + x - 6$

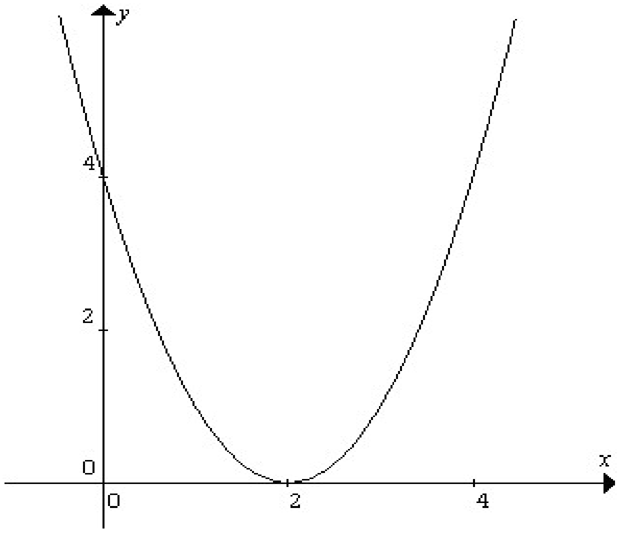
$a = 1 > 0,$

$x_1 = 2, \quad x_2 = -3,$

$V\left(\frac{-1}{2}, \frac{-25}{4}\right)$



2) $f(x) = x^2 - 4x + 4, \quad x_1 = x_2 = 2$



3) $g(x)=x^2-2x+5 \qquad a=1>0$,

No tiene raíces reales.

Completando cuadrados:

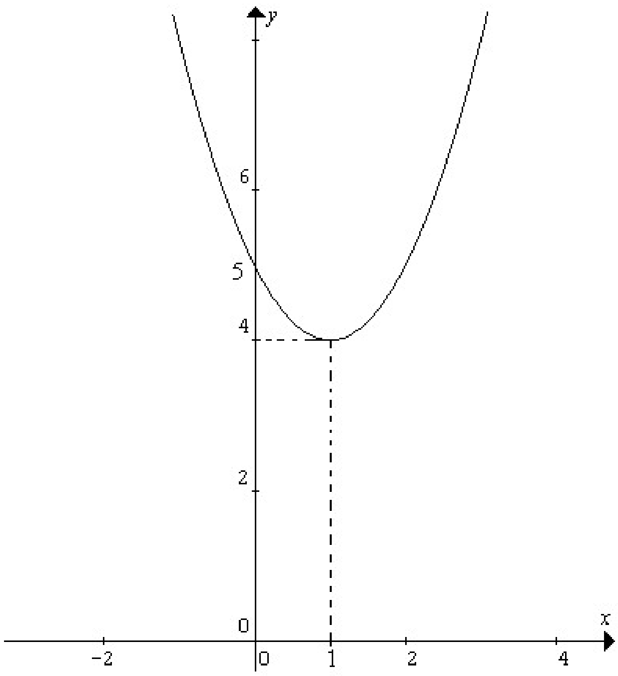
$g(x)=x^2-2x+1-1+5=$

$=x^2-2x+1+4=$

$=(x-1)^2+4,$

$V(1,4)$

Intersección con el eje y: $(0,5)$



Función polinómica:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0 \qquad n\in N_0,\quad a_n\in R,\quad a_n\neq 0,\quad Df=R$$

Casos particulares: funciones lineales y cuadráticas.

Función racional:

$$f(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_2x^2+b_1x+b_0} \qquad n,m\in N_0,\ a_n,b_m\in R,\ a_n\neq 0,\ b_m\neq 0$$

El dominio de f excluye los valores que anulen el denominador.

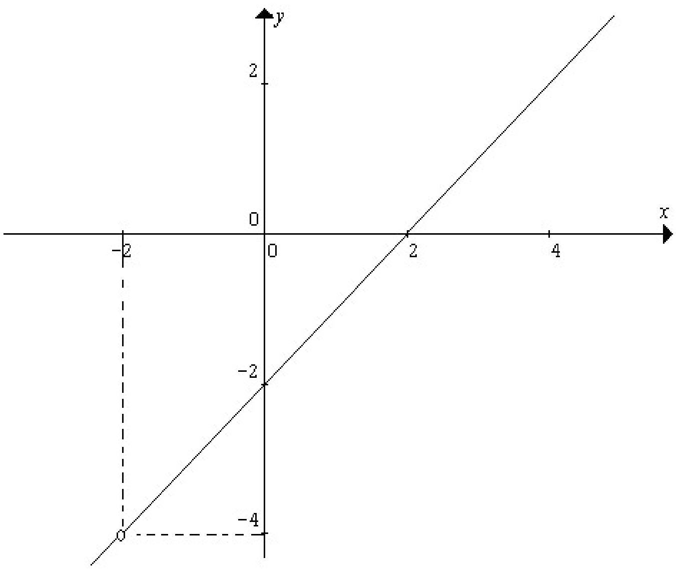
Ejemplo 1:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$$

$Df=R-\{-2\}$

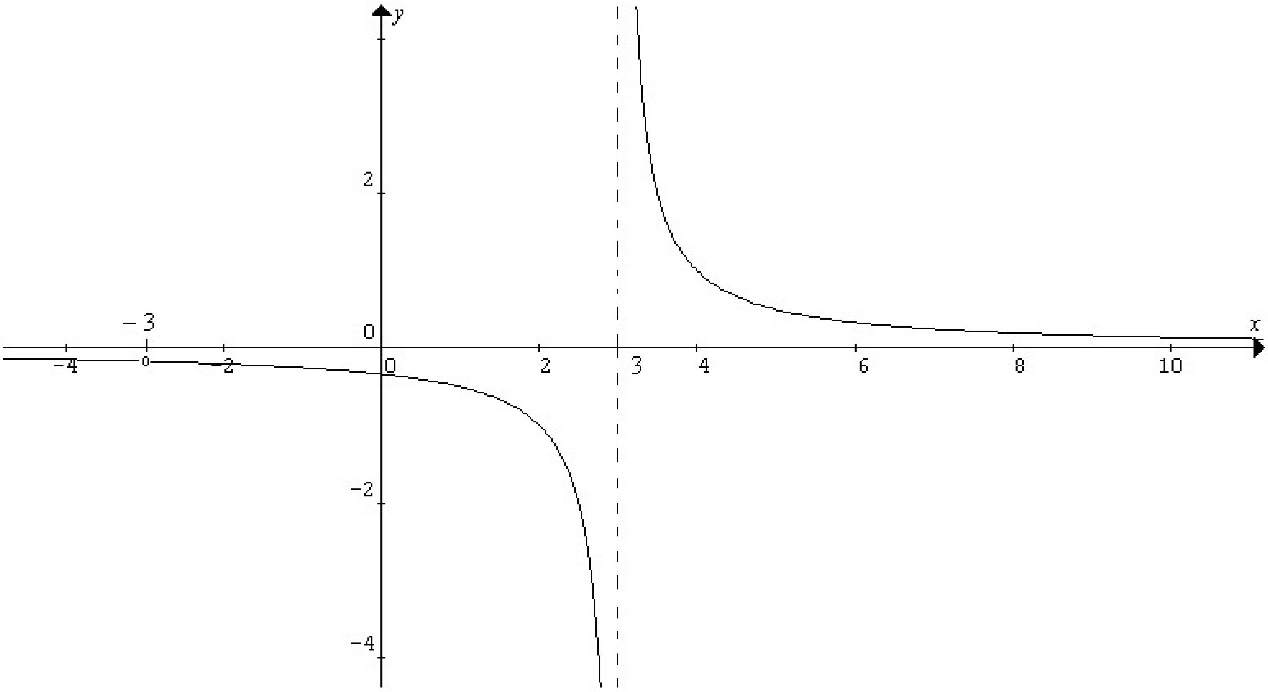
$$\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}=x-2,\quad x\neq -2$$

$\operatorname{Im} f=R-\{-4\}$



Ejemplo 2: $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-9}$ $\qquad Df=R-\{-3,3\}$ $\qquad \operatorname{Im} f=R-\left\{0,-\dfrac{1}{6}\right\}$

$$\frac{x+3}{x^2-9}=\frac{x+3}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{x-3} \qquad x\neq 3,\quad x\neq -3$$

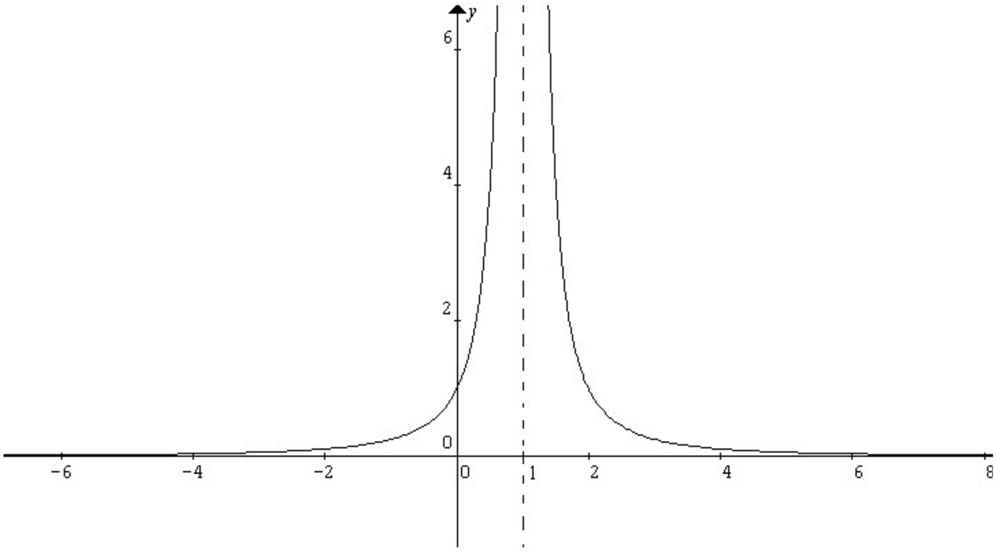


Ejemplo 3:

$$f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$Df=R-\{1\}$$

$$\operatorname{Im} f=R^{+}$$



Funciones algebraicas:

Una función recibe el nombre de algebraica si puede construirse usando operaciones algebraicas (adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíz) a partir de polinomios. Cualquier función racional es algebraica.

