FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE FORMACIÓN BÁSICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Geometría Lineal del Espacio

La Recta en el espacio

Problemas de Rectas y Planos

Ricardo Sagristá

Revisión y actualización: Patricia Có - Mariel Ugarte

-2019-

La recta en el espacio

1. La recta en el espacio como lugar geométrico.

Sea en el espacio un punto fijo P_1 y un vector $\vec{u} \neq \overline{0}$

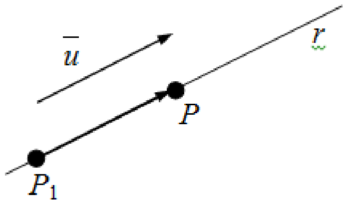


Figura 1

El lugar geométrico:

$$r = \left\{ P / \overrightarrow{P_1P} = t\,\vec{u} ; t \in \Re \right\} \qquad (1)$$

es la recta que pasa por P_1 y tiene la misma dirección que el vector $\vec{u}$

Hemos descrito la recta ***r*** del espacio, como el lugar geométrico de los puntos *P* que son extremos de los vectores $\overrightarrow{P_1P}$ colineales con $\vec{u}$, es decir $\overrightarrow{P_1P} = t\,\vec{u}$. El punto *P* (móvil) describe la recta, cuando *t* recorre el conjunto $\Re$ de los números recales (si *t=0*, *P* coincide con P_1).

1.1 Ecuación vectorial de la recta en el espacio.

Vamos a introducir ahora, un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales con la base canónica asociada.

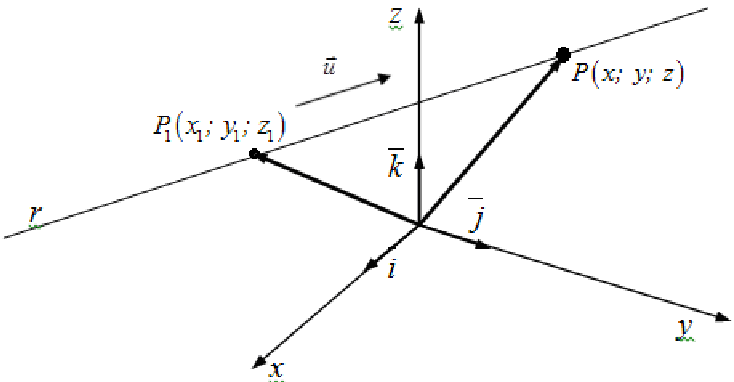


Figura 2

Sea el punto fijo $P_1(x_1, y_1, z_1)$ por el que pasa la recta.

Sea $\vec{u} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$, el vector que da la dirección de la recta, obviamente no nulo.

El lugar geométrico (1) lo podemos escribir así:

$$r = \left\{ P(x;y;z) / \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + t\,\vec{u} ; t \in \Re \right\}$$

La ecuación:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + t\ \vec{u}\ ; \quad t \in \Re \qquad (2)$$

es la ***ecuación vectorial*** de la recta ***r***

Todo punto *P* que pertenece a ***r*** verifica la ecuación y recíprocamente, todo punto *P* del espacio que la verifica pertenece a la recta.

Si el punto de paso de la recta es el origen de coordenadas, es decir $P_1 \equiv O$ será $\overrightarrow{OP_1} = \vec{0}$ y la ecuación vectorial (2), es para este caso particular:

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = t\,\vec{u} \quad t \in \Re} \qquad (3)$$

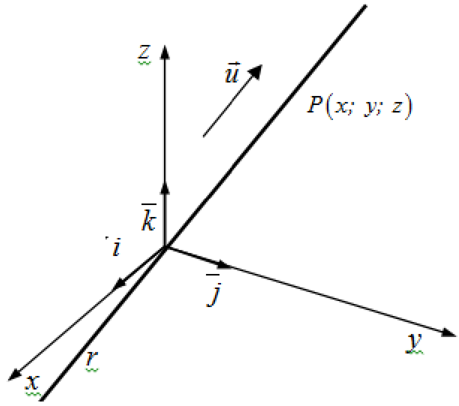


Figura 3

1.2 Ecuaciones paramétricas. Coeficientes y cosenos directores. Significado del parámetro *t*.

Si en la ecuación vectorial (2) trabajamos con las componentes de los vectores que en ella figuran, es decir

$$\overrightarrow{OP} = (x;\ y;\ z)$$
$$\overrightarrow{OP_1} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$$
$$\vec{u} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$$

tendremos

$$(x\ ; y;\ z) = (x_1;\ y_1;\ z_1) + t(u_1;\ u_2; u_3)\ ; \quad t \in \Re$$

o equivalentemente:

$$(x\ ; y;\ z) = (x_1 + tu_1;\ y_1 + tu_2;\ z_1 + tu_3)\ ; \quad t \in \Re$$

es decir:

$$r)\begin{cases} x = x_1 + u_1 t \\ y = y_1 + u_2 t \\ z = z_1 + u_3 t \end{cases} \quad t \in \Re \quad (4)$$

que son las ***ecuaciones paramétricas de la recta***, cuyo punto de paso es $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y cuya dirección es la del vector no nulo $\vec{u} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$. Estas componentes se llaman ***coeficientes directores*** de ***r***.

Si $|\vec{u}| = 1$ ($\vec{u}$ es un versor), entonces, dichas componentes se llaman ***cosenos directores*** de la recta.

En cuanto al significado geométrico del parámetro t $(t \in \Re)$, tomando la ecuación vectorial (2) tenemos:

$$t\,\vec{u} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{P_1P}\ ; \quad t \in \Re \quad \text{(ver Figura 2)}$$

es decir

$$|t|\,|\vec{u}| = \left|\overrightarrow{P_1P}\right| \Leftrightarrow |t| = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P}\right|}{|\vec{u}|}; \quad |\vec{u}| \neq 0; \quad t \in \Re$$

Observemos que $|t|$ es proporcional a la distancia entre el punto $P(x; y; z)$ de la recta que se obtiene para ese valor de t, y el punto fijo $P_1(x_1; y_1; z_1)$.

Si $|\vec{u}| = 1$, entonces $|t|$ es exactamente dicha distancia.

Si la recta pasa por el origen es decir $x_1 = 0;\ y_1 = 0;\ z_1 = 0$ entonces las ecuaciones (4) quedan:

$$r)\begin{cases} x = u_1 t \\ y = u_2 t \\ z = u_3 t \end{cases} \quad t \in \Re \quad (5)$$

que son las ***ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por el origen***. Todo lo dicho para el caso general, vale para este caso.

En particular será:

$$|t| = \frac{\left|\overrightarrow{OP}\right|}{|\vec{u}|}$$

1.3 Forma canónica (o simétrica) de la ecuación de la recta en el espacio. Planos proyectantes. Proyecciones ortogonales de la recta.

Si en las ecuaciones paramétricas de ***r***

$$r)\begin{cases} x = x_1 + u_1 t \\ y = y_1 + u_2 t \\ z = z_1 + u_3 t \end{cases} \quad t \in \Re$$

son $u_1 \neq 0;\ u_2 \neq 0;\ u_3 \neq 0$ se puede escribir:

$$r)\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{u_1} = t \\ \dfrac{y - y_1}{u_2} = t \\ \dfrac{z - z_1}{u_3} = t \end{cases} \quad t \in \Re$$

que a su vez es equivalente al sistema (eliminando *t*)

$$r)\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{u_1} = \dfrac{y - y_1}{u_2} \\ \dfrac{x - x_1}{u_1} = \dfrac{z - z_1}{u_3} \\ \dfrac{y - y_1}{u_2} = \dfrac{z - z_1}{u_3} \end{cases}$$

el cual es equivalente a cualquiera de los siguientes sistemas:

$$r)\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{u_1} = \dfrac{y - y_1}{u_2} \\ \dfrac{x - x_1}{u_1} = \dfrac{z - z_1}{u_3} \end{cases} ; \qquad r)\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{u_1} = \dfrac{y - y_1}{u_2} \\ \dfrac{y - y_1}{u_2} = \dfrac{z - z_1}{u_3} \end{cases} ; \qquad r)\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{u_1} = \dfrac{z - z_1}{u_3} \\ \dfrac{y - y_1}{u_2} = \dfrac{z - z_1}{u_3} \end{cases} \quad (6)$$

Por brevedad los sistemas (6) se suelen escribir así:

$$r)\ \frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{u_2} = \frac{z - z_1}{u_3} \qquad (7)$$

que es llamada **forma canónica o simétrica** de la ecuación de la recta en el espacio que pasa por $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y tiene la dirección de $\vec{u} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$.

No debe olvidarse que (7) **no** es una ecuación sino uno cualquiera de los tres sistemas (6).

