



**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA**  
**ESCUELA DE FORMACIÓN BÁSICA**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

# **Álgebra y Geometría Analítica**

**Geometría Lineal del Espacio**

**La Recta en el espacio**

**Problemas de Rectas y Planos**

**Ricardo Sagristá**

**2017**

## LA RECTA EN EL ESPACIO

### 1- la recta en el espacio como lugar geométrico

Sea en el espacio un punto fijo  $P_1$  y un vector  $\vec{u}$

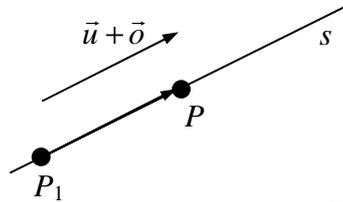


Fig.1

El lugar geométrico:

$$r = \{P / \overline{P_1P} = t \vec{u}; t \in R\} \quad (1)$$

es la recta que pasa por  $P_1$  y tiene la misma dirección que el vector  $\vec{u}$

Hemos descrito la recta  $r$  del espacio, como el lugar geométrico de los puntos  $P$ ; que son extremos de los vectores  $\overline{P_1P}$  colineales con  $\vec{u}$ , es decir  $\overline{P_1P} = t \vec{u}$ . El punto  $P$  (móvil) describe la recta, cuando  $t$  recorre el conjunto  $R$  de números reales.

### 2- Ecuación vectorial de la recta en el espacio.

Vamos a introducir ahora, un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales con la base canónica asociada.

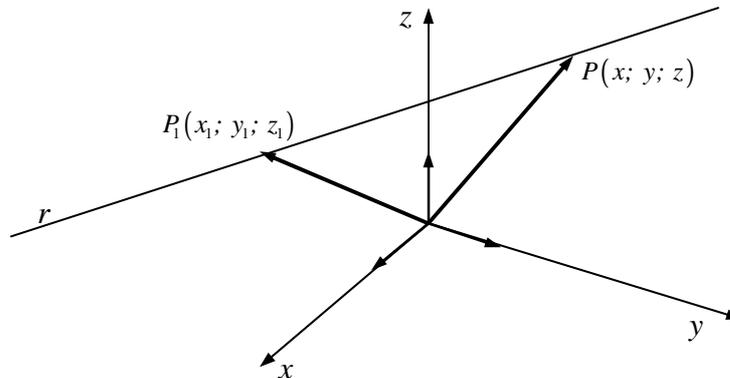


Fig.2

Sea el punto fijo  $P_1(x_1; y_1; z_1)$  por el que pasa la recta.

El vector  $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$  que da la dirección de la recta es obviamente no nulo, entonces será  $|\vec{u}| \neq 0$

El lugar geométrico (1) lo podemos escribir así:

$$r = \{P(x; y; z) / \overline{OP} = \overline{OP_1} + t \vec{u}; t \in R\}$$

La ecuación:

$$(2) \quad \overline{OP} = \overline{OP_1} + t \vec{u}$$

es la **ecuación vectorial** de la recta  $r$

Todo punto  $P \in r$ , la verifica. Recíprocamente, todo punto  $P$  del espacio que la verifica pertenece a la recta.

Si el punto de paso de la recta es el origen de coordenadas, es decir  $P_1 \equiv 0$  será  $\overline{OP_1} = \vec{0}$  y la ecuación vectorial (2), es para este caso particular:

$$(3) \quad \overline{OP} = t \vec{u}$$

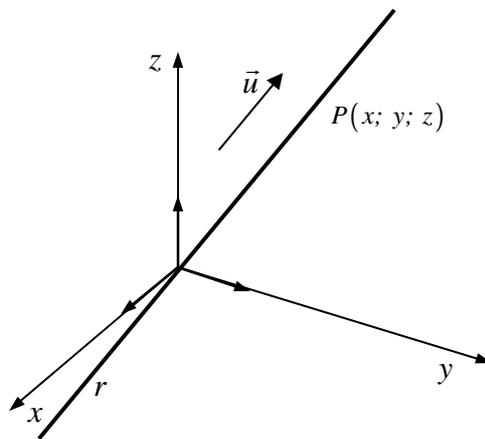


Fig.3

### 2-1- Ecuación paramétrica. Coeficientes y cosenos directores. Significado del parámetro $t$ .

Si en la ecuación vectorial (2) trabajamos con las componentes de los vectores que en ella figuran, es decir