Ejemplos: $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $g(x)=\sqrt[3]{x}(x-4)$, $h(x)=\dfrac{x^4-16x^2}{x+\sqrt{x}}$

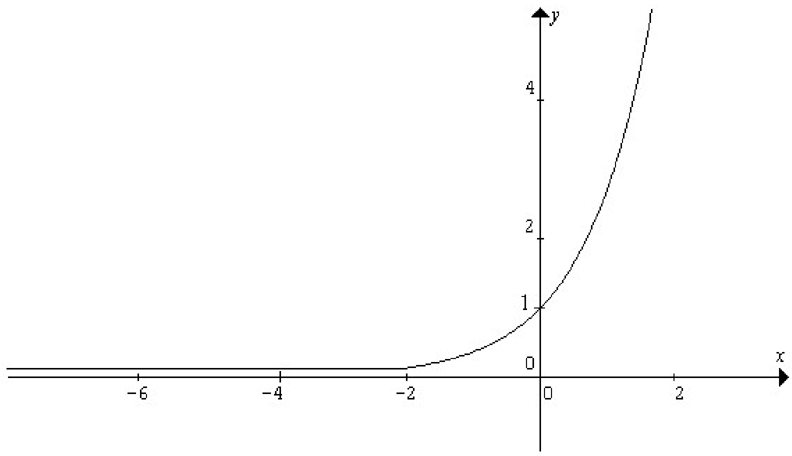
Funciones exponenciales: $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$ (a constante)

Ejemplo 1:

$f(x)=e^x$

$Df=R$

$\operatorname{Im} f=R^+$



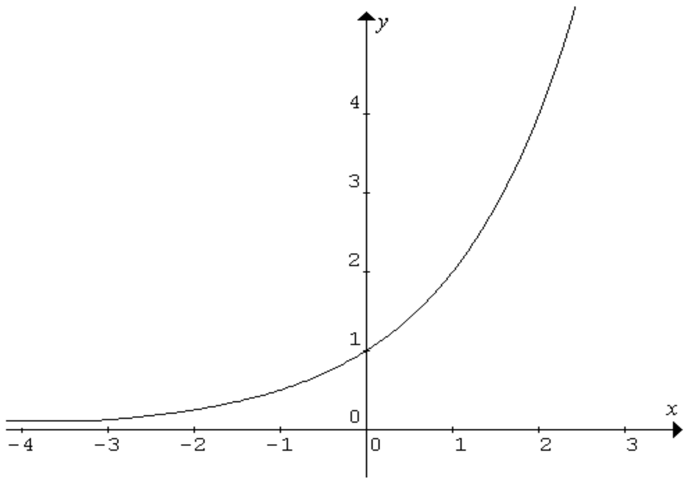
x	**y**
-3	$e^{-3}=\dfrac{1}{e^3}$
-2	$e^{-2}=\dfrac{1}{e^2}$
-1	$e^{-1}=\dfrac{1}{e}$
0	$e^0=1$
1	$e^1=e$
2	e^2
3	e^3

Ejemplo 2:

$f(x)=2^x$

$Df=R$

$\operatorname{Im} f=R^+$

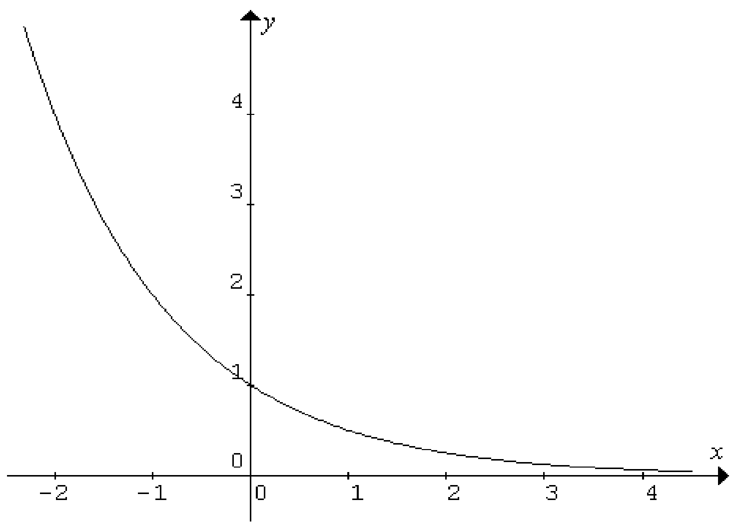


Ejemplo 3:

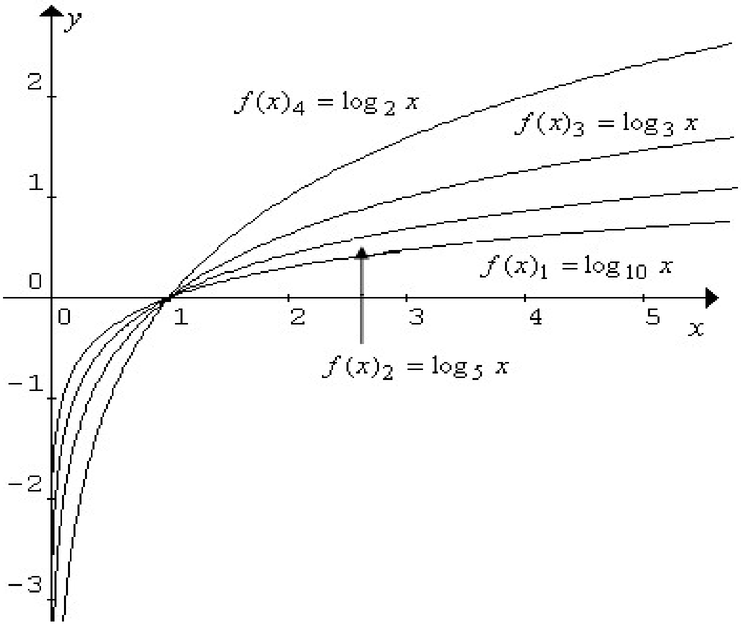
$f(x)=(1/2)^x$

$Df=R$

$\operatorname{Im} f=R^+$



<u>Funciones logarítmicas</u>: $f(x)=\log_a(x), \quad a>0, \quad a\neq 1$ (a constante) $\quad \log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$



$Df_1 = Df_2 = Df_3 = Df_4 = R^+$

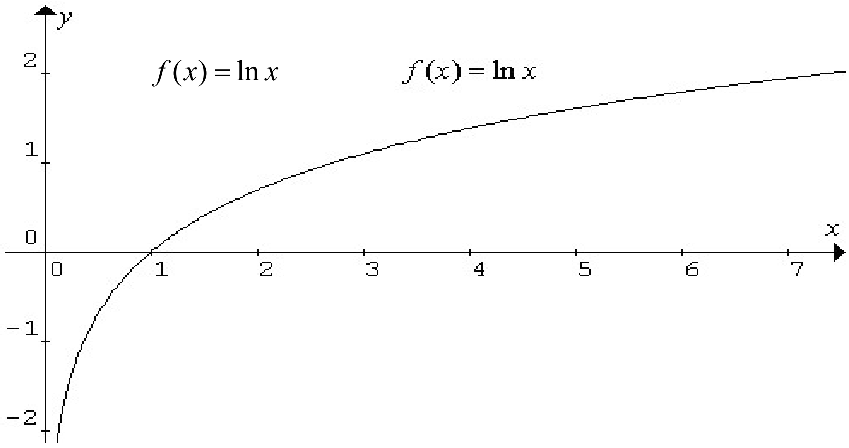
$\operatorname{Im} f_1 = \operatorname{Im} f_2 = \operatorname{Im} f_3 = \operatorname{Im} f_4 = R$

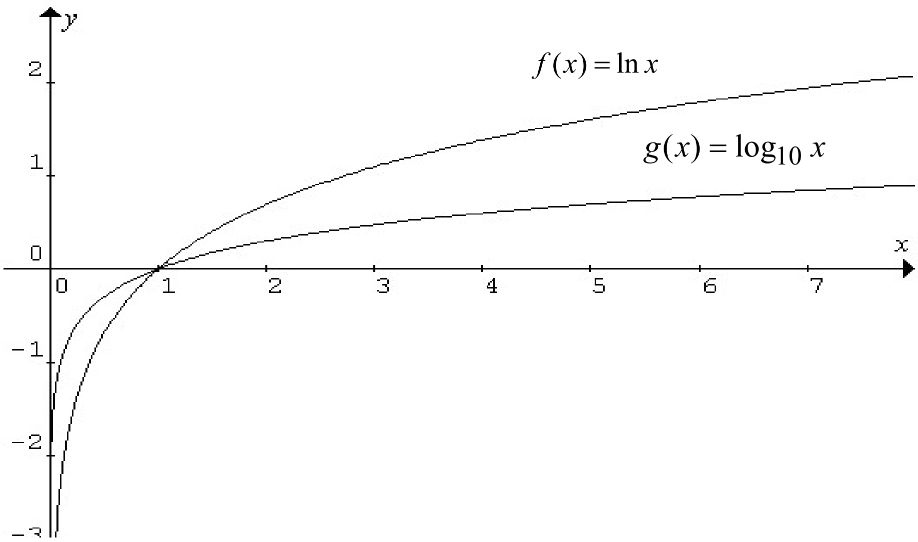
$\log_e x = \ln x$

$f(x) = \ln x$

$Df = R^+$

$\operatorname{Im} f = R$

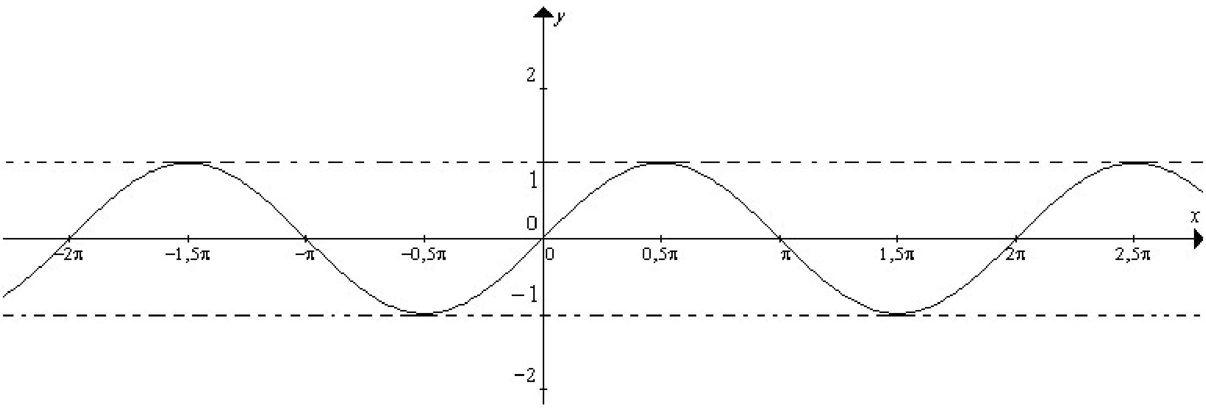




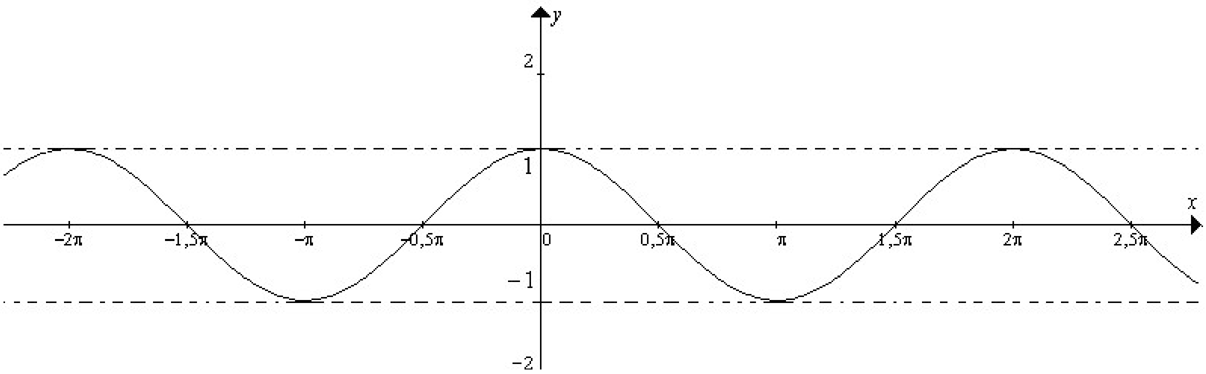
<u>Nota</u>: para repasar propiedades de exponencial y logaritmo ver el apéndice.