Entonces nuestra recta ***r*** puede pensarse como el siguiente conjunto:

$$r = \left\{ P(x;y;z) / \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2} \wedge \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{z-z_1}{u_3} \right\}$$

es decir

$$r = \left\{ P(x;y;z) / \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2} \right\} \cap \left\{ P(x;y;z) / \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{z-z_1}{u_3} \right\}$$

Ahora bien, la ecuación:

$$\frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2}$$

se puede escribir de la forma:

$$u_2 x - u_1 y + \left(-u_2 x_1 + u_1 y_1\right) = 0$$

Haciendo $a = u_2;\ \ b = -u_1;\ \ \left(-u_2 x_1 + u_1 y_1\right) = d$, la última ecuación puede expresarse como:

$$\pi_1)\ ax + by + d = 0;\ \ \forall z$$

es decir, es la ecuación de un ***plano proyectante sobre el plano coordenado XY***.

En forma análoga la ecuación:

$$\frac{x-x_1}{u_1} = \frac{z-z_1}{u_3}$$

es la de un ***plano proyectante sobre el plano coordenado XZ***:

$$\pi_2)\ u_3 x - u_1 z + \left(-u_3 x_1 + u_1 z_1\right) = 0$$

Concluimos que la recta ***r*** puede darse como intersección de dos planos proyectantes sobre los planos coordenados, en este caso ***XY*** y ***XZ***.

Trabajando en forma similar con los sistemas restantes en (6) se puede mostrar que la misma recta ***r*** puede darse como intersección de pares de planos proyectantes sobre los planos ***XY*** e ***YZ*** y ***XZ*** e ***YZ*** respectivamente.

Llamamos ***proyección (ortogonal) de la recta r*** sobre cada uno de los planos coordenados, a las ***trazas de los planos proyectantes*** que la determinan, con cada uno de los respectivos planos coordenados.

Es decir, si llamamos con ***r'*** a la recta proyección de ***r*** sobre el plano coordenado ***XY***, será:

$$r' = \left\{ P(x;y;z) / \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2};\ \ \forall z \right\} \cap \left\{ P(x;y;z) / z = 0;\ \forall x;\ \forall y \right\}$$

Recordando que $\frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2}; \forall z$, es la ***ecuación del plano proyectante de r sobre el plano coordenado XY***, entonces ***r'***, la recta proyección de ***r*** sobre dicho plano coordenado, tendrá por ecuación:

$$r')\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{u_1} = \dfrac{y-y_1}{u_2} & \forall z \\ z = 0 \quad \forall x, \forall y \end{cases}$$

que es la ecuación de una recta contenida en el plano coordenado ***XY*** (ver figura 4).

Análogamente, si con ***r''*** llamamos a la recta proyección de ***r*** sobre el plano coordenado ***XZ***, será $r'')\begin{cases} \dfrac{y-y_1}{u_2}=\dfrac{z-z_1}{u_3} & \forall x \\ x=0 \ \ \forall y,\forall z \end{cases}$ y

$r''')\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{u_1}=\dfrac{z-z_1}{u_3} & \forall y \\ y=0 \ \ \forall x,\forall z \end{cases}$ es la ecuación de la recta proyección de ***r*** sobre el plano ***YZ***.

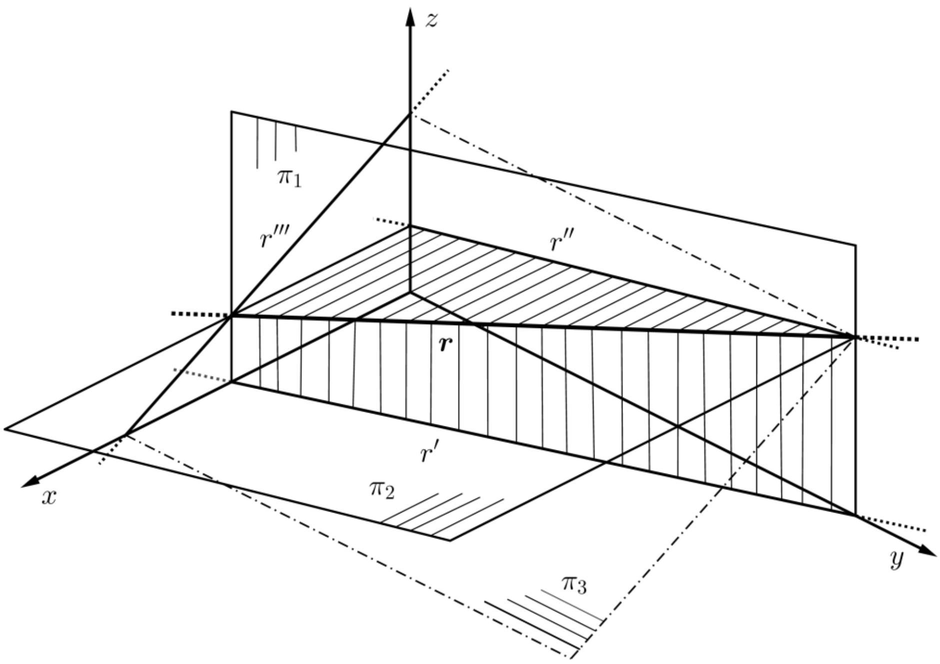


Figura 4

1.3.1 Casos en que se anulan uno o dos coeficientes directores de la recta.

Partiendo de las ecuaciones paramétricas de ***r***,

$$r)\begin{cases} x=x_1+u_1t \\ y=y_1+u_2t \\ z=z_1+u_3t \end{cases} \quad t\in\Re$$

con la condición de que $u_1\neq 0; u_2\neq 0; u_3\neq 0$ **,** obtuvimos la forma canónica de la ecuación de ***r***

$$\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2}=\frac{z-z_1}{u_3}.$$

Si por ejemplo $u_1=0$, las ecuaciones paramétricas de ***r*** quedan:

$$r)\begin{cases} x=x_1 \\ y=y_1+u_2t \\ z=z_1+u_3t \end{cases} \quad t\in\Re$$

despejando *t* de las dos últimas e igualando nos queda el sistema equivalente:

$$r)\begin{cases} x=x_1 \\ \dfrac{y-y_1}{u_2}=\dfrac{z-z_1}{u_3} \end{cases}$$

En este caso la recta ***r*** puede expresarse como la siguiente intersección de conjuntos de puntos del espacio:

$$r=\{P(x,y,z)/\,x=x_1\ \forall y;\forall z\}\cap\left\{P(x,y,z)/\,\frac{y-y_1}{u_2}=\frac{z-z_1}{u_3},\forall x\right\}$$

Es decir ***r*** viene dada como intersección de un plano paralelo al plano ***YZ*** y un plano proyectante sobre el plano ***YZ***. Es fácil ver que la recta ***r***, en este caso, es una recta paralela al plano coordenado ***YZ***.

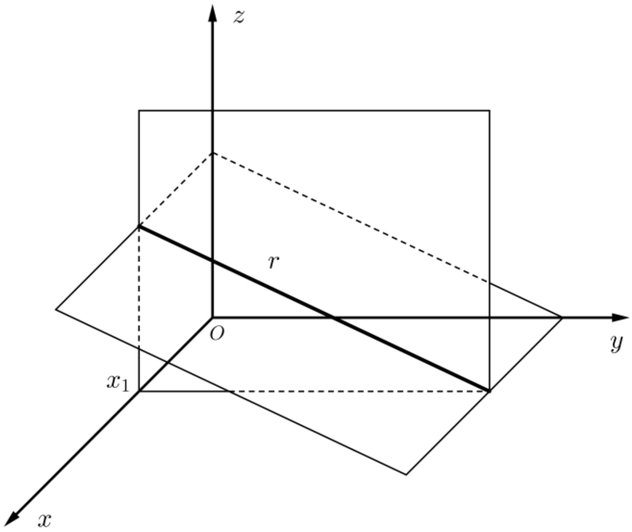


Figura 5

En los casos en que $u_2 = 0$ o $u_3 = 0$, trabajando de forma similar se llega a las ecuaciones de la recta. Si $u_2 = 0$ la recta ***r*** **e**s paralela al plano coordenado ***XZ*** y si $u_3 = 0$, ***r*** es paralela al plano ***XY***.

Si se anulan dos coeficientes directores, por ejemplo $u_1 = u_2 = 0$ y $u_3 \neq 0$, las ecuaciones paramétricas de ***r*** resultan:

$$r)\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \\ z = z_1 + u_3 t \end{cases} \qquad t \in \Re$$

Con las dos primeras ecuaciones ya podemos expresar a la recta ***r*** como intersección de dos conjuntos de puntos del espacio:

$$r = \{P(x, y, z) / x = x_1 \ \forall y; \forall z\} \cap \{P(x, y, z) / y = y_1; \forall x; \forall z\}$$

es decir ***r*** viene dada como intersección de un plano paralelo al plano coordenado ***YZ***, con otro plano paralelo al plano coordenado ***XZ***.

La recta ***r*** es en este caso una recta paralela a ambos planos coordenados, es decir es paralela al eje *z*.

