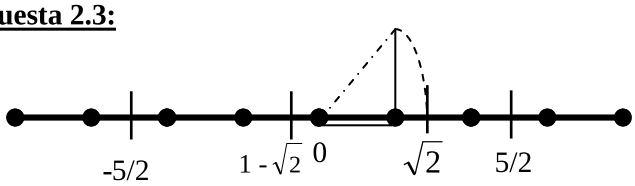
Las respuestas fueron elaboradas por las Profesoras Luciana Calderón y María de los Ángeles Fernandez quienes realizan una adscripción en la Cátedra.

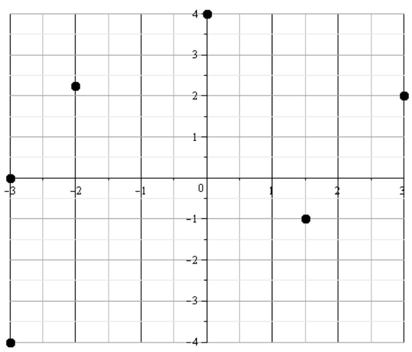
Propuesta 2.3:

1) 

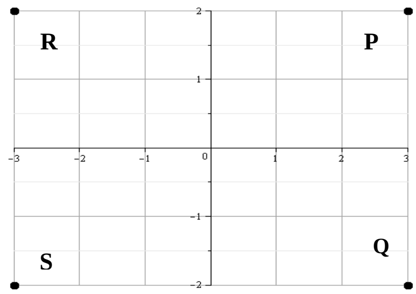
2) La distancia es 5

3) $x = 1$

Propuesta 2.5:

1) 

3) $Q(3,-2)$ $R(-3,2)$ $S(-3,-2)$



2) Los puntos están alineados. Pertenecen a la recta que contiene al punto (2,0) y es paralela al eje y.

4) a) V
b) F

Propuesta 2.7:

2) Pertenecen al plano coordenado YZ.

3) Pertenecen al plano que es paralelo al plano coordenado YZ y corta al eje x en el punto (1,0,0)

4) Están sobre el plano que es paralelo al plano coordenado YZ y corta al eje x en el punto (3,0,0)

5) El punto B está “más cerca” del plano XZ. El punto del plano XZ más cercano a B es (5,0,3)

6) Sea P(a,b,c)

El simétrico de P respecto del plano XY es el punto (a,b,-c)
El simétrico de P respecto del plano XZ es el punto (a,-b,c)
El simétrico de P respecto del plano YZ es el punto (-a,b, c)
El simétrico de P respecto del eje X es el punto (a,-b,-c)
El simétrico de P respecto del eje Y es el punto (-a,b,-c)
El simétrico de P respecto del eje Z es el punto (-a,-b,c)
El simétrico de P respecto del origen de coordenadas es el punto (-a,-b,-c)

Propuesta 3.5:

1) a) Falso, basta considerar cualquier vector de módulo menor a uno.

b) Falso, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no tienen igual dirección.

c) Falso, los módulos de los versores asociados son ambos iguales a uno.

d) Verdadero.

Demostración:

Sabemos que:

✓ $\left.\begin{array}{l} \text{Por hipótesis } \bar{u} \,//\, \bar{v} \\ \overrightarrow{u_0} \,//\, \vec{u} \\ \overrightarrow{v_0} \,//\, \vec{v} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{u_0} \,//\, \vec{u} \,//\, \vec{v} \,//\, \overrightarrow{v_0} \Rightarrow \overrightarrow{u_0} \,//\, \overrightarrow{v_0} \Rightarrow$ tienen igual dirección

✓ $\left.\begin{array}{l} Sentido\ (\bar{u}) = Sentido\ (\overrightarrow{u_0}) \\ Sentido\ (\bar{v}) = Sentido\ (\overrightarrow{v_0}) \\ \text{Por hipótesis } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ tienen igual sentido} \end{array}\right\} \Rightarrow Sentido\ (\overrightarrow{u_0}) = Sentido\ (\vec{u}) = Sentido\ (\vec{v}) = Sentido(\overrightarrow{v_0})$

✓ $\left|\overrightarrow{v_0}\right| = \left|\overrightarrow{u_0}\right| = 1$

Por lo tanto $\overrightarrow{u_0} = \overrightarrow{v_0}$

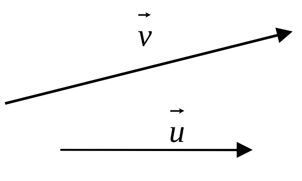
e) Verdadero.