<u>Algunas funciones trigonométricas</u>: (Para ampliar el tema ver en el apéndice: Trigonometría).

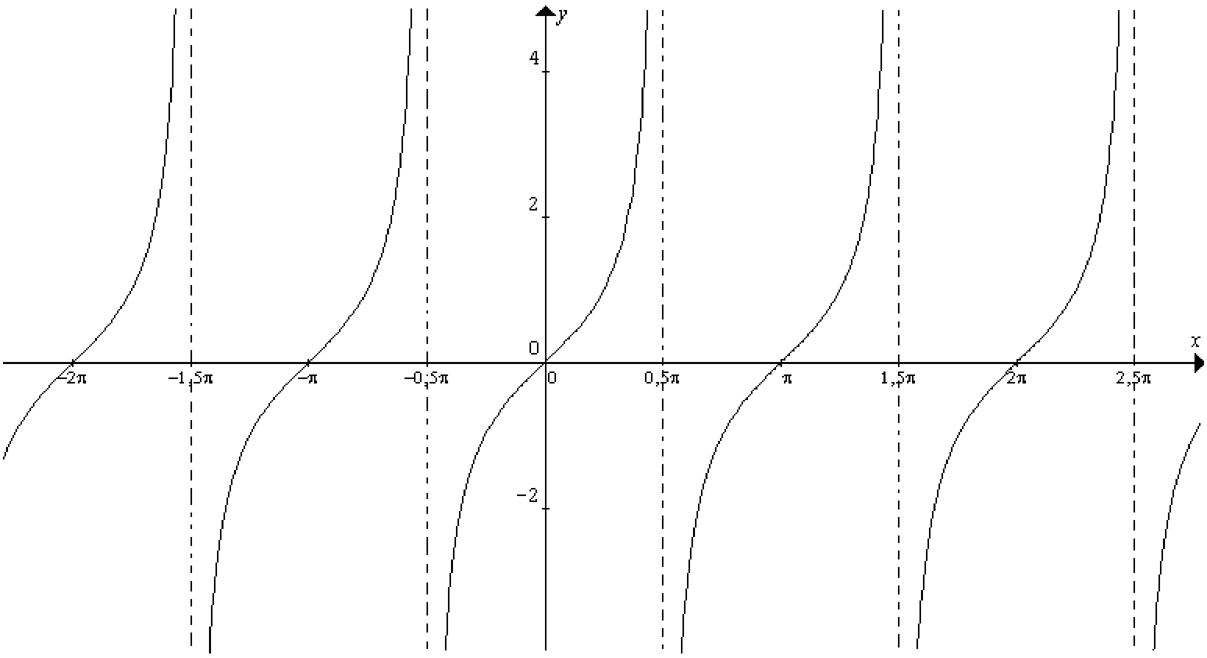
$f(x) = senx \qquad Df = R \qquad \operatorname{Im} f = [-1,1]$



$f(x) = \cos x \qquad Df = R \qquad \operatorname{Im} f = [-1,1]$



$f(x) = \tan x \qquad Df = R - \left\{ \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots \right\} \qquad \operatorname{Im} f = R$



Propuesta 3. Resuelve los ejercicios 3, 4 y 5.

Álgebra de funciones. Sean f y g dos funciones

- Igualdad de funciones: $f = g \Leftrightarrow Df = Dg \ \wedge \ \forall x \in Df : f(x) = g(x)$

Ejemplo: $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$, $\quad g(x) = x + 3$, $\quad h(x) = x + 3 \quad si\ x \neq 3$

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3$$

f y g no son iguales pues $Df = R - \{3\}\ y\ Dg = R$ $\quad$ h y f si son funciones iguales.

- Sean f y g dos funciones entonces las funciones $f + g,\ f - g\ ,\ f.g\ ,\dfrac{f}{g}$ se definen:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad x \in D_{f+g} = Df \cap Dg$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \qquad x \in D_{f-g} = Df \cap Dg$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x).g(x) \qquad x \in D_{f.g} = Df \cap Dg$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad x \in D_{f/g} = Df \cap Dg - \{x / g(x) = 0\}$$

Ejemplos:

a) *Sean* $\quad f(x) = \sqrt{x} \quad y \quad g(x) = \sqrt{2 - x} \qquad Df = R_0^+, \qquad Dg = (-\infty, 2]$

$$(f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x} \qquad D_{f+g} = [0,2] = D_{f-g} = D_{f.g}$$

$$(f-g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{2-x} \qquad (f.g)(x) = \sqrt{x}\sqrt{2-x} = \sqrt{x(2-x)} = \sqrt{2x - x^2}$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}} \qquad \frac{g}{f}(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}} \qquad D_{\frac{f}{g}} = [0,2) \qquad D_{\frac{g}{f}} = (0,2]$$

b) *Sean* $\quad h(x) = \dfrac{1}{x} \quad y \quad r(x) = \dfrac{-1}{x} \qquad Dh = R - \{0\} = Dr$

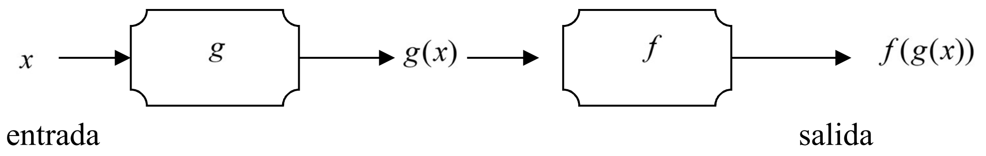
$$(h+r)(x) = 0 \qquad D_{h+r} = R - \{0\}, \quad (h-r)(x) = \frac{2}{x} \qquad D_{h-r} = R - \{0\}$$

Propuesta 4. Resuelve el ejercicio 6.

<u>Composición de funciones</u>. Dadas dos funciones f y g, la función compuesta $f \circ g$ está definida por: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g tales que $g(x)$ esté en el dominio de f. Es decir $f \circ g$ está definida siempre que $g(x)$ y $f(g(x))$ lo están.

$D_{f \circ g} = \{x \in Dg \, / \, g(x) \in Df\}$



<u>Ejemplo 1</u>: $f(x) = 3x$ $Df = R$ $g(x) = \sqrt{x}$ $Dg = R_0^+$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 3.\sqrt{x}$ $D_{f \circ g} = \{x \in R_0^+ \, / \, \sqrt{x} \in R\} = R_0^+$

<u>Ejemplo 2</u>: $f(x) = x^2$ $Df = R$ $g(x) = \sqrt{x}$ $Dg = R_0^+$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = x$ $D_{f \circ g} = \{x \in R_0^+ \, / \, \sqrt{x} \in R\} = R_0^+$

$(g \circ f) = g(f(x)) = g(x^2) = |x|$ $D_{g \circ f} = \{x \in R \, / \, x^2 \in R_0^+\} = R$

<u>Ejemplo 3</u>: $f(x) = \sqrt{x-1}$ $Df = [1, +\infty)$ $g(x) = \ln x$ $Dg = R^+$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-1}) = \ln(\sqrt{x-1})$ $D_{g \circ f} = \{x \in [1, +\infty) / \sqrt{x-1} \in R^+\} = (1, +\infty)$

<u>Propuesta 5</u>. Resuelve los ejercicios 7 y 8.

<u>Función uno a uno</u>

Se dice que una función es **uno a uno** si nunca toma el mismo valor dos veces**.**

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in Df \quad o \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in Df$$

Geométricamente si f es uno a uno, asigna a elementos diferentes del dominio elementos diferentes del recorrido. Cualquier recta paralela al eje x corta al gráfico de f a lo sumo en un punto.

<u>Ejemplos</u>: $f(x) = |x|, \quad g(x) = x^2$ *no son funciones uno a uno, pero sí lo son en* R_0^+.

Es decir puedo restringir el dominio de una función y obtener una función uno a uno.

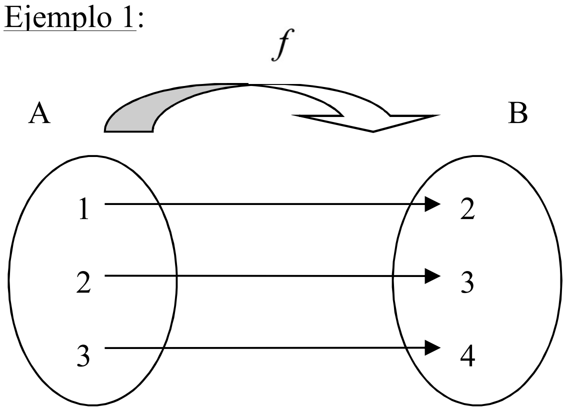
Cualquier función lineal es uno a uno.

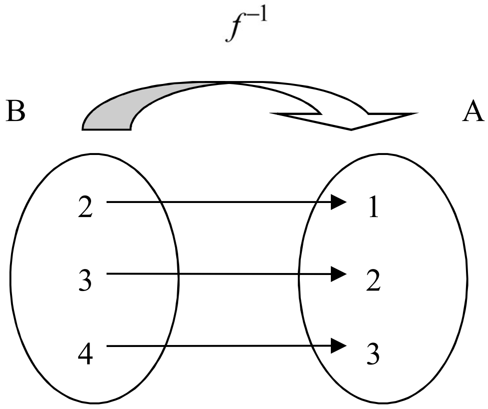
Función inversa

Sea f una función uno a uno con dominio A e imagen B. Entonces su **función inversa** f^{-1} tiene dominio B e imagen A y se define $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y \quad \forall y \in B$.