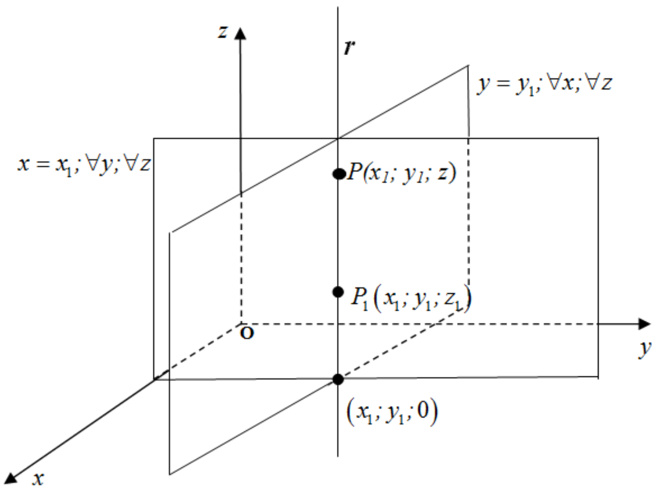


Figura 6

En forma análoga en el caso en que $u_1 = u_3 = 0$ y $u_2 \neq 0$, la recta es paralela al eje ***y***. Y si $u_2 = u_3 = 0$ y $u_1 \neq 0$, la recta es paralela al eje ***x***.

En todos los casos particulares queda como ejercicio estudiar la posición de la recta y obtener sus ecuaciones, cuando el punto de paso es el origen de coordenadas.

Ejemplo 1

a) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta ***r*** que pasa por los puntos $P(1;6;\,3)$ y $Q(3;2;\,4)$.

b) Encontrar las coordenadas de los puntos que resultan de la intersección de ***r*** con cada uno de los planos coordenados.

a) Tomamos a $P(1;6;\,3)$ como punto de paso de paso de ***r***, y a $\overrightarrow{PQ}=(2,-4,1)$ como un vector dirección.
Luego, las ecuaciones paramétricas de ***r*** son:

$$r)\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 6-4t \qquad t\in\Re \\ z = 3+t \end{cases}$$

b) La intersección de ***r*** con el plano coordenado ***XY,*** será un punto $P_1(x_1,y_1,0)$.

Haciendo $z=0$ en la tercera ecuación de ***r***, se tiene que $t=-3$.

Reemplazando $t=-3$ en las dos primeras ecuaciones de ***r*** tenemos que $P_1(-5;\,18;\,0)$.

En forma similar se obtiene que el punto que resulta de la intersección de ***r*** con el plano coordenado ***YZ*** es $P_2(0;8;\frac{5}{2})$, y que la intersección de ***r*** con el plano coordenado ***XZ*** es el punto $P_3(4;0;\frac{9}{2})$.

Ejemplo 2

Dado $A(-1;2;1)$, hallar las ecuaciones de la recta ***r*** que contiene al punto *A* y forma ángulos iguales con los ejes coordenados positivos. Determinar además las ecuaciones de los planos que proyectan la recta sobre los planos coordenados (planos proyectantes) y las ecuaciones de las rectas proyecciones ortogonales de ***r*** sobre cada plano coordenado.

Las ecuaciones paramétricas de *r* son:

$$r)\begin{cases} x = -1+u_1t \\ y = \;\;2+u_2t \qquad t\in\Re\,. \\ z = \;\;1+u_3t \end{cases}$$

Para determinar el vector $\vec{u}$, dirección de ***r***, tenemos en cuenta que ***r*** forma ángulos iguales con los ejes coordenados, luego sus cosenos directores, que son los del $\vec{u}$, deben ser iguales y por lo tanto deben ser iguales los coeficientes directores de ***r.*** Esto significa que cualquier vector $\vec{u}$ que tenga las tres componentes iguales es un vector paralelo a la recta.
Tomemos por ejemplo $\vec{u}$ = (1; 1; 1), luego las ecuaciones paramétricas de *r* son:

$$r)\begin{cases} x = -1+t \\ y = \;\;2+t \qquad t\in\Re \qquad (8) \\ z = \;\;1+t \end{cases}$$

La ecuación del plano proyectante de ***r*** sobre el plano coordenado ***XY***, se obtiene eliminando *t* entre las dos primeras ecuaciones, es decir:

$$x+1=y-2\,.$$

O sea

$$x-y=-3;\quad \forall z$$

es la ecuación del plano buscado. Mientras que la proyección ortogonal de ***r*** sobre el plano *XY*, será, según vimos:

$$r')\begin{cases} x-y=-3 & \forall z \\ z=0 & \forall x,\forall y \end{cases}$$

La ecuación del plano proyectante de ***r*** sobre el plano coordenado ***XZ***, se obtiene eliminando *t* entre las 1º y 3º ecuaciones de (8) y se tiene:

$$x+1=z-1$$

es decir:

$$x-z=-2;\quad \forall y$$

mientras que

$$r'')\begin{cases} x - z = -2 & \forall y \\ y = 0 & \forall x, \forall z \end{cases}$$

es la ecuación de la proyección ortogonal de ***r*** sobre dicho plano coordenado.

En forma similar se tiene que la ecuación del plano proyectante de *r* sobre el plano ***YZ*** es:

$$y - z = 1 \quad \forall x$$

y que la proyección ortogonal de ***r*** sobre dicho plano ***YZ***, es:

$$r''')\begin{cases} y - z = 1 & \forall x \\ x = 0 & \forall y, \forall z \end{cases}$$

1.4 Forma general de las ecuaciones de la recta en el espacio

Se puede considerar una recta ***r***, en el espacio, como la intersección de dos planos cualesquiera **no paralelos**.

Es decir, si

$$\pi_1)\, a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2)\, a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

son dos planos no paralelos, entonces:

$$r = \{P(x;y;z) / a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0\} \cap \{P(x;y;z) / a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0\} =$$

$$= \{P(x;y;z) / a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0;\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0\}$$

Este último miembro es equivalente a escribir el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales en *x*, *y*, *z*:

$$r)\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

que es la ***forma general de las ecuaciones de la recta en*** $\Re^3$. El sistema (9) nos da la recta ***r*** como intersección de dos planos no paralelos. Debemos observar que dada una recta en $\Re^3$, existen infinitos pares de planos no paralelos (entre ellos, los pares de planos proyectantes ya vistos), que la determinan (ver sistemas (6)).

1.4.1 Pasaje de la forma general a las ecuaciones paramétricas y viceversa.

Dada la recta $r)\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 & (\pi_1) \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 & (\pi_2) \end{cases}$ con π_1 y π_2 no paralelos, queremos obtener sus ecuaciones paramétricas.

Para ello necesitamos un vector $\vec{u}$ paralelo a ***r*** y un punto de paso.
Para obtener $\vec{u}$ pensamos que $\boldsymbol{r} = \pi_1 \cap \pi_2$, por lo tanto el vector normal a π_1: $\vec{n}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ es perpendicular a ***r***, y análogamente, el vector normal a π_2: $\vec{n}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ es perpendicular a ***r***. Estas dos condiciones implican que:

$\vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$ (o cualquier múltiplo escalar de él) dará la dirección de ***r*** .

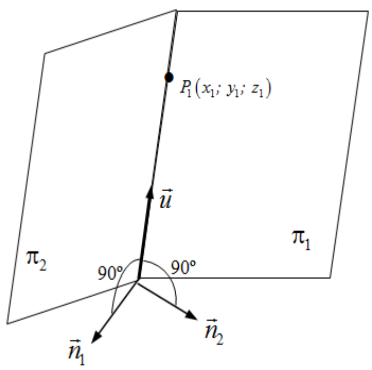


Figura 7

Ejemplo 3

Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta

$$r)\begin{cases} 2x-3y+7z=2 & (\pi_1) \\ 3x-8y+2z=5 & (\pi_2) \end{cases} \quad (10)$$

Para obtener un vector dirección de la recta ***r*** y que sea a su vez perpendicular a π_1 y π_2 calculamos el producto vectorial entre $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$.

Siendo: $\vec{n}_1=(2;-3;7)$ y $\vec{n}_2=(3;-8;2)$, resulta

$$\vec{u}=\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 7 \\ 3 & -8 & 2 \end{vmatrix}=50\vec{i}+17\vec{j}-7\vec{k}$$

Luego $\vec{u}=(50;17;-7)$ (o cualquier múltiplo escalar de él) dará la dirección de ***r***.

Para hallar un punto de paso $P_1(x_1,y_1,z_1)$, hacemos por ejemplo, $z_1=0$ (que equivale a hallar la intersección de ***r*** con el plano coordenado ***XY***).

Reemplazamos en (10) y se tiene $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ 3x-8y=5 \end{cases}$.

Resolviendo el sistema obtenemos el punto $P_1\left(\frac{1}{7},-\frac{4}{7},0\right)$ y las ecuaciones paramétricas de ***r*** son:

$$r)\begin{cases} x=\frac{1}{7}+50t \\ y=-\frac{4}{7}+17t \\ z=\quad -t \end{cases} \quad t\in\Re \quad (11)$$

Ejemplo 4

Determinar la recta anterior como intersección de los planos proyectantes sobre los coordenados ***XY*** y ***XZ***.