$$\overline{OP} = (x; y; z)$$

$$\overline{OP_1} = (x_1; y_1; z_1)$$

$$\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$$

tendremos

$$(x; y; z) = (x_1; y_1; z_1) + t(u_1; u_2; u_3)$$

y operando como hicimos para la recta en el plano llegamos a:

$$(x; y; z) = (x_1 + tu_1; y_1 + tu_2; z_1 + tu_3)$$

es decir

$$r) \begin{cases} x = x_1 + u_1 t \\ y = y_1 + u_2 t \\ z = z_1 + u_3 t \end{cases} \quad (4)$$

que son las ecuaciones paramétricas de la recta, cuyo punto de paso es  $P_1(x_1; y_1; z_1)$  y cuya dirección es la del vector  $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ .

Estas componentes se llaman **coeficientes directores** de  $r$ .

Si  $|\vec{u}| = 1$  (versor), entonces, dichas componentes se llaman **cosenos directores** de la recta (por los motivos ya conocidos)

En cuanto al significado geométrico del parámetro  $t \in R$ , tomando la ecuación vectorial (2) tenemos:

$$t\vec{u} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{P_1P} \quad (\text{ver Fig. 2})$$

es decir

$$|t||\vec{u}| = |\overrightarrow{P_1P}| \Leftrightarrow |t| = \frac{|\overrightarrow{P_1P}|}{|\vec{u}|}; \quad |\vec{u}| \neq 0$$

Se llega al mismo resultado que para la recta en el plano. Es decir  $|t|$  es proporcional a la distancia entre la posición del punto  $P(x; y; z)$  que describe la recta. Para ese valor de  $t$  y el punto  $P_1(x_1; y_1; z_1)$  de paso.

Si  $|\vec{u}| = 1$ , entonces  $|t|$  es exactamente dicha distancia.

Si la recta pasa por el origen es decir  $x_1 = 0; y_1 = 0; z_1 = 0$  entonces las ecuaciones (4) quedan:

$$r) \begin{cases} x = u_1 t \\ y = u_2 t \\ z = u_3 t \end{cases} \quad (5)$$

que son las ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por el origen. Todo lo dicho para el caso general, vale para este caso.

En particular será :

$$|t| = \frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\vec{u}|}$$

## 2-2- Forma canónica (o simétrica) de la ecuación de la recta en el espacio. Planos proyectantes. Proyecciones ortogonales de la recta.

Si en las ecuaciones paramétricas de  $r$ )

$$r) \begin{cases} x = x_1 + u_1 t \\ y = y_1 + u_2 t \\ z = z_1 + u_3 t \end{cases}$$

es  $u_1 \neq 0; u_2 \neq 0; u_3 \neq 0$  se puede escribir:

$$r) \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-x_1}{u_1} = t \\ \frac{y-y_1}{u_2} = t \\ \frac{z-z_1}{u_3} = t \end{array} \right.$$

que a su vez es equivalente al sistema (eliminando  $t$ )

$$r) \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2} \\ \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{z-z_1}{u_3} \\ \frac{y-y_1}{u_2} = \frac{z-z_1}{u_3} \end{array} \right.$$

el cual es equivalente a cualquiera de los siguientes sistemas:

$$r) \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2} \\ \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{z-z_1}{u_3} \end{array} \right. ; \quad r) \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2} \\ \frac{y-y_1}{u_2} = \frac{z-z_1}{u_3} \end{array} \right. ; \quad r) \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{z-z_1}{u_3} \\ \frac{y-y_1}{u_2} = \frac{z-z_1}{u_3} \end{array} \right. \quad (6)$$

Por brevedad los sistemas (6) se suelen escribir así:

$$r) \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2} = \frac{z-z_1}{u_3} \quad (7)$$

que es llamada **forma canónica o simétrica** de la ecuación de la recta en el espacio que pasa por  $P_1(x_1; y_1; z_1)$  y tiene la dirección de  $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ .

No debe olvidarse que (7) no es una ecuación sino uno cualquiera de los tres sistemas (6).