$\forall x \in A \quad \forall y \in B \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad \wedge \quad f(f^{-1}(y)) = y$

Ejemplo 1:





$Df = \{1,2,3\} \quad \operatorname{Im} f = \{2,3,4\}$

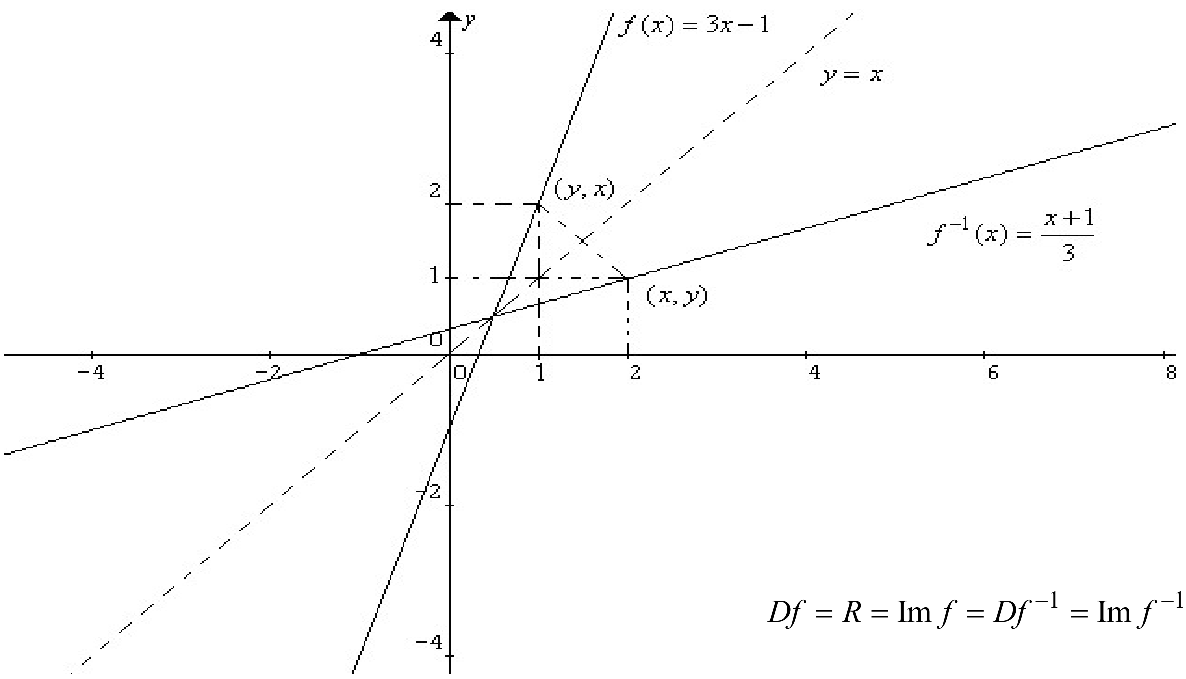
$f(x) = x + 1 \qquad f \; es \, 1 \, a \, 1$

$Df^{-1} = \{2,3,4\} \quad \operatorname{Im} f^{-1} = \{1,2,3\}$

$f^{-1}(x) = x - 1$

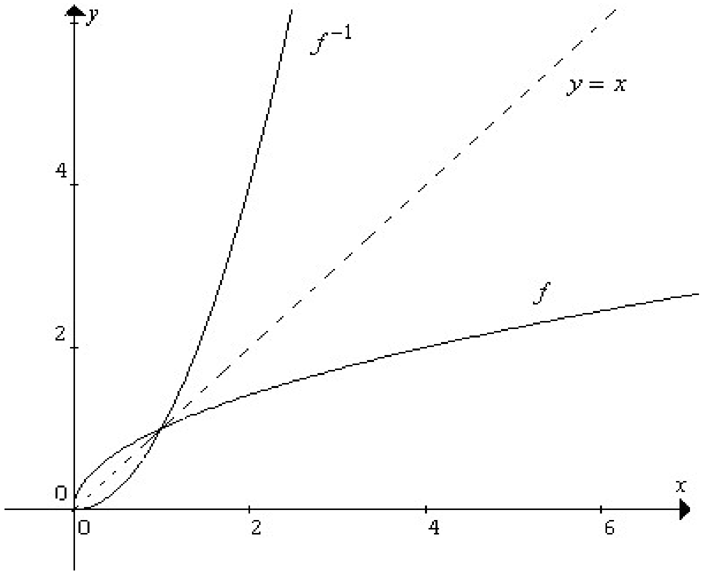
Ejemplo 2: $f(x) = 3x - 1$ (f es 1 a 1) si despejamos $x = \dfrac{y+1}{3}$ y cambiamos x por y (para trabajar con la notación habitual) resulta $y = \dfrac{x+1}{3}$ obteniendo así $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3}$

El gráfico de f^{-1} puede construirse mediante simetría del gráfico de f respecto de la recta $y = x$.



$Df = R = \operatorname{Im} f = Df^{-1} = \operatorname{Im} f^{-1}$

Ejemplo 3:



$f(x) = \sqrt{x}$

$Df = \operatorname{Im} f = R_0^+$

$x_1, x_2 \in Df$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$\therefore f \; es \; 1 \; a \; 1$

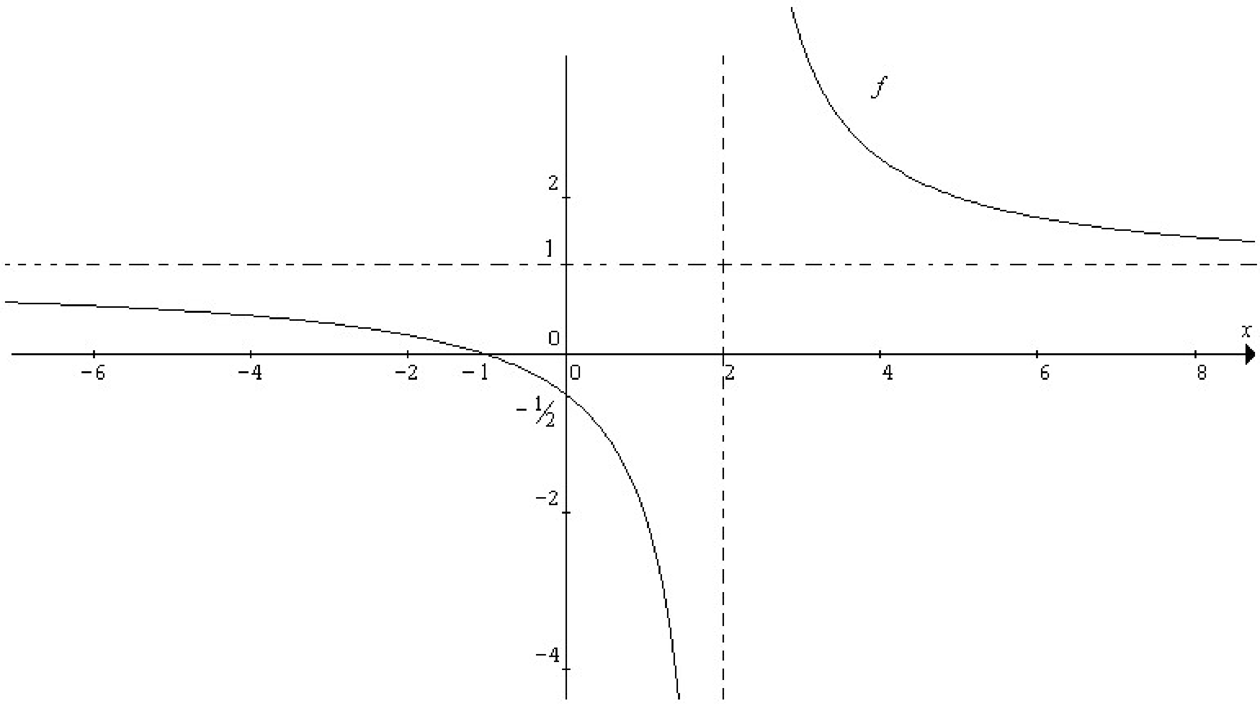
$f^{-1}(x) = x^2 \quad si \; x \geq 0$

$Df^{-1} = \operatorname{Im} f^{-1} = R_0^+$

Ejemplo 4: $\quad f(x) = \dfrac{x+1}{x-2} \qquad Df = R - \{2\} = \operatorname{Im} f^{-1}$

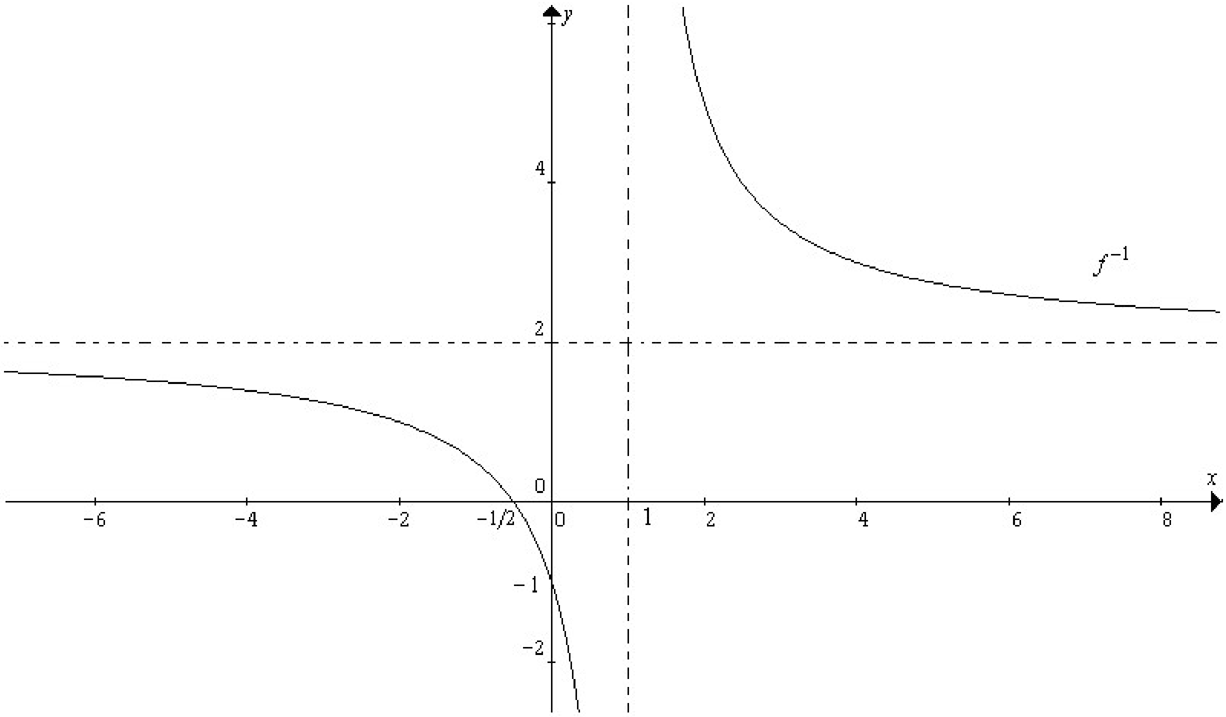
$$\begin{array}{r|l} x+1 & x-2 \\ \hline -\;(x-2) & 1 \\ \hline 3 & \end{array}$$