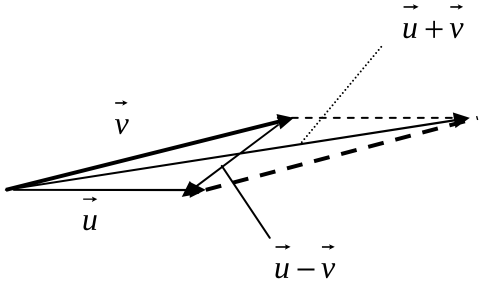
2) $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ $\quad \left(\vec{a},\vec{c}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$ $\quad \left(\vec{b},\vec{c}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

3) Es falso pues $0 \le (\vec{u},\vec{v}) \le \pi$. Por lo tanto el $\cos(\vec{u},\vec{v}) = 1 \iff (\vec{u},\vec{v}) = 0$

Propuesta 3.7:

1) Un ejemplo en particular podría ser el siguiente:



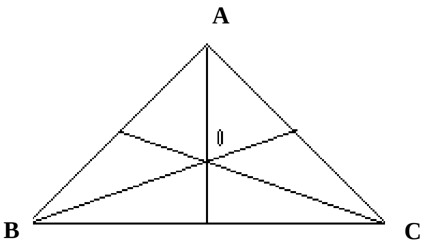


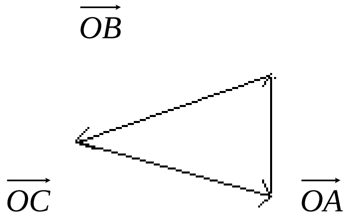
2) $\left|\vec{u}+\vec{v}\right| = 5$, $\quad \left|\vec{u}-\vec{v}\right| = 5$

3) $\overrightarrow{CB} = \vec{u} - \vec{v}$ $\quad \overrightarrow{CA} = -\vec{v}$ $\quad \overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ $\quad \overrightarrow{DA} = -\vec{v}$

$\overrightarrow{BC} = \vec{v} - \vec{u}$ $\quad \overrightarrow{CD} = -\vec{u}$ $\quad \overrightarrow{DB} = \vec{u} - \vec{v}$

4)

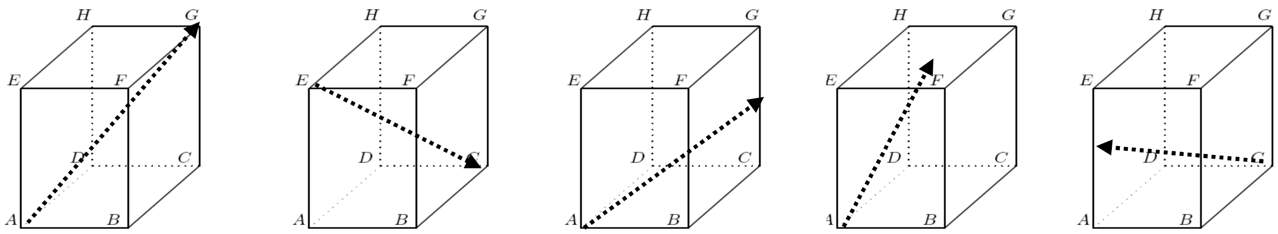




5) Sugerencia:

$\vec{x}+\vec{u}=\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}=\vec{v}-\vec{u}$

Propuesta 3.10:

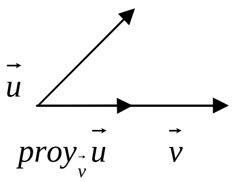


$\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$; $\quad \vec{m}+\vec{n}-\vec{p}$; $\quad \vec{m}+\vec{n}+\frac{1}{2}\cdot\vec{p}$; $\quad \frac{1}{2}\cdot\vec{m}+\frac{1}{2}\cdot\vec{n}+\vec{p}$; $\quad -\vec{m}-\vec{n}+\frac{1}{2}\cdot\vec{p}$.