Para hallar las ecuaciones del plano proyectante sobre el coordenado ***XY***, eliminamos *t* entre las dos primeras ecuaciones de (11) y se tiene:

$$\left(x-\frac{1}{7}\right)\frac{1}{50}=\left(y+\frac{4}{7}\right)\frac{1}{17}\Leftrightarrow 17x-50y-31=0\ \forall z$$, que es la ecuación del plano proyectante buscado.

Para hallar la ecuación del plano proyectante de ***r*** sobre el coordenado ***XZ***, se elimina *t*, entre la primera y última ecuación de (11), se obtiene:

$$\left(x-\frac{1}{7}\right)\frac{1}{50}=-\frac{1}{7}z\Leftrightarrow -7x-50z+1=0\ \forall y$$, que es la ecuación el plano proyectante buscado.

Entonces la recta ***r*** del ejemplo 3, puede darse como la intersección de los siguientes planos:

$$r)\begin{cases} 17x-50y-31=0\ \forall z \\ -7x-50z+1=0\ \forall y \end{cases}$$

Dar una recta ***r*** como intersección de dos planos proyectantes puede hacerse también a partir de cualquier forma general de la misma, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5

Expresar la recta $r)\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ 2x+3y-z+1=0 \end{cases}$ como intersección de planos proyectantes sobre los planos coordenados ***YZ*** y ***XZ***.

Para obtener la ecuación del plano proyectante sobre el plano coordenado ***YZ*** que contiene a ***r***, eliminamos *x* entre ambas ecuaciones. Para ello multiplicamos ambos miembros de la primera ecuación por 2 y luego restamos, llegando a la ecuación del plano buscado:

$$-7y+3z-7=0 \quad \forall x$$

que satisfacen todos los puntos de la recta ***r***.

De forma análoga, para obtener la ecuación del plano proyectante sobre el plano coordenado ***XZ***, eliminamos *y* entre ambas ecuaciones del sistema dado. Para ello multiplicamos la primera ecuación por 3 y a la segunda por 2 y luego sumamos, obteniendo la ecuación:

$$7x+z-7=0 \quad \forall y$$

De esta forma, se obtiene que $r)\begin{cases}-7y+3z-7=0 \ \forall x \\ 7x+z-7=0 \ \forall y\end{cases}$.

Actividad 1

1. Una recta tiene las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases}x=-2+3t \\ y=4-t \\ z=1+5t\end{cases} \quad t\in\Re$

a) Escribe las coordenadas de dos puntos pertenecientes a la misma.
b) Explica por qué el punto de coordenadas $(10,1,10)$ no pertenece a la recta.
c) Escribe las coordenadas de los puntos de la recta que se encuentra a $\sqrt{46}$ unidades del origen de coordenadas.
d) Obtén la forma canónica o simétrica y expresa luego la recta como intersección de dos planos proyectantes.
e) Escribe las ecuaciones de las rectas que resultan de proyectar la recta dada sobre cada uno de los planos coordenados.

2. Escribe ecuaciones paramétricas de la recta que contiene al punto $(2,3,-4)$ y es perpendicular al plano de ecuación $x-4y+2z=8$.

3. a) Obtén ecuaciones paramétricas de la recta $\begin{cases}2x-y+z=6 \\ x+4y-2z=8\end{cases}$.

b) Halla las coordenadas del punto donde la recta corta al plano coordenado ***XZ***.

2. Ángulo entre dos rectas. Condiciones de paralelismo y ortogonalidad entre rectas.

Sean las rectas

$$r_1)\begin{cases}x=x_1+u_1t \\ y=y_1+u_2t \\ z=z_1+u_3t\end{cases} \quad t\in\Re \qquad \text{y} \qquad r_2)\begin{cases}x=x_2+v_1s \\ y=y_2+v_2s \\ z=z_2+v_3s\end{cases} \quad s\in\Re$$

donde $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$ y $\vec{v}=(v_1;v_2;v_3)$ dan las direcciones de ***r*₁** y ***r*₂** respectivamente.

Entonces:

a) $r_1 // r_2 \iff \vec{u} // \vec{v} \iff \vec{u}=\alpha\vec{v};\ \alpha\neq 0 \iff u_1=\alpha v_1;\ u_2=\alpha v_2;\ u_3=\alpha v_3$. En este caso las rectas son ***coplanares***.

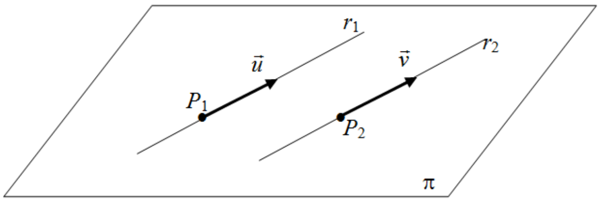


Figura 8

b) Si ***r*₁** y ***r*₂** no son paralelas puede suceder que:

i) $r_1 \cap r_2 = \phi$. En este caso las rectas no son coplanares y se llaman ***alabeadas***.

o ii) $r_1 \cap r_2 \neq \phi$. En este caso las rectas son ***coplanares***.

Si r_1 y r_2 son coplanares se define como ángulo entre las mismas al ángulo que determinan los vectores que dan sus direcciones, esto es:

$$\left(r_1 \hat{,} r_2\right) = \left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) = \varphi$$

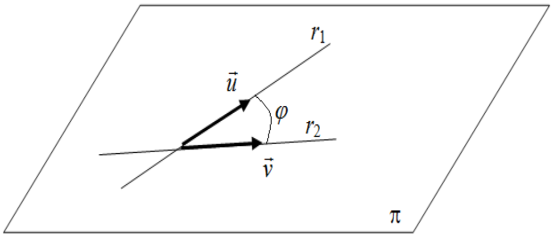


Figura 9

Si r_1 y r_2 son alabeadas se define como ángulo entre las mismas, al ángulo determinado por dos rectas que siendo paralelas a las dadas tiene un punto en común.

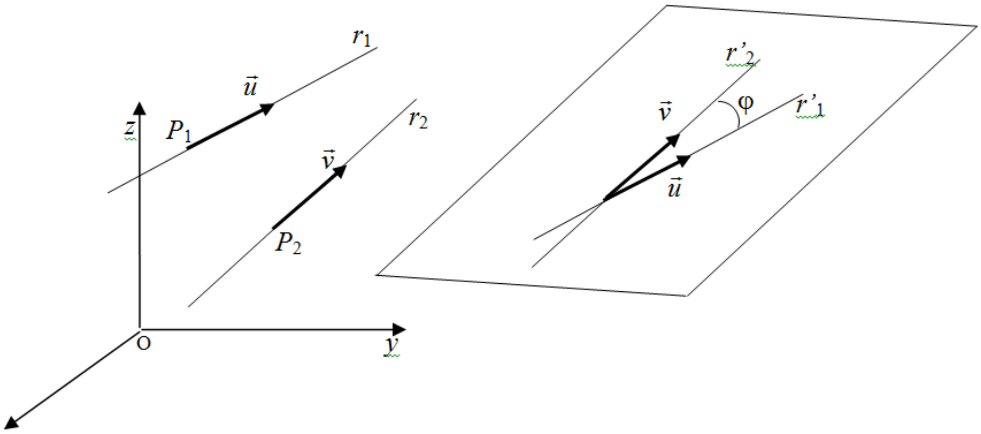


Figura 10

Observar que $r_1 \; // \; r_1'$, $r_2 \; // \; r_2'$ y r'_1 y r'_2 son coplanares.

Entonces, por definición de ángulo entre rectas tenemos que:

$$\boxed{\left(r_1 \hat{,} r_2\right) = \left(r'_1 \hat{,} r'_2\right) = \left(\vec{u} \hat{,} \vec{v}\right) = \varphi}$$

Si en particular $\left(r_1 \hat{,} r_2\right) = \dfrac{\pi}{2}$, las rectas se dicen ortogonales y notaremos $r_1 \perp r_2$.

Se tiene entonces que:

$$\boxed{r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = 0 \Leftrightarrow u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0}$$

Ejemplo 6

Determinar si el siguiente par de rectas son paralelas u ortogonales.

$$r_1)\begin{cases} x - \dfrac{2}{7}z = \dfrac{15}{7} & (\pi_1) \\ y + \dfrac{5}{7}z = -\dfrac{34}{7} & (\pi_2) \end{cases} \quad ; \quad r_2)\begin{cases} x - y - z - 7 = 0 & (\pi_3) \\ 3x - 4y - 11 = 0 & (\pi_4) \end{cases}$$

Ambas rectas están dadas en su forma general. Debemos determinar los vectores que dan sus respectivas direcciones.