Entonces nuestra recta  $r$  puede pensarse como el siguiente conjunto:

$$r = \left\{ P(x; y; z) / \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2} \wedge \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{z-z_1}{u_3} \right\}$$

es decir

$$r = \left\{ P(x; y; z) / \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2} \right\} \cap \left\{ P(x; y; z) / \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{z-z_1}{u_3} \right\}$$

ahora bien la ecuación:

$$\frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2}$$

se puede escribir:

$$u_2x - u_1y + (-u_2x_1 + u_1y_1) = 0$$

ecuación que se puede presentar así, haciendo  $a = u_2$ ;  $b = -u_1$ ;  $(-u_2x_1 + u_1y_1) = d$

$$ax + by + d = 0; \quad \forall z$$

es decir es la ecuación de un plano proyectante sobre el plano coordenado  $XY$ .

En forma análoga la ecuación

$$\frac{x - x_1}{u_1} = \frac{z - z_1}{u_3}$$

es la de un plano proyectante sobre el coordenado  $XZ$ :

$$u_3x - u_1z + (-u_3x_1 + u_1z_1) = 0$$

Resumiendo: la recta  $r$ ) puede darse como intersección de dos planos proyectantes sobre los planos coordenados, en este caso  $XY$  y  $XZ$ .

Trabajando en forma similar con los sistemas restantes en (6) se puede mostrar que la misma recta  $r$ ) puede darse como intersección de pares de planos proyectantes sobre los planos  $XY$  e  $YZ$  y  $XZ$  e  $YZ$  respectivamente.

Llamamos **proyección (ortogonal) de la recta  $r$ )** sobre cada uno de los planos coordenados, a las trazas de los planos proyectantes que la determinan, con cada uno de los respectivos planos coordenados.

Es decir, si llamamos con  $r'$ ) a la proyección de  $r$ ) sobre el coordenado  $XY$ , será:

$$r' = \left\{ P(x; y; z) / \frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{u_2}; \quad \forall z \right\} \cap \left\{ P(x; y; z) / z = 0; \quad \forall x; \quad \forall y \right\}$$

entonces tendremos:

$$\pi_1) \quad u_2x - u_1y + (-u_2x_1 + u_1y_1) = 0; \quad \forall z$$

es decir

$$ax + by + d = 0; \quad \forall z$$

la ecuación del plano proyectante de  $r$ ) sobre el plano coordenado  $XY$ . Mientras que la proyección de  $r$ ) sobre dicho plano coordenado, tendrá por ecuación:

$$r') \quad ax + by + d = 0; \quad \forall z$$

que es la ecuación de una recta contenida en el plano coordenado  $XY$ .

En forma análoga se tendrá, si con  $r''$ ) llamamos la proyección de  $r$ ) sobre el plano coordenado  $XZ$ .

$$r'' = \left\{ P(x; y; z) / \frac{x - x_1}{u_1} = \frac{z - z_1}{u_3}; \quad \forall y \right\} \cap \left\{ P(x; y; z) / y = 0; \quad \forall x; \quad \forall z \right\}$$