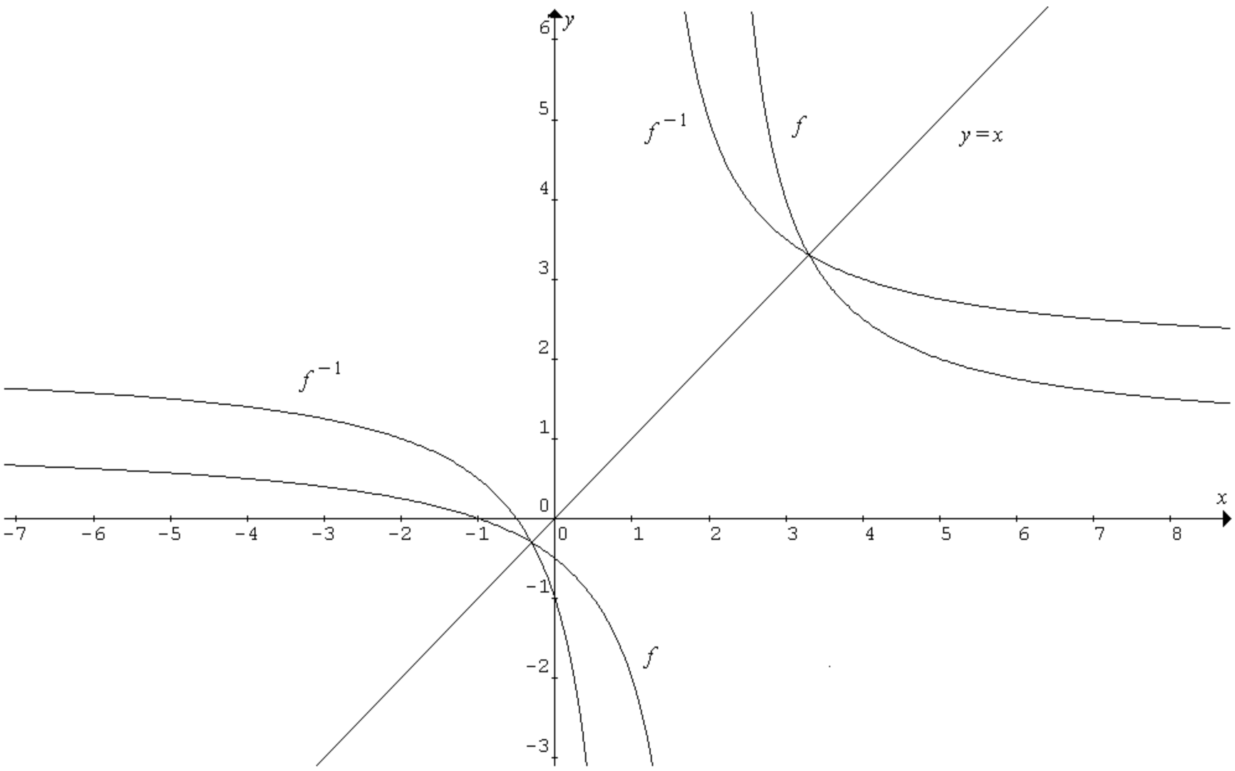
$x+1 = (x-2).1+3, \quad f(x) =$ (f es 1 a 1) $\dfrac{3}{-2}$



$$y = \frac{x+1}{x-2}, \; y(x-2) = x+1 \Leftrightarrow yx - 2y = x+1 \Leftrightarrow x(y-1) = 1+2y \Leftrightarrow x = \frac{1+2y}{y-1}, \quad y \neq 1$$

$f^{-1}(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ $\qquad Df^{-1}=R-\{1\}=\operatorname{Im} f$





Para profundizar sobre gráficas de funciones ver en el apéndice: Nuevas funciones a partir de funciones ya conocidas.

Propuesta 6. Resuelve los ejercicios 9, 10 y 11.

Sucesiones

Una sucesión es una infinidad de objetos dados ordenadamente.

Nosotros vamos a trabajar con sucesiones de números reales. En una sucesión es importante el lugar que ocupa cada uno de sus términos.

Definición. Una **sucesión** de números reales es una función de N en R.

$f: N \to R$, a cada número natural se le asocia un número real que es un término de la sucesión: al 1 se le asocia el primer término, al 2 el segundo, al 3 el tercero, etc.

A los términos de la sucesión se los designa por: $a_1 , a_2 , \dots , a_n , \dots$

$$
\begin{aligned}
f : N &\to R \\
1 &\to a_1 \\
2 &\to a_2 \\
3 &\to a_3 \\
&\vdots \\
n &\to a_n \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Límite de una sucesión

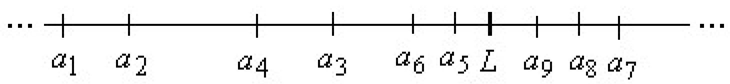
Hay sucesiones que tienen límite finito. Ejemplos:

1) $1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{5}, \ \frac{1}{6}, \ \dots, \ \frac{1}{n}, \ \dots. \ \to 0$

2) $0.9, \ 0.99, \ 0.999, \ 0.9999, \ \dots. \ \to 1$

3) $1, \ 0, \ \frac{1}{2}, \ 0, \ \frac{1}{3}, \ 0, \ \frac{1}{4}, \ \dots. \ \to 0$

Una sucesión tiene límite L (L$\in R$) cuando al tomar términos cada vez más avanzados, se aproximan cada vez más a L. Sin embargo, no es necesario que cada término esté más próximo a L que el anterior.

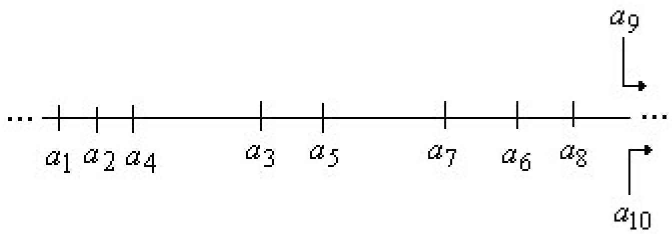


Hay otras sucesiones que no tienen límite finito. Por ejemplo:

4) $-2 \quad -4, \quad -8, \quad -16, \quad -2^n, \quad .... \quad \to -\infty$

5) $1, \quad 2, \quad 10, \quad 4, \quad 100, \quad 8, \quad 1000, \quad 16, \quad .... \quad \to +\infty$

En estas últimas sucesiones al tomar términos cada vez más avanzados, superan cualquier valor por grande que este sea.



Existen otro tipo de sucesiones que tampoco tienen límite. Por ejemplo:

$1, \quad -2, \quad 3, \quad -4, \quad 5, \quad -6, \quad \cdots, \quad (-1)^n n, \ldots$

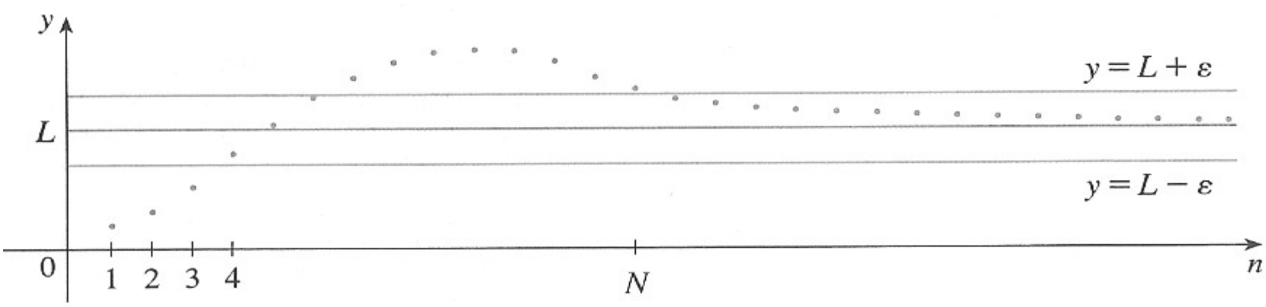
$sen1, \quad sen2, \quad sen3, \quad sen4, \quad \ldots, \quad sen(n), \ \ldots$

$09, \quad -0.9, \quad 0.99, \quad -0.99, \ \ldots$

Definiciones

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow dado\ \varepsilon > 0$ podemos encontrar un término a partir del cual se cumple que $|a_n - L| < \varepsilon$. Es decir, se dice que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ cuando podemos conseguir que $|a_n - L|$ sea menor que cualquier cantidad prefijada, por pequeña que esta sea, sin más que tomar los términos a_n suficientemente avanzados. (Ver ejemplos 1, 2 y 3)

Otra forma de representación: $(1, a_1) \quad (2, a_2) \quad (3, a_3) \quad \ldots \quad (n, a_n)$



- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow dado\ k$ podemos encontrar un término a partir del cual se cumple que $a_n > k$. Es decir, se dice que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ cuando podemos conseguir que a_n sea mayor que cualquier número prefijado, por grande que sea, sin más que tomar los términos a_n suficientemente avanzados. (Ver ejemplo 5)

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow dado\ k$ podemos encontrar un término a partir del cual se cumple que $a_n < k$. Se dice que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ cuando podemos conseguir que a_n sea menor que cualquier número prefijado, por negativo que sea, sin más que tomar los términos a_n suficientemente avanzados. (Ver ejemplo 4)

Las sucesiones que tienen límite finito se llaman **convergentes**. Las demás son llamadas **divergentes**.

<u>Álgebra de límites finitos</u>

Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \quad y \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \quad (a\ y\ b\ reales)$ entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b$ (Si existen los límites del segundo miembro)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a - b$

- $\lim\limits_{n\to\infty} (k\, a_n) = k \lim\limits_{n\to\infty} a_n = k\, a \qquad (k \in R)$

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a\, b$

- $Si \quad b \neq 0 \quad y \quad b_n \neq 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$

- $Si \quad a_n > 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} {a_n}^k = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^k = a^k$ (si a y k no son ambas nulas)

- *Si* $a_n > 0, \quad \lim_{n\to\infty}\left(a_n{}^{b_n}\right)=\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim_{n\to\infty} b_n} = a^b$ (si a y b no son ambas nulas)

Operaciones con sucesiones de límite no finito

Si sumamos dos sucesiones que tienden a infinito la sucesión suma resultante también tenderá a infinito: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \wedge \lim_{n\to\infty} b_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$.

Si restamos dos sucesiones que tienden a infinito, se pueden obtener distintos resultados.