Para r_1 tenemos:

$$\left.\begin{aligned}\vec n_1&=\left(1;0;-\frac{2}{7}\right)\\ \vec n_2&=\left(0;1;\frac{5}{7}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \vec u=\vec n_1\wedge\vec n_2=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ 1&0&-\frac{2}{7}\\ 0&1&\frac{5}{7}\end{vmatrix}=\frac{2}{7}\vec i-\frac{5}{7}\vec j+\vec k$$

Para r_2:

$$\left.\begin{aligned}\vec n_3&=(1;-1;-1)\\ \vec n_4&=(3;-4;0)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \vec v=\vec n_3\wedge\vec n_4=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ 1&-1&-1\\ 3&-4&0\end{vmatrix}=-4\vec i-3\vec j-\vec k$$

Es evidente que $\vec u$ y $\vec v$ no son paralelos. Luego las rectas no son paralelas.

Veamos si son ortogonales

$\vec u\times\vec v=\left(\frac{2}{7};-\frac{5}{7};1\right)\times(-4;-3;-1)=-\frac{8}{7}+\frac{15}{7}-1=0\Leftrightarrow\vec u\perp\vec v\Leftrightarrow r_1\ y\ r_2$ son ortogonales.

3. Ángulo entre recta y plano

Dados una recta y un plano:

$$r)\begin{cases}x=x_1+u_1t\\ y=y_1+u_2t\\ z=z_1+u_3t\end{cases}\quad t\in\Re\quad \text{y}\quad \pi)\,ax+by+cz+d=0$$

El ángulo que forman ***r*** y π, es el determinado por la recta ***r*** y su proyección ortogonal sobre π , ***r'***.

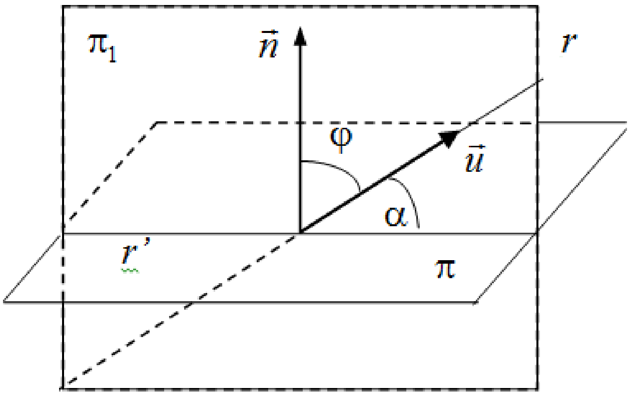


Figura 11

$r\subset\pi_1;\ \pi_1\perp\pi$, la proyección ortogonal de r sobre π es $r'=\pi_1\cap\pi$

Llamamos α al ángulo entre la recta ***r*** y el plano π y φ al que determinan los vectores $\vec u$ y $\vec n$.
Se tiene entonces que:

- $\alpha=\frac{\pi}{2}-\varphi$, si $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$
- $\alpha=\varphi-\frac{\pi}{2}$, si $\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi$

En ambos casos se cumple:

$$\boxed{sen\,\alpha=|\cos\varphi|=\frac{|\vec n\times\vec u|}{|\vec n|\,|\vec u|}}$$

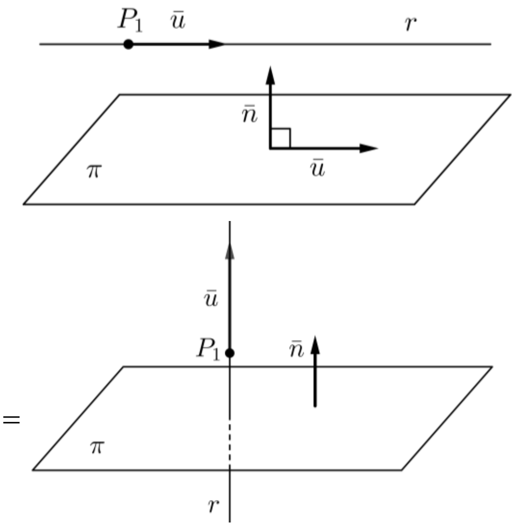
3.1 Condiciones de paralelismo y ortogonalidad entre recta y plano

Dados el plano π y la recta *r*, de ecuaciones:

$$\pi)\, ax+by+cz+d=0 \quad \text{y} \quad r)\begin{cases} x=x_1+u_1t \\ y=y_1+u_2t \\ z=z_1+u_3t \end{cases} \quad t\in\Re$$

El vector normal a π es $\vec{n}=(a;b;c)$ y el vector que da la dirección de ***r*** es $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$.

Entonces:



$$r\,//\,\pi \;\Leftrightarrow\; \vec{n}\perp\vec{u} \;\Leftrightarrow\; \vec{n}\times\vec{u}=0 \;\Leftrightarrow\; au_1+bu_2+cu_3=0\,,$$

condición de paralelismo entre recta y plano

$$r\perp\pi \Leftrightarrow \vec{n}\,//\,\vec{u} \Leftrightarrow (a;b;c)=\alpha(u_1;u_2;u_3) \Leftrightarrow a=\alpha\,u_1;\; b=\alpha\,u_2;\; c=$$

,

condición de ortogonalidad entre recta y plano

Figura 12

Actividad 2

1. Halla el ángulo agudo que determinan las rectas: $\begin{cases}2x-y+3z-4=0\\3x+2y-z+7=0\end{cases}$ y $\begin{cases}x+y-2z+3=0\\4x-y+3z+7=0\end{cases}$.

2. Comprueba que las rectas:

a) $\begin{cases}2x+y+z=0\\x-4y+2z+12=0\end{cases}$ y $\dfrac{x+7}{2}=\dfrac{3y+4}{-3}=\dfrac{9-z}{3}$ son paralelas.

b) $\begin{cases}2x+y-2z+10=0\\y+2z-4=0\end{cases}$ y $\dfrac{4-x}{4}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z+11}{2}$ son ortogonales.

3. Verifica que el plano de ecuación $3x-8y+2z=8$ contiene a la recta de ecuaciones $\dfrac{x-2}{10}=\dfrac{2y-2}{11}=\dfrac{z-5}{7}$.

4. Determina el valor de a para que el plano $x+y-2z=5$ y la recta $\dfrac{x-1}{3a}=\dfrac{y-2}{a+1}=\dfrac{z-5}{a+2}$ sean paralelos y calcula la distancia entre ambos.

5. Dado el plano $x+2y-z=4$, determina el valor de a y b para que la recta $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{a+1}=\dfrac{z-4}{2b}$ sea perpendicular al plano.

6. Halla el ángulo formado por la recta $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{5}$ y el plano $2x+y-z=5$.

4. Problemas de intersección

4.1 Intersección de rectas en el espacio

Dadas dos rectas:

$$r_1)\begin{cases} x = x_1 + u_1\, t \\ y = y_1 + u_2\, t \\ z = z_1 + u_3\, t \end{cases} \quad t \in \Re \quad \textbf{y} \quad r_2)\begin{cases} x = x_2 + v_1\, s \\ y = y_2 + v_2\, s \\ z = z_2 + v_3\, s \end{cases} \quad s \in \Re\ ,$$

con $\vec{u} = (u_1,\, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1,\, v_2, v_3)$ sus correspondientes vectores dirección,

Puede suceder que:

a) $r_1 \cap r_2 \neq \phi$

i) $r_1 \cap r_2 = \{P(x_0, y_0, z_0)\}$, r_1 y r_2 se cortan en un único punto y son ***coplanares.***

ii) $r_1 \cap r_2 = r_1 = r_2$; r_1 y r_2 son coincidentes (las coordenadas de los puntos de una verifican las ecuaciones de la otra)

b) $r_1 \cap r_2 = \phi$, entonces r_1 y r_2 son ***paralelas*** (coplanares) o ***alabeadas*** (no coplanares).

Ejemplo 7

Analizar si los siguientes pares de rectas son coplanares o alabeadas. En caso de ser coplanares, decidir si son paralelas o hallar el punto en que se cortan.

a) $r_1)\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad t \in \Re \quad r_2)\ x - 5 = y = \dfrac{z-7}{4}$

Al escribir ambas rectas en forma paramétrica $r_1)\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad t \in \Re$ y $r_2)\begin{cases} x = 5 + s \\ y = s \\ z = 7 + 4s \end{cases} \quad s \in \Re$, observamos que no son paralelas, ya que los vectores que les dan su dirección no lo son.