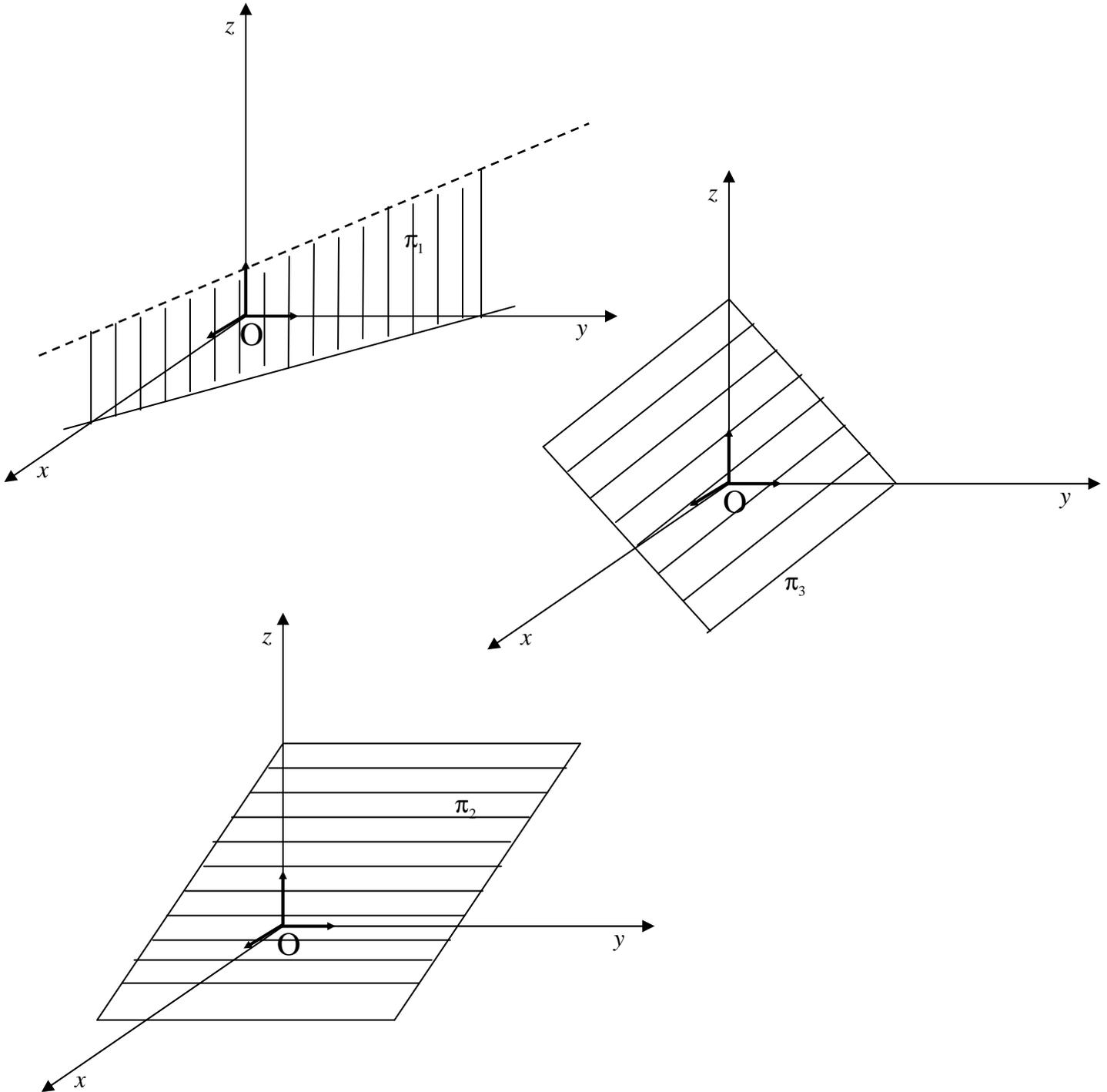
será entonces:

$$\pi_3) \quad u_3y - u_2z + (-u_3y_1 + u_2z_1) = 0; \quad \forall x$$

es la ecuación del plano proyectante de  $r$ ) sobre el plano coordenado  $YZ$ . Por lo tanto la ecuación de  $r''$ ), proyección de  $r$ ) sobre dicho plano coordenado es:

$$r''') \quad u_3y - u_2z + (-u_3y_1 + u_2z_1) = 0; \quad x = 0$$

que es una recta contenida en el  $YZ$ .



## 2-2-1- Casos en que se anulan uno o dos coeficientes directores de la recta.

Partiendo de las ecuaciones paramétricas de  $r$ ):

$$r) \begin{cases} x = x_1 + u_1 t \\ y = y_1 + u_2 t \\ z = z_1 + u_3 t \end{cases}$$

obtuvimos la forma canónica de la ecuación de  $r$ )

$$\frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{u_2} = \frac{z - z_1}{u_3}$$

con la condición que  $u_1 \neq 0$ ;  $u_2 \neq 0$ ;  $u_3 \neq 0$

Sea por ejemplo  $u_1 = 0$ , las ecuaciones paramétricas de  $r$ ) quedan así:

$$r) \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 + u_2 t \\ z = z_1 + u_3 t \end{cases}$$

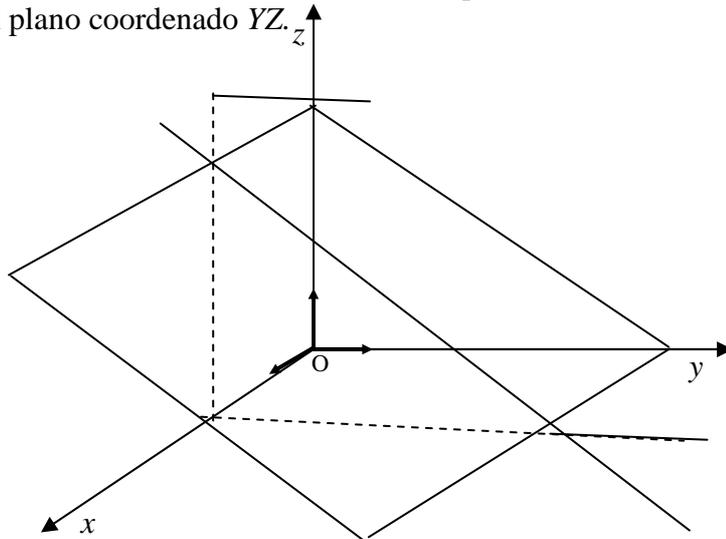
despejando y de las dos últimas e igualando nos queda el sistema equivalente:

$$r) \begin{cases} x = x_1 \\ \frac{y - y_1}{u_2} = \frac{z - z_1}{u_3} \end{cases}$$

es decir en este caso la recta  $r$ ) puede expresarse como la siguiente intersección de conjuntos de puntos del espacio:

$$r = \left\{ P(x; y; z) / x = x_1; \forall y; \forall z \right\} \cap \left\{ P(x; y; z) / \frac{y - y_1}{u_2} = \frac{z - z_1}{u_3}; \forall x \right\}$$

Es decir  $r$ ) viene dada como intersección de un plano paralelo al coordenado  $YZ$  y un plano proyectante sobre el coordenado  $YZ$ . Es fácil ver que la recta  $r$ ), en este caso, es una recta paralela al plano coordenado  $YZ$ .



Se dejan para el lector los casos en que  $u_2 = 0$  o bien  $u_3 = 0$

Con un análisis similar al que hicimos se llega a las ecuaciones paramétricas de la recta para estas situaciones. Resulta la recta  $r$  paralela al plano coordenado  $XZ$  (si  $u_2 = 0$ ) ó bien  $r$  es paralela al coordenado  $XY$  (si  $u_3 = 0$ )

Si se anulan dos coeficientes directores, por ejemplo  $u_1 = u_2 = 0; u_3 \neq 0$ , las ecuaciones paramétricas de  $r$  quedan así:

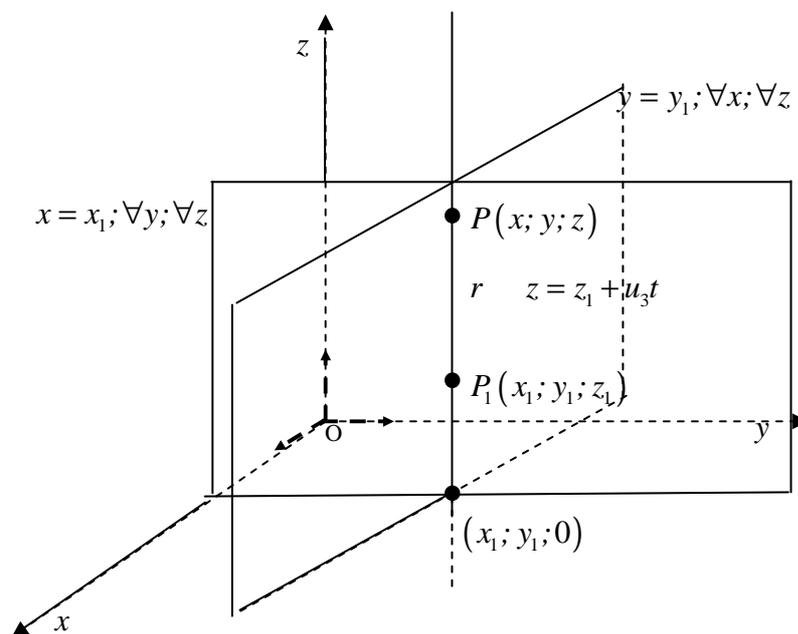
$$r) \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \\ z = z_1 + u_3 t \end{cases}$$

Con las dos primeras ecuaciones ya podemos expresar a la recta  $r$  como intersección de dos conjuntos de puntos del espacio.

$$r = \{P(x; y; z) / x = x_1; \forall y; \forall z\} \cap \{P(x; y; z) / y = y_1; \forall x; \forall z\}$$

es decir  $r$ ) viene dada como intersecciones de un plano paralelo al coordenado  $YZ$ , con otro plano que a su vez, paralelo al coordenado  $XZ$ .

La recta  $r$ ) es sin más una recta paralela a ambos planos coordenados, es decir es paralela al eje  $z$ , en este caso.