Ejemplo. Dadas las siguientes sucesiones:

$a_n = n, \qquad b_n = 2n, \qquad c_n = n + (-1)^n, \qquad d_n = n + L, \quad L \in R$

$a_n = \;\; 1, \;\; 2, \;\; 3, \;\; 4, \;\; 5, \;\; 6, \;\; ..., \;\; n, \;\; ...$

$b_n = \;\; 2, \;\; 4, \;\; 6, \;\; 8, \;\; 10, \;\; 12, \;\; ..., \;\; 2n, \;\; ...$

$c_n = \;\; 0, \;\; 3, \;\; 2, \;\; 5, \;\; 4, \;\; 7, \;\; ..., \;\; n + (-1)^n, \;\; ...$

$d_n = \;\; 1+L, \;\; 2+L, \;\; 3+L, \;\; 4+L, \;\; 5+L, \;\; 6+L, \;\; ..., \;\; n+L, \;\; ...$

Estas últimas sucesiones tienden todas a infinito. Sin embargo:

$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = -\infty, \; \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \infty, \; \lim_{n\to\infty} (c_n - a_n) \textit{ no tiene límite}, \; \lim_{n\to\infty} (d_n - a_n) = L$

$a_n - b_n = \;\; -1, \;\; -2, \;\; -3, \;\; -4, \;\; -5, \;\; -6, \;\; ..., \;\; -n, \;\; ...$

$b_n - a_n = \;\; 1, \;\; 2, \;\; 3, \;\; 4, \;\; 5, \;\; 6, \;\; ..., \;\; n, \;\; ...$

$c_n - a_n = \;\; -1, \;\; 1, \;\; -1, \;\; 1, \;\; -1, \;\; 1, \;\; ...,$

$d_n - a_n = \;\; L, \;\; L, \;\; L, \;\; L, \;\; L, \;\; L, \;\; ...,$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \wedge \lim_{n\to\infty} b_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$ es una forma indeterminada.

El **límite** de una sucesión se dice en forma **indeterminada**, si al analizar los límites de las sucesiones componentes no es posible determinar el resultado. En tal caso debemos estudiar más a fondo la sucesión, hacer algunas operaciones y deshacer la indeterminación.

Algunos resultados para razonar: *Sea* $L \in R$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n . b_n) = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(.a_n{}^{b_n}) = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(.a_n{}^{b_n}) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n = L,\ L > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n . b_n) = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n = L,\ L > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n . b_n) = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n = L,\ L < 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n . b_n) = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n = L,\ L < 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n . b_n) = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L,\ L > 0,\ \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 0^+$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L,\ L < 0,\ \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 0^-$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L,\ L > 0,\ \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 0^-$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L,\ L < 0,\ \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = +\infty$$

Indeterminaciones

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} b_n = \infty\,,\ \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} b_n = 0\,,\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty,\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} b_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} ({a_n}^{b_n})$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} b_n = 0\,,\ \lim_{n\to\infty} (a_n . b_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} b_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} ({a_n}^{b_n})$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty,\ \lim_{n\to\infty} ({a_n}^{b_n})$$

Propuesta 7. Resuelve los ejercicios 12 y 13.

Cálculo de límites de sucesiones

Un caso particular: a , b reales y $a \neq 0$, $b \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\longrightarrow\infty}{an^p + a^r n^{p-1} + \cdots}}{\underset{\longrightarrow\infty}{bn^q + b^r n^{q-1} + \cdots}} = \begin{cases} \pm\infty & si\ p > q \\ \dfrac{a}{b} & si\ p = q \\ 0 & si\ p < q \end{cases} \qquad p, q \in \mathrm{N}$$

Ejemplos:

i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to\infty}{3n^2 - 5n + 7}}{\underset{\to\infty}{2n^2 + 3n + 1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\longrightarrow 3}{\underset{\to 3}{3} - \underset{\to 0}{\frac{5}{n}} + \underset{\to 0}{\frac{7}{n^2}}}}{\underset{\longrightarrow 2}{\underset{\to 2}{2} + \underset{\to 0}{\frac{3}{n}} + \underset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}}} = \frac{3}{2}$$

ii) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{\to\infty}{3n^3-5n+7}}{\underset{\to\infty}{2n^2+3n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{\longrightarrow 3}{3-\frac{5}{n^2}+\frac{7}{n^3}}}{\underset{\longrightarrow 0}{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}=\infty$$

iii) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{\to\infty}{3n^3-5n+7}}{\underset{\to\infty}{-2n^2+3n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{\longrightarrow 3}{3-\frac{5}{n^2}+\frac{7}{n^3}}}{\underset{\longrightarrow 0^-}{\frac{-2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}=-\infty$$

iv) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{\to\infty}{2n^2+3n+1}}{\underset{\to\infty}{3n^3-5n+7}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{\longrightarrow 0}{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}{\underset{\longrightarrow 3}{3-\frac{5}{n^2}+\frac{7}{n^3}}}=0$$

v) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\overset{\to\infty}{2n^2-5n+7}}{\underset{\to\infty}{n+3}}-2n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n+7-(2n^2+6n)}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{\to\infty}{-11n+7}}{\underset{\to\infty}{n+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-11+\frac{7}{n}}{1+\frac{3}{n}}=-11$$

<u>Propuesta 8</u>. Resuelve el ejercicio 14.

<u>Series</u>

<u>Serie</u>: Dada una sucesión a_n de números reales formamos otra S_n con

$S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n$, esta sucesión S_n (sucesión de sumas parciales) es llamada **serie**.

Es decir dados $a_1,a_2,a_3,...,a_n$, consideramos $S_1=a_1$, $S_2=a_1+a_2$, $S_3=a_1+a_2+a_3,\dots$

Si existe $\lim_{n\to\infty}S_n=S$ diremos que la serie es **convergente** y que S es la **suma** de la serie.

Notación: Si no existe $\lim_{n\to\infty}S_n=S$ la serie es **divergente**.

Serie geométrica

$1+r+r^2+r^3+r^4+\ldots+r^n+\ldots \qquad r \in R, \quad r: razón$

$$S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots + r^{n-1}$$

$$-$$

$$r\, S_n = r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots + r^{n-1} + r^n$$

$$S_n(1-r) = 1 - r^n$$

$$Si \quad r \neq 1, \quad S_n = \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r} - \frac{r^n}{1-r}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-r} - \frac{r^n}{1-r}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-r} - \lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r} - \frac{1}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^n$$

$Si \quad |r|<1 \quad \lim_{n\to\infty} r^n = 0 \quad y \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-r}$ *la serie converge*

$si \quad |r|\geq 1 \quad \lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ *la serie diverge*

Ejemplo: $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}, \qquad r = \frac{1}{2} < 1 \quad \Rightarrow$ la serie converge, su suma es:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Propuesta 9. Resuelve el ejercicio 15.

EJERCICIOS

1) Indica en cada ítem V o F.

a) $2 \in Z^{+}$ **b)** $-\frac{1}{2} \in Z^{-}$ **c)** $\sqrt{3} \in Q$

d) $\sqrt{4} \in N$ **e)** $0,\overline{6} \in \mathbf{I}$ **f)** $0 \in R^{+}$

g) $\frac{3}{5} \in Q$ **h)** $-100 \in R$ **i)** $9,8 \in Z$

2) Siendo $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ y $B = \{0,1,2,3\}$ indicar cuáles de las siguientes relaciones (de A en B) son funciones. En aquellas que no lo son, ver que parte de la definición de función no se verifica, y para las que representan una función indicar Df, Cf e $\operatorname{Im} f$.

$f = \{(1,0),(2,0),(3,1),(4,2),(5,3)\}$

$g = \{(1,0),(2,1),(3,2),(1,2),(4,3),(5,3),(6,0)\}$

$h = \{(1,1),(2,2)(3,1),(4,2),(5,1),(6,3)\}$

$r = \{(1,2),(2,2)(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\}$

3) Siendo $f(x) = x^2 - 3x + 5$, hallar $f(0), f(3), f(-3), f(2x)$ y $f(1+h)$.

4) Hallar el dominio de las siguientes funciones:

$f_1(x) = 2x - 1$ $\quad f_2(x) = \left| -x + \frac{1}{3} \right|$ $\quad f_3(x) = \frac{1}{2x-1}$ $\quad f_4(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$

$f_5(x) = \frac{x-5}{x^2 - 5x + 4}$ $\quad f_6(x) = \sqrt{3x-4}$ $\quad f_7(x) = \sqrt{2-3x}$ $\quad f_8(x) = \frac{x+3}{\sqrt{2x-4}}$

$f_9(x) = \sqrt[3]{x^2 - 9}$ $\quad f_{10}(x) = -3$ $\quad f_{11}(x) = x^3 - 5x + \frac{1}{2}$

$f_{12}(x) = \log(5x-1)$ $\quad f_{13}(x) = e^{2x}$ $\quad f_{14}(x) = |x-3|$ $\quad f_{15}(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

5) Graficar las siguientes funciones, indicando dominio e imagen.

$f_1(x) = 2x + 4$ $\quad f_2(x) = -x - 2$ $\quad f_3(x) = \frac{3}{2}x + 5$ $\quad f_4(x) = x^2 - 4x + 3$

$f_5(x) = -x^2 + x + 2$ $\quad f_6(x) = -x^2 + 3$ $\quad f_7(x) = \frac{x^2 - 25}{x+5}$

$$f_8(x)=\begin{cases}-1 & si\ \ 0\le x\le 1\\ 2x & si\ \ 1<x<3\end{cases}\qquad f_9(x)=\begin{cases}4x-3 & si\ \ x\ge 1\\ -5 & si\ \ x=0\\ -2x & si\ \ x\le -1\end{cases}\qquad f_{10}(x)=\begin{cases}x^2+1 & si\ \ x>0\\ x^2-1 & si\ \ x<0\end{cases}$$

$$f_{11}(x)=x^3-1\qquad f_{12}(x)=\sqrt{x-1}\qquad f_{13}(x)=\frac{x-4}{x^2-16}\qquad f_{14}(x)=|x-2|$$

6) Hallar $f+g,\ f-g,\ f.g\ ,\dfrac{f}{g}\ ,\dfrac{g}{f}$ indicando en cada caso su dominio.

a) $f(x)=x+3,\quad g(x)=2x-1$

b) $f(x)=x^2+2,\quad g(x)=\ln(x-2)$

c) $f(x)=\sqrt{3-x},\quad g(x)=\sqrt{x+5}$

7) Expresar las siguientes funciones como una composición de dos funciones.

a) $f(x)=\sqrt{x^2+3}$ **b)** $g(x)=\cos(-2x^3)$ **c)** $h(x)=\sqrt{\sqrt{x}}$

8) Hallar $f\circ g$ indicando dominio en cada caso.

a) $f(x)=x^2+1,\quad g(x)=\sqrt{x+1}$ **b)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2},\quad g(x)=\dfrac{1}{x}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2},\quad g(x)=\sqrt{x}$ **d)** $f(x)=\ln(x-2),\quad g(x)=x^2+2$

9) a) Considerando la función f_9 del ejercicio 5:

i) ¿Es f_9 una función uno a uno?, ¿porqué?
ii) Indicar la imagen de 1 y la/s preimagen/es de 5.
iii) Indicar los intervalos donde f_9 crece y donde decrece.
iv) Analizar su paridad.

b) Considerando la función f_{11} del ejercicio 5:

i) ¿Es f_{11} una función uno a uno?, ¿porqué?
ii) Indicar la imagen de -2 y la/s preimagen/es de 7.
iii) Indicar los intervalos donde f_{11} crece y donde decrece.
iv) Analizar la paridad.