Veamos si las rectas se intersectan. Para ello igualamos las ecuaciones: $\begin{cases} 1 + 2t = 5 + s \\ 2 - t = s \\ 3 + 2t = 7 + 4s \end{cases}$ **,**

de las dos primeras obtenemos que**:**

$$1 + 2t = 5 + (2 - t) \Leftrightarrow t = 2 \textbf{, } \text{luego } s = 0\,.$$

Observar que los valores hallados: $t = 2$ y $s = 0$, verifican la tercera ecuación, esto quiere que estas rectas se cortan en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$. Para hallar las coordenadas de *P*, reemplazamos el valor $t = 2$ en las ecuaciones de r_1, o $s = 0$ en las ecuaciones de r_2 . En ambos casos obtenemos el punto $P(5,0,7)$ **.**

Luego $r_1 \cap r_2 = \{P(5,0,7)\}$ y por lo tanto las rectas son coplanares.

b) $r_1)\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad t \in \Re \quad r_2)\begin{cases} x = 2 + s \\ y = s \\ z = 1 + 4s \end{cases} \quad s \in \Re$

Repitiendo el razonamiento anterior, igualando las dos primeras ecuaciones de las rectas, llegamos a que $t = 3$ y $s = -1$. Al reemplazar $t = 3$ en la tercer ecuación de r_1, obtenemos $z = 9$. Pero reemplazando $s = -1$ en la tercer ecuación de r_2 , resulta que $z = -3$. Esto quiere decir que las rectas no se cortan en ningún punto, y como no son paralelas (sus vectores dirección no son paralelos), resulta que r_1 y r_2 son alabeadas.

Ejemplo 8

Hallar, si existe, la intersección de las rectas:

$$r_1)\begin{cases} x = 1-2t \\ y = t \\ z = 7+5t \end{cases} \quad t \in \Re; \quad \text{y} \quad r_2)\begin{cases} 3x+4y=1 \\ 2y+3z=38 \end{cases}$$

Las coordenadas (x_0, y_0, z_0) de un punto de $r_1 \cap r_2$ satisfacen las ecuaciones de ambas rectas, esto quiere decir que deben verificar el sistema:

$$\begin{cases} x_0 = 1-2t \\ y_0 = t \\ z_0 = 7+5t \\ 3x_0 + 4y_0 = 1 \\ 2y_0 + 3z = 38 \end{cases}$$

Reemplazando las tres primeras ecuaciones en las dos últimas se obtiene el sistema: $\begin{cases} 3(1-2t)+4t=1 \\ 2t+3(7+5t)=38 \end{cases}$.

Resolviendo ambas ecuaciones obtenemos el mismo valor para t: $t=1$. Esto quiere decir que el sistema tiene solución, y por lo tanto las rectas se intersectan en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$, que se obtiene reemplazando $t=1$ en las ecuaciones de $\boldsymbol{r_1}$.

Podemos escribir entonces:

$$r_1 \cap r_2 = \{(-1;1;12)\}$$

4.2 Intersección de recta y plano.

Sean la recta $r)\begin{cases} x = x_1 + u_1 t \\ y = y_1 + u_2 t \\ z = z_1 + u_3 t \end{cases} \quad t \in \Re$ y el plano $\pi)\, ax+by+cz+d=0$

Se desea encontrar los puntos intersección de r y π , es decir el conjunto:

$$r \cap \pi = \{P(x;y;z) / \, x = x_1 + u_1 t; \; y = y_1 + u_2 t; \; z = z_1 + u_3 t; ax+by+cz+d=0 \}$$

lo que equivale a plantear el sistema:

$$\begin{cases} x = x_1 + u_1 t \\ y = y_1 + u_2 t \\ z = z_1 + u_3 t \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases} \quad t \in \Re$$

sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas de fácil solución por sustitución.

Para ello reemplazamos en la última ecuación los valores de *x, y, z* dados en las tres primeas ecuaciones, se obtendrá así una ecuación en *t*, del tipo:

$$\alpha t = \beta .$$

Si $\alpha \neq 0$, entonces $t = \dfrac{\beta}{\alpha}$

Reemplazando este valor de t en las primeras tres ecuaciones del sistema se obtiene el punto de intersección de r y π .

Es decir: $$P(x,y,z) = r \cap \pi .$$

Si $\alpha = 0$ puede ser:

1) $\beta = 0$, luego quedará $0t = 0$, ecuación que se verifica $\forall t \in R$, lo que equivale a decir que todo valor de *x, y, z* de las tres primeras ecuaciones verifica la ecuación del plano.

En este caso **la recta está contenida en el plano**.

Es decir: $$r = r \cap \pi$$

2) $\beta \neq 0$, entonces será $0t = \beta$ ecuación incompatible, lo que significa que para ningún valor de t se obtendrán valores x, y, z de las tres primeras ecuaciones que verifiquen la ecuación del plano.
En otras palabras

$$r \cap \pi = \varnothing \text{ (sistema incompatible).}$$

Geométricamente significa que $r \,//\, \pi$.

Ejemplo 9

Hallar $r \cap \pi$, siendo:

$$\pi)\ 2x - y + z - 1 = 0 \quad \text{y} \quad r)\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = \ \ 1 - t \end{cases} \quad t \in \Re$$

El sistema a plantear es el siguiente:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = \ \ 1 - t \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad t \in \Re$$

Reemplazando las tres primeras ecuaciones en la última, se tiene:

$$2t - (-1 + 2t) + (1 - t) - 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ 2t + 1 = -2t + 1 - t - 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ 1 - t = 0 \ \Leftrightarrow\ t = 1$$

Reemplazando este valor de t en cada una de las tres primeas ecuaciones y obtenemos:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ y_0 &= -1 + 2 = 1 \\ z_0 &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Luego r y π se cortan en el punto $P_0(1;1;0)$

Ejemplo 10

Analizar si el plano $\pi)\, 3x - 8y + 2z = 8$ y la recta $r)\begin{cases} x = 2 + 10\,t \\ y = -1 + \dfrac{11}{2}t \\ z = 5 + 7\,t \end{cases} \quad t \in \Re$ son paralelos o se intersectan en un punto.

Planteamos el sistema $\begin{cases} x = 2 + 10\,t \\ y = -1 + \dfrac{11}{2}t \\ z = 5 + 7\,t \\ 3x - 8y + 2z = 8 \end{cases} \quad t \in \Re$,

Reemplazando las tres primeras ecuaciones en la última, obtenemos:

$$3(2 + 10\,t) - 8(-1 + \frac{11}{2}t) + 2(5 + 7t) = 8 \Leftrightarrow 0t = 16$$, ecuación que no tiene solución.

Esto quiere decir que la recta y el plano no se intersectan, por lo tanto deben ser paralelos.

Verifiquemos esta situación planteando la ***condición de paralelismo entre recta y plano*****:**

$$r \,//\, \pi \ \Leftrightarrow\ \vec{n} \perp \vec{u} \ \Leftrightarrow\ \vec{n} \times \vec{u} = 0 \ \Leftrightarrow\ au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$$

Para nuestros vectores: $(3,-8,2) \times (10, \frac{11}{2}, 7) = 30 - 44 + 14 = 0$, verífincandose así que plano y recta son paralelos.

Actividad 3

1. Verifica que la recta de ecuaciones $\begin{cases} x = 1+u \\ y = 2+u \\ z = -3 \end{cases}$; $u \in \Re$ es ortogonal al plano $\begin{cases} x = 2+t-s \\ y = 1-t+s \\ z = 2+t+2s \end{cases}$; $t, s \in \Re$ y encuentra las coordenadas del punto de intersección.

Ayuda: *Convierte las ecuaciones paramétricas del plano en una ecuación general. Sumando miembro a miembro* x *e* y *se eliminan los parámetros* s *y* t.

2. Halla las coordenadas del punto simétrico a $P(1,1,1)$ respecto del plano $x-2y+3z=0$. Controla el resultado calculando la distancia de P y del punto simétrico a P, al plano.
Ayuda: *El punto de intersección entre el plano y la recta perpendicular (al plano) que contiene a* P *es el punto medio entre P y su simétrico.*

3. Encuentra las coordenadas del punto de intersección entre las rectas $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -3+2t \\ z = -2-t \end{cases}$; $t \in \Re$ y $\begin{cases} x = 17+3s \\ y = 4+s \\ z = -8-s \end{cases}$; $s \in \Re$ y obtén luego una ecuación del plano que determinan.

5. Problemas de distancia

5.1 Distancia de un punto a una recta en el espacio.

Sean la recta $r)\begin{cases} x = x_1 + u_1\, t \\ y = y_1 + u_2\, t \\ z = z_1 + u_3\, t \end{cases}$ $t \in \Re$ y el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Se desea hallar la distancia de $P_0(x_0, y_0, z_0)$ a ***r***,

que simbolizaremos: $\delta(P_0, r)$.