En forma análoga estudiar los casos  $u_1 = u_3 = 0; u_2 \neq 0$  (la recta es paralela al eje  $Y$ ), y  $u_2 = u_3 = 0; u_1 \neq 0$  (la recta es paralela al eje  $X$ ).

En todos los casos particulares vistos estudiar la posición de la recta y obtener sus ecuaciones, cuando el punto  $P_1(x_1; y_1; z_1)$  de paso es el origen de coordenadas.

### Ejemplo 1:

Dado el punto  $A(-1; 2; 1)$  hallar las ecuaciones de la recta  $r$  que pasa por el punto  $A$  y forma ángulos iguales con los ejes coordenados. Determinarse además las ecuaciones de los planos proyectantes y las proyecciones ortogonales de  $r$  sobre cada plano coordenado, así como las intersecciones de  $r$  con dichos planos coordenados. Las ecuaciones de  $r$  serán, en forma paramétrica:

$$r) \begin{cases} x = -1 + u_1 t \\ y = 2 + u_2 t \\ z = 1 + u_3 t \end{cases}$$

para determinar  $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ , que da la dirección de  $r$ , tenemos en cuenta que  $r$  debe formar ángulos iguales con los ejes coordenados, luego sus cosenos directores, que son los del  $\vec{u}$ , deben ser iguales, por lo tanto deben ser iguales los coeficientes directores de  $\vec{u}$  (y de  $r$ ), esto significa que cualquier vector  $\vec{u}$  que tenga las tres componentes iguales es un vector "contenido" en la recta. Tomemos por ejemplo  $\vec{u} = (1; 1; 1)$ , luego las coordenadas de  $r$  serán:

$$r) \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (8)$$

la ecuación del plano proyectante de  $r$  sobre el plano coordenado  $XY$ , se obtiene eliminando  $t$  entre los dos primeros.

es decir

$$x + 1 = y - 2$$

o sea

$$x - y = -3; \quad \forall z$$

es la ecuación buscada. Mientras que la proyección (ortogonal), de  $r$  sobre el plano  $XY$ , sean según vimos:

$$r') \quad x - y = -3; \quad z = 0$$

la ecuación del plano proyectante de  $r$  sobre el plano coordenado  $XZ$ , se obtiene eliminando  $t$  entre la 1ª y la 3ª de (8) y se tiene:

$$x + 1 = z - 1$$

es decir:

$$x - z = -2; \quad \forall y$$

(plano proyectante de  $r$  sobre  $XZ$ )

mientras que

$$r'') \quad z - x = -2; \quad y = 0$$

es la ecuación de la proyección (ortogonal) de  $r$  sobre dicho plano coordenado. En forma similar se obtiene:

Ecuación plano proyectante de  $r$  sobre el coordenado  $YZ$  (eliminando  $t$ , entre segunda y tercera de (8)):

$$y - z = 1 \quad \forall x$$

mientras que la proyección (ortogonal) de  $r$  sobre dicho plano  $YZ$ , será:

$$y - z = 1 \quad x = 0 \quad (r'')$$

la intersección de  $r$  con el plano coordenado  $YZ$ , será un punto  $P_1(x_1; y_1; 0) \Leftrightarrow z_1 = 0$  de la última de las ecuaciones (8) se tiene:

$$0 = 1 + t \quad \Leftrightarrow t = -1$$

valor que reemplazado en las ecuaciones restantes de (8), nos da:

$$x_1 = -1 - 1 = -2$$

$$y_1 = 2 - 1 = 1$$

luego

$$P_1(-2; 1; 0)$$

la intersección de  $r$  con el plano coordenado  $XZ$  será un punto  $P_2(x_2; 0; z_2) \Leftrightarrow y_2 = 0$  de la segunda ecuación de (8) se tiene:

$$0 = 2 + t \quad \Leftrightarrow t = -2$$

este valor se reemplaza en las ecuaciones restantes de (8) y se tiene:

$$x_2 = -1 - 2 = -3$$

$$z_2 = 1 - 2 = -1$$

luego

$$P_2(-3; 0; -1)$$

La intersección de  $r$  con el plano coordenado  $XY$  será un punto  $P_3(x_3; y_3; z_3) \Leftrightarrow z_3 = 0$