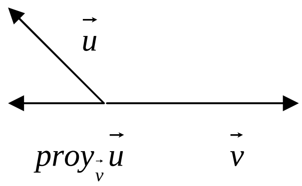
Propuesta 3.12:

1) Es el vector nulo

2) a)



b)



3) Sugerencia:

Considerar los siguientes casos:

Caso 1: $0 \le (\vec{u},\vec{v}) < \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ Caso 2: $(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ Caso 3: $\dfrac{\pi}{2} < (\vec{u},\vec{v}) \le \pi$

Propuesta 3.14:

1) Demostración: Siendo $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ no nulos

$$\vec{u}\times\vec{v}=0 \underset{(1)}{\Longleftrightarrow} |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})=0 \underset{(2)}{\Longleftrightarrow} \cos(\vec{u},\vec{v})=0 \Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$$

(1) Definición de producto escalar.

(2) $\left|\vec{u}\right| \neq 0, \left|\vec{v}\right| \neq 0$ pues los vectores no son nulos.

2) $$\left|proy_{\vec{v}}\vec{u}\right| \underset{(1)}{=} \left|\left(\vec{u}\times\vec{v_0}\right)\vec{v_0}\right| \underset{(2)}{=} \left|\vec{u}\times\vec{v_0}\right|\left|\vec{v_0}\right| \underset{(3)}{=} \left|\vec{u}\times\vec{v_0}\right| = \left|\vec{u}\times\frac{1}{\left|\vec{v}\right|}.\vec{v}\right| \underset{(4)}{=} \frac{1}{\left|\vec{v}\right|}.\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|$$

(1) Por lo demostrado anteriormente en este ejercicio

(2) Definición de módulo de un vector por un número

(3) $\left|\vec{v}_0\right| = 1$

(4) Por propiedad E_3 del producto escalar y definición del módulo de un número por un vector

3)

a) 3	b) 3	c) -3	d) 3/2
e) -18	f) 13	g) -1	h) 11

4) El Teorema de Pitágoras se obtiene para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($\alpha = 90^{o}$)

5) Considerando vectores no nulos

a) $\left|\vec{u}+\vec{v}\right| = \left|\vec{u}-\vec{v}\right| \iff \left(\vec{u},\vec{v}\right) = \frac{\pi}{2}$

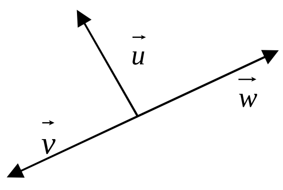
b) $\left|\vec{u}+\vec{v}\right| > \left|\vec{u}-\vec{v}\right| \iff 0 \leq \left(\vec{u},\vec{v}\right) < \frac{\pi}{2}$

c) $\left|\vec{u}+\vec{v}\right| < \left|\vec{u}-\vec{v}\right| \iff \frac{\pi}{2} < \left(\vec{u},\vec{v}\right) \leq \pi$

6) $\left|\vec{u}+\vec{v}\right| = 20$

7) La proposición es falsa pues si $\vec{u} = \vec{0}$ entonces $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{u}\times\vec{w}$ y no necesariamente $\vec{v} = \vec{w}$

También se puede considerar el siguiente ejemplo



8) La igualdad se verifica cuando los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos y de igual sentido. También se verifica cuando al menos uno de ellos es el vector nulo.

<u>Propuesta 3.16:</u>

- Si los tres vectores son paralelos tenemos dos casos:

  Caso 1: si el vector que quiero expresar como combinación lineal de los otros tres es también paralelo a ellos, entonces existen infinitas combinaciones lineales.

  Caso 2: si el vector que quiero expresar como combinación lineal de los otros tres no es paralelo a los vectores, entonces en este caso no es posible escribir al vector como combinación lineal de los otros tres.

- Si dos de estos tres vectores son paralelos hay infinitas formas de escribir un vector como combinación lineal de los tres vectores.
- Si ninguno de estos tres vectores son paralelos, un vector cualquiera se puede escribir como combinación lineal de estos tres de infinitas formas.

<u>Propuesta 3.21</u>:

1) $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ $\qquad \cos\beta = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$ $\qquad \cos\gamma = 0$

2) $\vec{v} = \left(1, -1, \sqrt{7}\right)$

3) <u>Cosenos directores de</u> $\vec{i}$

$\cos\alpha = 1 \qquad \cos\beta = 0 \qquad \cos\gamma = 0$

<u>Cosenos directores de</u> $\vec{j}$

$\cos\alpha = 0 \qquad \cos\beta = 1 \qquad \cos\gamma = 0$

<u>Cosenos directores de</u> $\vec{k}$

$\cos\alpha = 0 \qquad \cos\beta = 0 \qquad \cos\gamma = 1$

4) a) No pues $\cos^2(45^o) + \cos^2(130^o) + \cos^2(60) \neq 1$

b) Si pues $\cos^2(90^o) + \cos^2(150^o) + \cos^2(60) = 1$

<u>Propuesta 3.23</u>:

1) a) $P(8,0,3) \qquad Q(2,-2,1) \qquad R(-4,6,7)$ $\qquad$ b) La longitud de la mediana es $\sqrt{\dfrac{43}{2}}$

c) $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{13}{7.\sqrt{11}}$

2) a) Sugerencia: Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son perpendiculares (el producto escalar es cero)

b) El área es $\dfrac{\sqrt{286}}{2}$

3) $A(-1,2,4) \qquad B(8,-4,-2)$

4) $\vec{v} = (-24, 32, 30)$

<u>Propuesta 3.25</u>:

Directa-Directa-Inversa

<u>Propuesta 3.27</u>

1) a) $(5, 1, 7)$

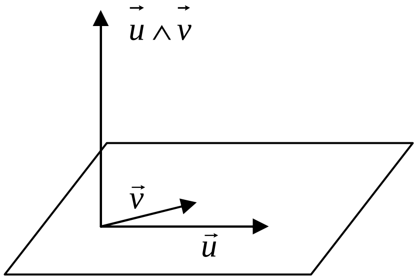
b) y c) se obtiene de a) aplicando las propiedades b) $(10, 2, 14)$ c) $(20, 4, 28)$

<u>Propuesta 3.29</u>:

4) a) Verdadero. Siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos ni paralelos, el vector $\vec{u} \wedge \vec{v}$ es perpendicular al plano que determinan $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Luego $\{ \vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v} \}$ es una base de V_3.

b) Falso. $\vec{u} \wedge \vec{v}$ es perpendicular al plano determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$, por lo tanto no se puede expresar como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) Verdadero. $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} \wedge \vec{v}$ son no coplanares



5) D(0,-2,0) ó D(0,8,0)

<u>PROPUESTA PARA LA REVISIÓN</u>

1) a) $|\vec{u}| = \sqrt{5}$ $|\vec{v}| = \sqrt{5}$ $|\vec{w}| = \sqrt{14}$ b) $\vec{a} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{14}}, 2 - \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{14}{3} - \frac{2}{\sqrt{14}} \right)$ c) $b = 18$

2) b) $(\vec{u}, \vec{v}) = 100^{\circ}\, 15'\, 48{,}34''$ c) $x = \frac{3}{2}$ d) $s = 3$

3) $-5\,(\vec{v} - \frac{1}{5}\vec{w}\,) = -5\,\vec{v} + \vec{w}$

4) a) $m = 3$

b) Para cualquier valor de m los vectores son ortogonales

5) $proy_{\vec{v}}\, \vec{u} = \left(-\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7} \right)$ $proy_{\vec{u}}\, \vec{v} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3} \right)$

6) $\text{Área del triángulo} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

7) $\vec{v} = (-8, 8, 6)$

8) Las componentes de $\vec{w}$ en dicha base son (2, 5)

9) $\vec{a} \wedge \vec{b} \times \vec{c} = \pm 27$

10) $\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = 16$

11) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ es un vector perpendicular al plano coordenado YZ cuyo módulo es 8. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \pm 8\,\vec{i}$

12) a) Los vectores son coplanares.

b) Los vectores no son coplanares.

c) Se da en el caso b)

13) b) El conjunto $\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right\}$ no forma una

c) $\overrightarrow{AD}$ = -1 $\overrightarrow{AB}$ + 1 $\overrightarrow{AC}$

d) $Área = \sqrt{98}$

14) a) Verdadero. Es igual a cero.

b) Verdadero. Realizar la demostración

c) Verdadero.

$$\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|^2 + \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2 = \left|\vec{a}\right|^2 .\left|\vec{b}\right|^2 .sen^2\left(\vec{a}, \vec{b}\right) + \left|\vec{a}\right|^2 .\left|\vec{b}\right|^2 .\cos^2\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right|^2 .\left|\vec{b}\right|^2 \left(.sen^2\left(\vec{a}, \vec{b}\right) + \cos^2\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right) = \left|\vec{a}\right|^2 .\left|\vec{b}\right|^2 .1 = \left|\vec{a}\right|^2 .\left|\vec{b}\right|^2$$

15) $\alpha = 53^{\circ}\ 44'\ 8{,}2''$

16) $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = -13$