Si $P_0 \in r \;\Rightarrow\; \delta(P_0, r) = 0$

Consideremos entonces $P_0 \notin r$

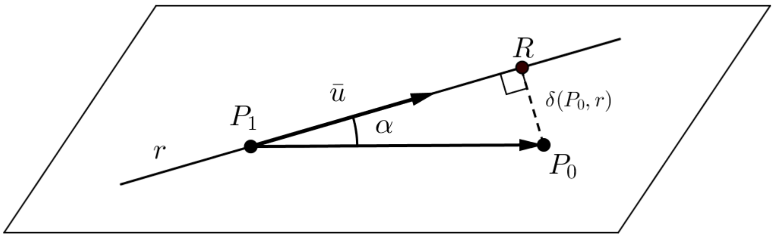


Figura 13

En el triángulo rectángulo $P_1 \overset{\Delta}{R} P_0$ se verifica que:

$$\delta(P_0; r) = \left|\overrightarrow{P_1P_0}\right| sen\,\alpha,$$

como $\vec{u} \neq \vec{0}$ podemos multiplicar y dividir por $|\vec{u}|$ obteniendo:

$$\boxed{\delta(P_0; r) = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\right| |\vec{u}|\, sen\,\alpha}{|\vec{u}|} = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0} \wedge \vec{u}\right|}{|\vec{u}|}}$$

Expresión que nos da la distancia pedida. Observemos que si el sentido de $\vec{u}$ fuera contrario deberíamos trabajar con el ángulo suplementario de α, llamémoslo α', pero $sen\,\alpha' = sen\,\alpha$, pues $\alpha + \alpha' = \pi$.

Ejemplo 11

Calcular la distancia de P_0 a ***r*** siendo:

$$r)\begin{cases} x=-1+t \\ y=1+2t \\ z=\quad -t \end{cases} \quad t\in\Re \quad \mathbf{y} \quad P_0(1;\,2;-2)$$

$$\vec{u}=(1;2;-1);\quad P_1\in r\,/\,P_1(-1;1;0)\,;\quad \overrightarrow{P_1P_0}=(2;1;-2)\,;\ |\vec{u}|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{P_1P_0}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=3\vec{i}+0\vec{j}+3\vec{k}\,;\quad \left|\overrightarrow{P_1P_0}\wedge\vec{u}\right|=\sqrt{9+0+9}=\sqrt{18}$$

luego

$$\delta(P_0;r)=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}\cong 1{,}73$$

5.2 Distancias entre dos rectas alabeadas

Dadas dos rectas alabeadas (no coplanares), se desea calcular las distancias entre ellas, es decir ***la distancia medida sobre la dirección normal a ambas***. Simbolizaremos dicha distancia con $\delta(r_1;r_2)$.

Sean $P_1\in r_1, P_2\in r_2$ y $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los vectores dirección de r_1 y r_2 respectivamente.

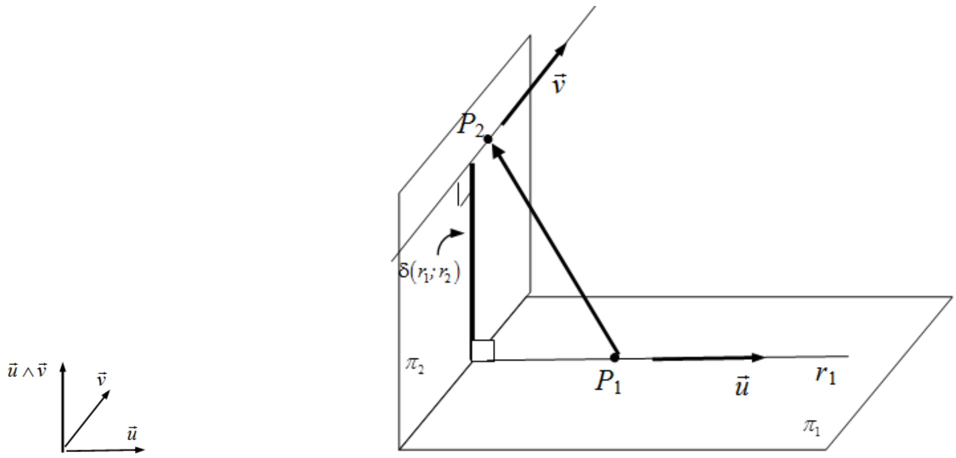


Figura 14

Observemos en la figura que la distancia $\delta(r_1;r_2)$ se obtiene proyectando $\overline{P_1P_2}$ sobre la dirección normal a r_1 y r_2 simultáneamente.

Dicha dirección normal a ambas rectas viene dada por la dirección de $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

Entonces la expresión que permite calcular la distancia pedida viene dada por:

$$\boxed{\delta(r_1;r_2)=\left|Proy_{(\vec{u}\wedge\vec{v})}\overline{P_1P_2}\right|=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\times(\vec{u}\wedge\vec{v})_0\right|=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\times\frac{(\vec{u}\wedge\vec{v})}{|\vec{u}\wedge\vec{v}|}\right|}$$

6. Condición de coplanaridad de rectas en el espacio

Sean las rectas:

$$r_1)\begin{cases} x=x_1+u_1\,t \\ y=y_1+u_2\,t \\ z=z_1+u_3\,t \end{cases} \quad t\in\Re \quad \text{y} \quad r_2)\begin{cases} x=x_2+v_1\,s \\ y=y_2+v_2\,s \\ z=z_2+v_3\,s \end{cases} \quad s\in\Re$$

Las rectas r_1 y r_2 son coplanares siempre y cuando lo sean los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\bar{u}$ y $\bar{v}$. Luego:

$$\boxed{r_1 \text{ y } r_2 \text{ son coplanares} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2} \times \bar{u} \wedge \bar{v} = 0}$$

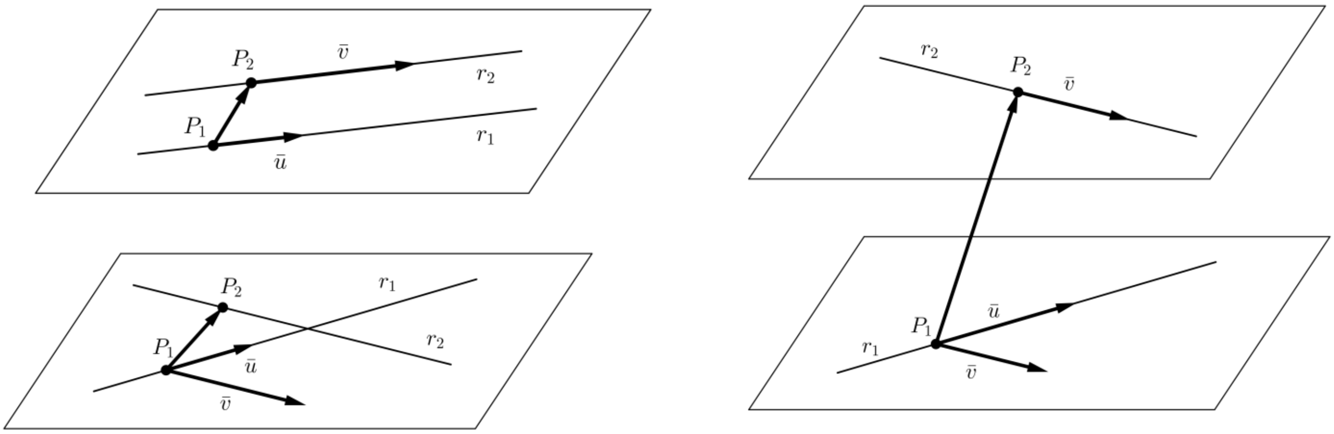


Figura 15

Ejemplo 12

Analizar si los siguientes pares de rectas son alabeadas o coplanares. En caso de ser alabeadas, calcular la distancia entre ellas. Si son coplanares, hallar la ecuación del plano que determinan.

a) $r_1)\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad t \in \Re \qquad r_2)\begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 2 - 3s \\ z = -1 - 4s \end{cases} \quad s \in \Re$

b) $l_1)\ \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-1}{9} = \dfrac{z-1}{-3} \qquad l_2)\begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 4 - 3s \\ z = s \end{cases} \quad s \in \Re$

a) Las rectas dadas son alabeadas, pues no son paralelas y el sistema $\begin{cases} 2 - t = 1 + 2s \\ 1 + 2t = 2 - 3t \\ -1 + t = -1 - 4s \end{cases}$ no tiene solución (verificarlo).

Calculamos la distancia considerando $P_1(2;1;-1)$; $P_2(1;2;-1)$, $\bar{u} = (-1;2;1)$ y $\bar{v} = (2;-3;-4)$.

Luego $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1;1;0)$ y $\left|\overrightarrow{P_1P_2} \times \bar{u} \wedge \bar{v}\right| = \left\| \begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{matrix} \right\| = 3$;

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = (-5;-2;-1)$ **y** $\left|\vec{u} \wedge \vec{v}\right| = \sqrt{25+4+1} = \sqrt{30}$

Luego:

$$\delta(r_1;r_2) = \frac{3}{\sqrt{30}}.$$

b) Consideramos a $P_1(3;1;1)$, $P_2(1;4;0)$, $\bar{u} = (-2;9;-3)$ y $\bar{v} = (2;-3;1)$.

Las rectas l_1 y l_2 no son paralelas, pues sus respectivos vectores dirección no son paralelos (verificarlo).