De la primera ecuación de (8) se obtiene:

$$0 = -1 + t \quad \Leftrightarrow t = 1$$

este valor se reemplaza en las ecuaciones restantes de (8) y se llega

$$y_3 = 2 + 1 = 3$$

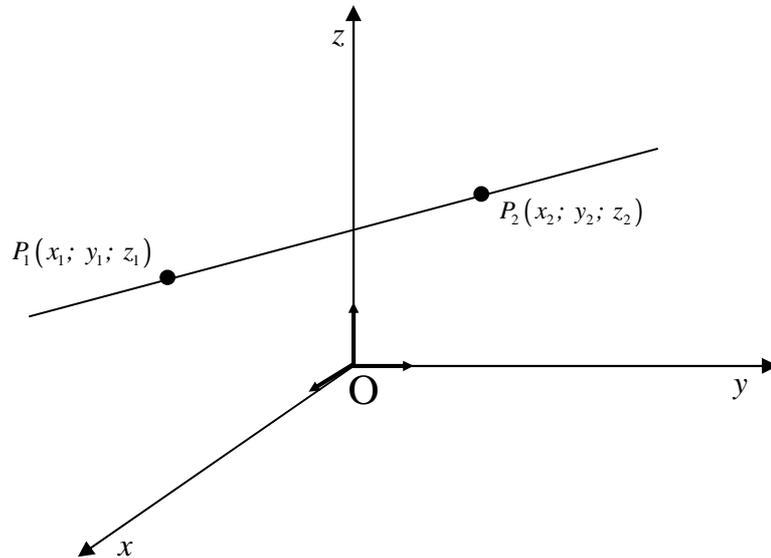
$$z_3 = 1 + 1 = 2$$

Entonces:

$$P_3(0; 3; 2)$$

### 2-3- Ecuaciones de la recta que pasa por dos puntos conocidos.

Sean  $P_1(x_1; y_1; z_1)$ ,  $P_2(x_2; y_2; z_2)$ . Se toma como punto del plano cualquiera de los dos, por ejemplo  $P_1$ .



Además es evidente que un vector que da la dirección de la recta es

$$\vec{u} = \overline{P_1P_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

por ello, las ecuaciones de la recta, en forma paramétrica son:

$$r) \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases}$$

#### Ejemplo 2:

Hallar las ecuaciones de la recta  $r$ ) que pasa por los puntos  $P_1(1; 6; 3)$ ;  $P_2(3; 2; 3)$

Un punto de paso será por ejemplo  $P_1(1; 6; 3)$ . Además  $\overline{P_1P} = \vec{u} = (2; -4; 0)$ .

Luego:

$$r) \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 6 - 4t \\ z = 3 \end{cases}$$

Si queremos expresar a  $r$ ) como intersección de dos planos proyectantes, eliminando  $t$ , entre las dos primeras ecuaciones:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-6}{-4}$$

operando se llega

$$-2x - y + 8 = 0; \quad \forall z$$

(plano proyectante sobre XY)

De la tercera ecuación:

$$z = 3; \quad \forall x; \forall y$$

tenemos la ecuación de un plano paralelo al coordenado  $XY$ , es decir proyectante sobre los coordenados  $XZ$  y  $ZY$ .

Luego la recta  $r$ ) puede expresarse:

$$r) \begin{cases} -2x - y + 8 = 0; & \forall z \\ z = 3 & ; \forall x; \forall y \end{cases}$$

La recta  $r$ ) es paralela al plano coordenado  $XY$ .

## 2-4-Forma general de las ecuaciones de la recta en el espacio

Se puede considerar una recta  $r$ ), en el espacio, como la intersección de dos planos cualesquiera **no paralelos**.

Es decir si

$$\pi_1) a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\pi_2) a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

entonces

$$\begin{aligned} r &= \{P(x; y; z) / a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0\} \cap \{P(x; y; z) / a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0\} = \\ &= \{P(x; y; z) / a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0; a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0\} \end{aligned}$$

Este último miembro es equivalente a escribir el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales en  $x, y, z$ :

$$r) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

que es la forma general de las ecuaciones de la recta en  $R^3$  el sistema (9) nos da la recta  $r$ ) como intersección de dos planos no paralelos. Debemos observar que dada una recta en  $R^3$ , existen infinitos pares de planos no paralelos (entre ellos, los pares de planos proyectantes ya vistos), que la determinan. (ver sistemas (6))

## 2-5-Pasaje de la forma general a las ecuaciones paramétricas y recíprocamente.

Dada:

$$r) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 & (\pi_1) \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 & (\pi_2) \end{cases}$$

$\pi_1$  y  $\pi_2$  no paralelos

queremos obtener las ecuaciones paramétricas de  $r$ ).