10) Indicar si las siguientes funciones son uno a uno. Justifique. A las funciones que no son uno a uno, transfórmelas en una función uno a uno realizándoles el menor cambio posible.

$f(x)=2x-1\qquad g(x)=x^2+1$

11) a) Indicar ley, dominio y recorrido de las funciones inversas de las siguientes funciones:

$f(x) = 2x - 3$ $\qquad$ $g(x) = \sqrt{x+5}$ $\qquad$ $h(x) = x^3 - 2$, $Dh = [0, \infty)$

b) Graficar f y f^{-1} mostrando simetría respecto de $y = x$.

c) Graficar g y g^{-1} mostrando simetría respecto de $y = x$.

d) Graficar h y h^{-1} mostrando simetría respecto de $y = x$.

12) Indica cuáles de las siguientes sucesiones son convergentes y cuales divergentes. Justifica.

a) $1, \quad 5, \quad 9, \quad 13, \quad 17, \quad ...$

b) $4, \quad 2, \quad 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad ...$

c) $0, \quad \frac{1}{2}, \quad 0, \quad \frac{1}{4}, \quad 0, \quad ...$

d) $-1, \quad 3, \quad -5, \quad 7, \quad -9, \quad ...$

13) Dadas cuatro sucesiones $a_n, b_n, s_n \; y \; c_n$ que verifican:

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 4, \quad \lim\limits_{n \to \infty} b_n = \infty, \quad \lim\limits_{n \to \infty} c_n = -\infty, \quad \lim\limits_{n \to \infty} s_n = \infty$

Evalúa los límites:

a) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n b_n =$ $\qquad$ **b)** $\lim\limits_{n \to \infty} 3\, a_n =$ $\qquad$ **c)** $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - c_n) =$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n + c_n) =$ $\qquad$ **e)** $\lim\limits_{n \to \infty} {b_n}^{s_n} =$ $\qquad$ **f)** $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{b_n}{s_n} =$

g) $\lim\limits_{n \to \infty} b_n\, s_n =$ $\qquad$ **h)** $\lim\limits_{n \to \infty} {b_n}^{c_n} =$ $\qquad$ **i)** $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) =$

14) Evalúa los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3}{n} =$ $\qquad$ **b)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right) =$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{4 + 2n}{n} =$ $\qquad$ **d)** $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n^3 + 5}{4 - n^3} =$

e) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n^3 - 4n^2 + 2n - 1}{5n^2 + 4} =$ $\qquad$ **f)** $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{-4n^2 + 2n - 1}{n^3 + 3n - 6} =$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+3)(n^2-2n+5)}{n^3-1} =$

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2-5n+7}{n+3} - \dfrac{n^2+5}{n+1}\right) =$

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n-1+\dfrac{6n+3}{n^2+4}\right) =$

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+4n-4}{3n+1} - \dfrac{3n^2-7n+3}{3n+1}\right) =$

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2-5n+3}{3n-1}\right)^{n^3+2n} =$

l) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-2n+3}{2n^2-1}\right)^{n^4} =$

15) Clasificar en convergente o divergente; en caso de ser posible halle su suma:

a) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^k =$

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{3}{5}\right)^k =$

c) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^k =$

APÉNDICE

Ecuación cuadrática

Una ecuación es cuadrática si mediante transformaciones equivalentes puede reducirse a la forma:

$ax^2+bx+c=0 \quad a,b,c\in\Re, \quad a\neq 0$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \Leftrightarrow \left|x+\frac{b}{2a}\right|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$x_1 \; y \; x_2$ son soluciones de la ecuación.

Si $b^2-4ac>0 \Rightarrow$ las dos soluciones son reales y distintas
Si $b^2-4ac=0 \Rightarrow$ las dos soluciones son reales e iguales
Si $b^2-4ac<0 \Rightarrow$ No existen soluciones reales

Propiedades: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $\quad x_1.x_2=\dfrac{c}{a}$

Por el teorema de la descomposición factorial de un polinomio resulta:

$$\underbrace{ax^2+bx+c}_{\text{Forma Polinómica}}=\underbrace{a(x-x_1)(x-x_2)}_{\text{Forma Factorizada}}$$

Forma canónica:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}=a(x-h)^2+k$$

Llamando:

$$h=\frac{-b}{2a} \quad y \quad k=\frac{-b^2+4ac}{4a}$$

$$ax^2+bx+c=\overbrace{a(x-h)^2+k}^{\text{Forma canónica}}$$

Nuevas funciones a partir de funciones ya conocidas

Transformaciones de funciones.

Consideremos las traslaciones.

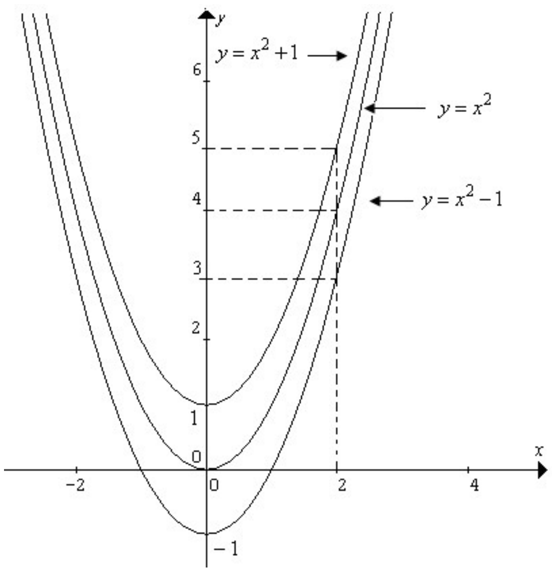
Desplazamientos verticales y horizontales. Supóngase que $c > 0$. Para obtener la gráfica de:

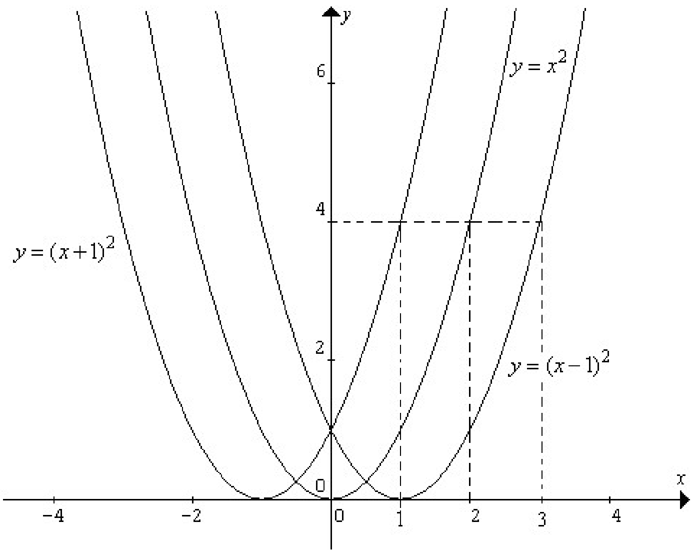
$y = f(x) + c$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia arriba

$y = f(x) - c$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia abajo

$y = f(x - c)$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia la derecha

$y = f(x + c)$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia la izquierda





Estiramiento y reflexiones verticales y horizontales. Supóngase que $c > 1$. Para obtener la gráfica de:

$y = cf(x)$, estírese la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor c

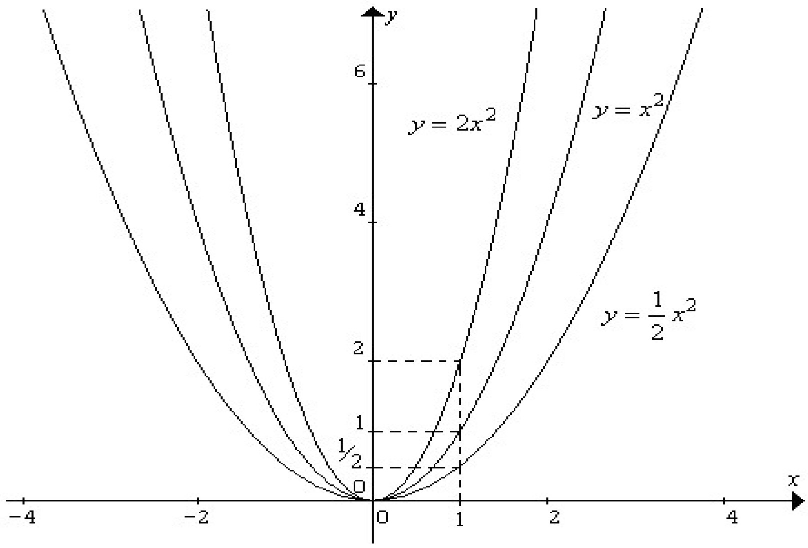
$y = \frac{1}{c} f(x)$, comprímase la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor c

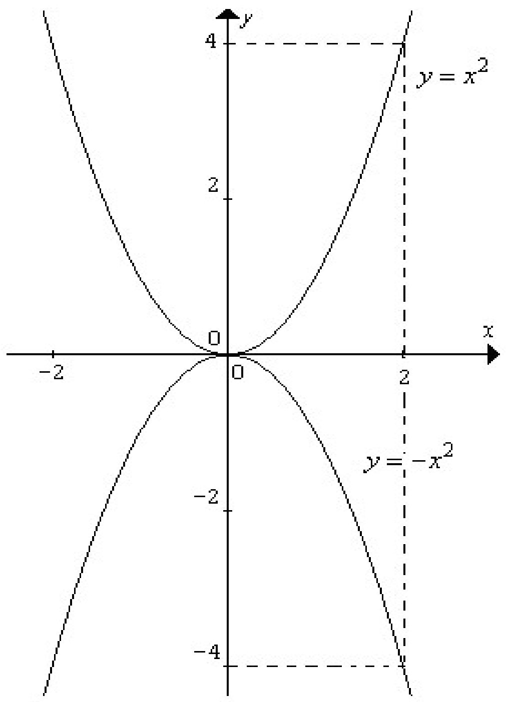
$y = f(cx)$, comprímase la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor c