Como $\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -2 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, las rectas son coplanares. Para determinar la ecuación del plano que las contiene necesitamos un vector normal al mismo, y por lo tanto perpendicular a cada una de las rectas (o a sus respectivos vectores dirección) y un punto de paso.

Elegimos en este caso, un vector normal: $\vec{u} \wedge \vec{v} = (0; -4; -12)$, y un punto de paso: $P_1(3; 1; 1)$.

La ecuación del plano buscado es:

$$-4(y-1) - 12(z-1) = 0 , \quad \text{o} \quad -y - 3z + 4 = 0 .$$

Actividad 4

1. Halla la distancia del punto $P(1,4,5)$ a la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{3}$ y encuentra las coordenadas del punto de la recta que se encuentra a dicha distancia.

2. Calcula la distancia entre el par de rectas paralelas del ejercicio 2. a) de la Actividad 2.

3. Dadas las rectas $\begin{cases} x = k + 2t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$ y $\begin{cases} x = 1 + s \\ y = -1 + 2s \\ z = -s \end{cases}$

a) Determina *k* para que resulten coplanares.

b) Para dicho valor de *k* halla una ecuación del plano que determinan y las coordenadas del punto de intersección.

4. a) Halla la distancia entre las rectas $r_1)\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ y r_2 determinada por los puntos $P(1,0,2)$ y $Q(-2,2,6)$.

b) Explica cómo podrías determinar las coordenadas de los puntos $A \in r_1$ y $B \in r_2$ de modo que el módulo del vector $\overline{AB}$ sea igual a la distancia entre r_1 y r_2 .

5. Determina una ecuación del plano π que contiene al punto $P(6,7,0)$ y a la recta $r)\begin{cases} 3x - y + z + 1 = 0 \\ x + 3y - z + 3 = 0 \end{cases}$

6. Encuentra una ecuación del plano que contiene a la recta $\begin{cases} 2x + 3y - 5z + 7 = 0 \\ 5x + 4y + 7z + 1 = 0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $x - y + z = 0$.

7. Halla una ecuación de la recta proyección ortogonal de la recta r sobre el plano $\pi)\ x + y - z = 1$, siendo $r)\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{5}$.

8. Encuentra una ecuación de la recta *L* que contiene al punto $P(-2,3,4)$ y es ortogonal a $r_1)\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + 3t \\ z = -7 + 5t \end{cases}$ $; t \in \Re$ y a

$r_2)\begin{cases} x = -2 + 4s \\ y = 3 - 2s \\ z = 3 + t \end{cases}$ $; s \in \Re$.

9. Los puntos $A(1,-2,4)$, $B(3,1,-3)$ y $C(5,1,-7)$ son los vértices de un triángulo.

a) Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a la altura trazada por el vértice *B* al lado opuesto.

b) ¿En qué intervalo tiene que variar el parámetro para generar los puntos de la altura?

Ejercicios Adicionales

1. Dados los puntos $P_1(-3,2,2)$ y $P_2(7,-4,0)$, y la recta $r)\begin{cases} x+2y-z+5=0 \\ 2x+3y+z-1=0 \end{cases}$,

a) Verifica que la recta determinada por P_1 y P_2 es paralela a r.
b) Calcula la distancia entre ellas.
c) Halla el plano que las contiene.

2. Sean $r)\begin{cases} 2x+y-3z+1=0 \\ -x+2y+z-3=0 \end{cases}$ y $\pi) x-2y-z+5=0$,

a) Verifica que r es paralela a π.
b) Calcula la distancia entre r y π.
c) Halla el plano que contiene a r y es perpendicular a π.

3. Dadas las rectas $r)\begin{cases} 3x+y-z=0 \\ x+2y+z+2=0 \end{cases}$ y $s)\ x-2=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-2}$,

a) Verifica que son secantes y halla su punto intersección.
b) Halla las ecuaciones de los planos paralelos al determinado por las dos rectas y que se encuentran a 10 unidades del origen de coordenadas.
c) Calcula la distancia del punto $P(2,1,0)$ a la recta s.

4. Dadas las rectas $r)\begin{cases} x=-1+4t \\ y=\ \ 2-3t \\ z=\ \ 2t \end{cases}$ $t\in\Re$ y $s)\ x-2=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z}{3}$,

a) Define a r como intersección de dos planos proyectantes.
b) Determina la posición relativa de las rectas r y s.
c) Calcula la distancia entre r y s.
d) Da la ecuación del plano π tal que $\pi\perp s$ y $P(-1,2,0)\in\pi$.

5. Dada la recta $r)\ \dfrac{x-1}{k}=\dfrac{y+1}{-2}=z$, y los puntos $A(2,1,0)$, $B(0,1,0)$ y $C(1,1,1)$,

a) Halla el valor de k de manera que r resulte paralela al plano π determinado por los puntos A, B y C.
b) Para dicho valor de k,
   i. Calcula la distancia entre r y π.
   ii. Halla el plano α que contiene a r y es perpendicular a π.

6. Dados el punto $P(2,-1,0)$ y la recta $r)\begin{cases} x+y=0 \\ x-z=-1 \end{cases}$,

a) Halla el plano π que contiene a P y a r.
b) Calcula la distancia ente r y el eje y.
c) Halla el punto de r más cercano al origen de coordenadas.

7. Dadas las rectas $r)\begin{cases} x+y=0 \\ 3y-z=5 \end{cases}$ $s)\begin{cases} x=1+2t \\ y=\ \ -t \\ z=1-5t \end{cases}$ $t\in\Re$,

a) Prueba que son alabeadas.
b) Halla las ecuaciones de dos planos paralelos ere si que contengan respectivamente a cada una de las rectas dadas.
c) Halla la distancia entre ellas.

RESPUESTAS

Actividad 1

1. a) $t=2: P_1(4,2,11)$, $t=-1: P_2(-5,5,-4)$ c) $P(1,3,6)$ y $Q\left(-\frac{29}{7},\frac{33}{7},-\frac{18}{7}\right)$

d) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-1}{5}$, $\begin{cases}-x-3y+10=0\\ 5x-3z+13=0\end{cases}$ e) $\begin{cases}-x-3y+10=0\\ z=0\end{cases}$, $\begin{cases}5x-3z+13=0\\ y=0\end{cases}$, $\begin{cases}5y+z-21=0\\ x=0\end{cases}$

2. $r)\begin{cases}x=2+t\\ y=3-4t\\ z=-4+2t\end{cases}$, $t\in\Re$ **3.** a) $\begin{cases}x=-2t\\ y=10+5t\\ z=16+9t\end{cases}$, $t\in\Re$ b) $(4,0,-2)$

Actividad 2

1. 161º 58' 37,58" **4.** $a=\frac{3}{2}$; $dist=2\sqrt{6}$ **5.** $a=9$ y $b=-\frac{5}{2}$ **6.** $\alpha=arcsen\left(\frac{\sqrt{198}}{198}\right)\cong$ 4° 4' 30,97"

Actividad 3

1. I $(1,2,-3)$ **2.** $\left(\frac{5}{7},\frac{11}{7},\frac{1}{7}\right)$ **3.** $P(2,-1,-3)$ **;** $\pi)\ x+2y+5z+15=0$

Actividad 4

1. $d=\sqrt{\frac{16}{11}}$; $Q\left(\frac{23}{11},\frac{40}{11},\frac{51}{11}\right)$ **2.** $d=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5659}{14}}$ **3.** $k=-6$; $x+y+3z=0$; $\mathrm{I}(4,5,-3)$

4. a) $d=\frac{8}{\sqrt{390}}$ **5.** $\pi)\ -13x+11y-7z+1=0$ **6.** $23x+24y+z+31=0$ **7.** $\begin{cases}8x-7y+z+5=0\\ x+y-z=1\end{cases}$

8. $L)\begin{cases}x=-2+13t\\ y=3+22t\\ z=4-8t\end{cases}$ $t\in\Re$ **9.** $\begin{cases}x=3+7t\\ y=1-13t\\ z=-3-t\end{cases}$ $t\in\Re$

Ejercicios adicionales

1. b) $\sqrt{\frac{174}{35}}$ c) $7x+10y+5z-9=0$

2. b) $\sqrt{\frac{6}{3}}$ c) $3x+4y-5z-1=0$

3. a) $r\cap s=\{(1,-2,1)\}$ b) $\pi_1)-2x+11y+10z+150=0$; $\pi_2)-2x+11y+10z-150=0$ c) $\sqrt{2}$

4. a) $\begin{cases}3x+4y-5=0\\ 2y+3z-4=0\end{cases}$ b) r y s son alabeadas c) $\sqrt{\frac{1}{30}}$ d) $x-4y-3z+9=0$

5. a) *k=3* b) i. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ii. $x+4y+5z+3=0$

6. a) $\pi)2x+3y+z-1=0$ b) $\sqrt{2}$ c) $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

7. b) $\pi_1)2x-y+z+3=0$; $\pi_2)2x-y+z-3=0$ c) $\sqrt{6}$