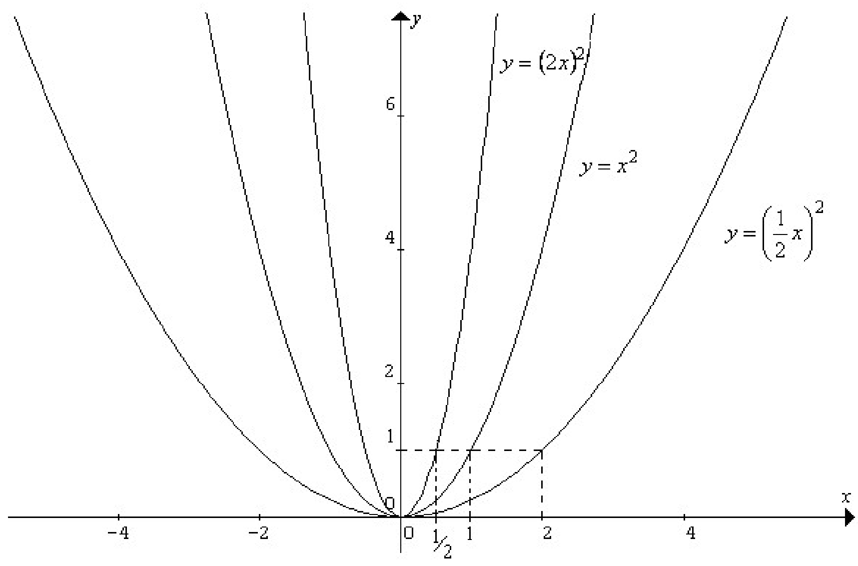
$y = f\left(\frac{x}{c}\right)$, estírese la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor c

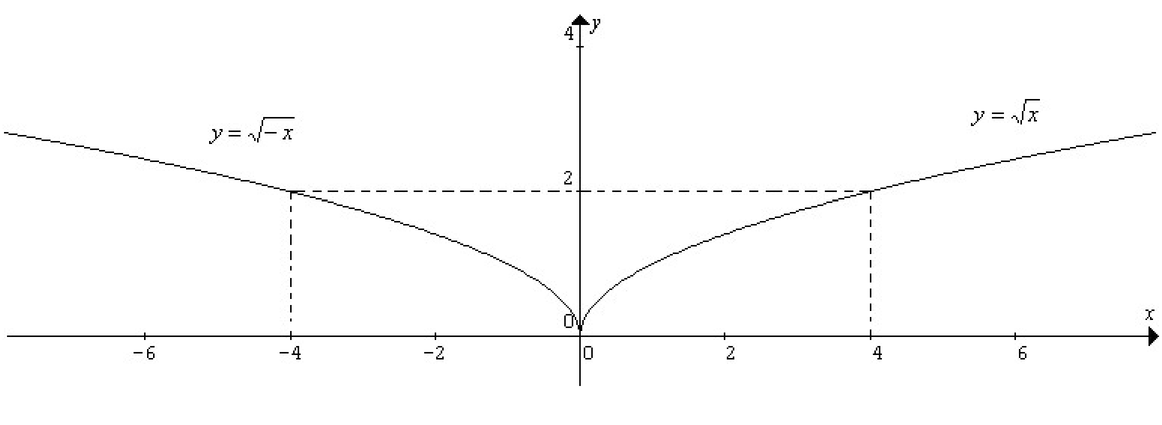
$y = -f(x)$, refléjese la gráfica de $y = f(x)$ respecto al eje x

$y = f(-x)$, refléjese la gráfica de $y = f(x)$ respecto al eje y


y
6
4
2
1
1/2
0
x
−4
−2
0
1
2
4
$y = 2x^2$
$y = x^2$
$y = \frac{1}{2}x^2$


y
4
2
0
−2
−4
x
−2
0
2
$y = x^2$
$y = -x^2$


y
6
4
2
1
0
x
−4
−2
0
1/2
1
2
4
$y = (2x)^2$
$y = x^2$
$y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$


y
4
2
0
x
−6
−4
−2
0
2
4
6
$y = \sqrt{-x}$
$y = \sqrt{x}$

Algunas propiedades

- Si a y b son números positivos y x e y son números reales:

1) $a^{x+y} = a^x . a^y$ 2) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

3) $(a^x)^y = a^{x.y}$ 4) $(a.b)^x = a^x . b^x$

- Si x e y son números reales positivos:

1) $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$ 2) $\log_a \left(\dfrac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$

3) $\log_a (x^r) = r \log_a x$ (r real) 4) $\log_a (a^x) = x \quad \forall x \in R$

5) $a^{\log_a x} = x$ 6) $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

- Si x es un real positivo:

1) $\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$ 2) $e^{\ln x} = x$ 3) $\ln(e^x) = x \quad \forall x \in R$

Trigonometría

Ángulos

Los ángulos se pueden medir en grados o en radianes (rad). El ángulo determinado por una revolución o una vuelta completa mide 360º, que es lo mismo que $2\pi \ rad$. Por lo tanto:

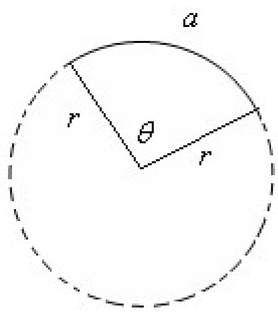
π rad $\longleftrightarrow$ 180°

$$1 \ rad = \left(\frac{180}{\pi} \right)^{o} \approx 57{,}3^{o} \qquad 1^{o} = \left(\frac{\pi}{180} \right) rad \approx 0{,}017 rad$$

La siguiente tabla muestra la correspondencia entre grados y radianes para diversos valores comunes de ángulos.

Grados	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º	270º	360º
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

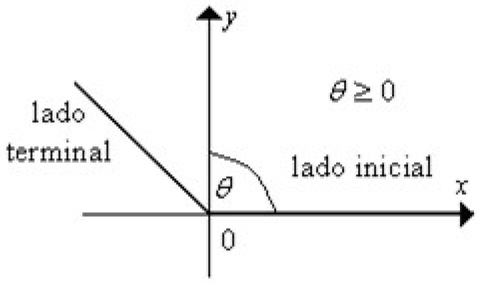
En la siguiente figura se ilustra un sector circular cuyo ángulo central es θ, su radio es r y abarca (o subtiende) un arco de longitud a. Dado que la longitud de arco es proporcional al tamaño del ángulo, y como todo el círculo tiene $2\pi \ r$ de circunferencia y su ángulo central es 2π, tenemos:

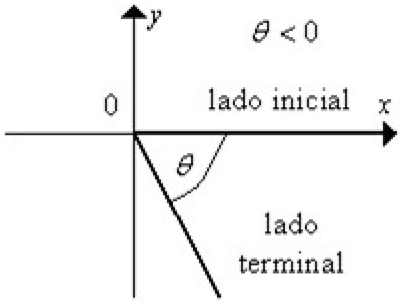


$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{a}{2\pi r}$ al despejar θ y a tenemos $\theta = \frac{a}{r}$, $a = r\theta$.

Recuerde que las tres expresiones son válidas cuando θ está expresado en radianes.

En particular con $a = r$ vemos que un ángulo de 1 rad es el ángulo formado por el centro de un círculo al subtender un arco cuya longitud es igual al radio de ese círculo.
La posición normal o estándar de un ángulo se tiene cuando se coloca su vértice en el origen de un sistema de coordenadas y su lado inicial en el lado positivo del eje de las x. un ángulo positivo se obtiene haciendo girar el lado inicial en sentido contrario al de las manecillas del reloj hasta que coincida con el lado terminal. Los ángulos negativos se obtienen por rotación en el sentido de las manecillas del reloj.

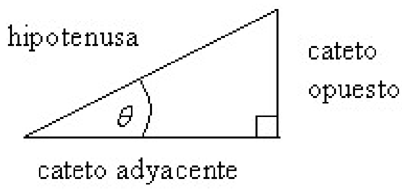




Nota: ángulos distintos pueden tener el mismo lado terminal.

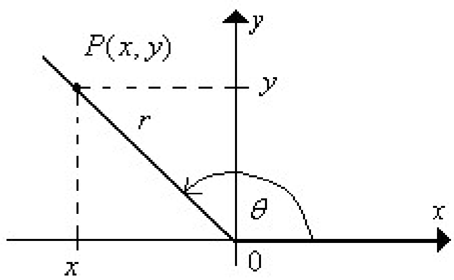
<u>Algunas funciones trigonométricas</u>

$sen\theta = \frac{co}{h}$, $\cos\theta = \frac{ca}{h}$, $\tan\theta = \frac{co}{ca}$



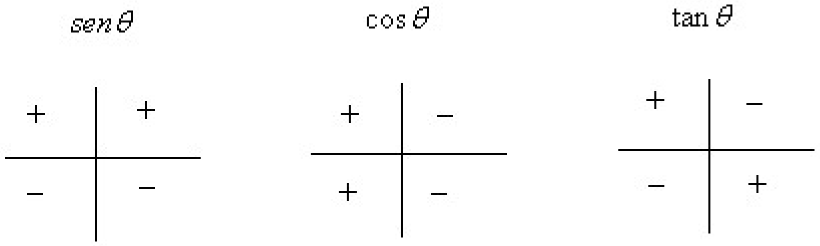
Esta definición no se aplica a ángulos obtusos o negativos; así pues para un ángulo θ cualquiera, en posición normal, sea $P(x.y)$ cualquier punto del lado terminal de θ y r la distancia $|OP|$, ahora definimos:

$sen\theta = \frac{y}{r}$ $\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\tan\theta = \frac{y}{x}$

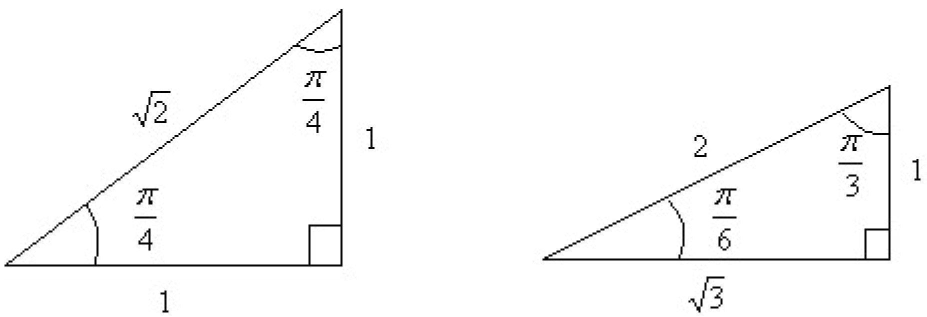


Recordar además que: $\tan\theta = \frac{sen\theta}{\cos\theta}$

Signos según los cuadrantes:



Veamos algunos cocientes trigonométricos exactos de ciertos ángulos:



$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad sen\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \qquad sen\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1 \qquad \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$$

Con similares ideas a las anteriores se puede construir la siguiente tabla:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$sen\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

BIBLIOGRAFÍA

- Steward J. Cálculo. (2008). Sexta Edición. Cengage Learning.
- Thomas. Cálculo Una variable. (2005). Undécima edición. Pearson Addison Wesley
- Rabuffetti Hebe T. (1995) Introducción al Análisis Matemático.
- Miguel de Guzmán. Análisis Matemático I. Editorial Anaya.
- Spivack Michael. (1988). Cálculo Infinitesimal. Editorial Reverté.