Para ello necesitamos los vectores  $\vec{u}$  que dan la dirección de  $r$ ) y un punto de paso. Para obtener  $\vec{u}$  pensamos que  $r) \in \pi_1 \cap \pi_2$ , por lo tanto el vector normal a

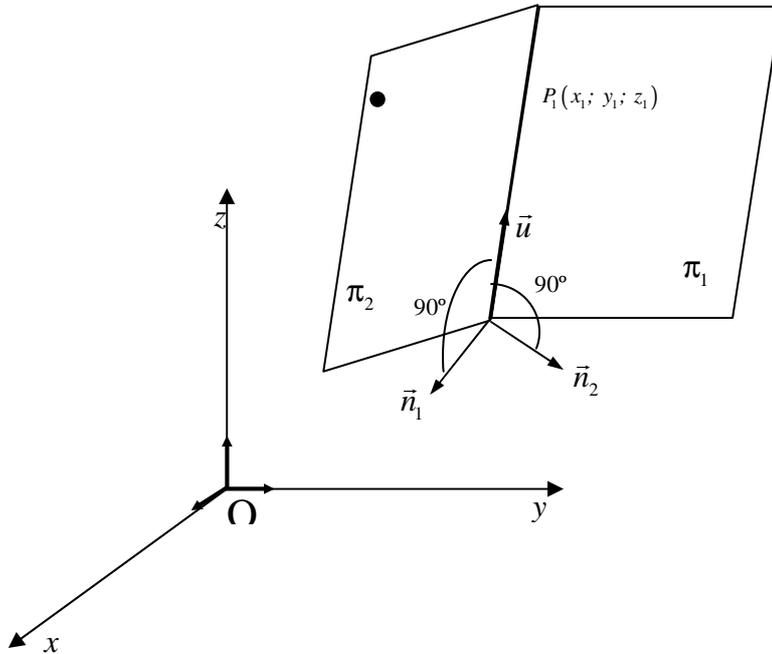
$$\pi_1 : \vec{n}_1 = (a_1; b_1; c_1) \perp r$$

lo mismo

$$\vec{n}_2 = (a_2; b_2; c_2) \perp r$$

pero estas dos condiciones implican:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 \perp \vec{u} \\ \vec{n}_2 \perp \vec{u} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 \quad (10)$$



### Ejemplo 3:

Hallas las ecuaciones paramétricas de la recta

$$r) \begin{cases} 2x + 3y + 7z = 2 & (\pi_1) \\ 3x - 8y + 2z = 5 & (\pi_2) \end{cases} \quad (11)$$

Aplicando (10) obtenemos un vector  $\vec{u}$  que da la dirección de  $r$ .

Al ser  $\vec{n}_1 = (2; -3; 7)$ ;  $\vec{n}_2 = (3; -8; 2)$  será

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 7 \\ 3 & -8 & 2 \end{vmatrix} = 50\vec{i} + 17\vec{j} - 7\vec{k}$$

Luego  $\vec{u} = (50; 17; -7)$  (o cualquier múltiplo escalar de él) dará la dirección de  $r$

Para hallar un punto de paso  $P_1(x_1; y_1; z_1)$ , hacemos por ejemplo,  $z_1 = 0$  (que equivale a hallar la intersección de  $r$  con el plano coordenado  $XY$ ).

Reemplazamos en (11) y se tiene:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 3x - 8y = 5 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, por ejemplo, aplicando la regla de Cramer, se tiene:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}; \quad y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-7} = -\frac{4}{7}$$

es decir un punto de  $r$ ) será  $P_1\left(\frac{1}{7}; -\frac{4}{7}; 0\right)$  y las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$r) \begin{cases} x = \frac{1}{7} + 50t \\ y = -\frac{4}{7} + 17t \\ z = -7t \end{cases} \quad (12)$$

#### Ejemplo 4:

Determinar la recta anterior como intersección de los planos proyectantes sobre los coordenados  $XY$  y  $XZ$ .

Para hallar las ecuaciones del plano proyectante sobre el coordenado  $XY$ , eliminemos  $t$  Entre las dos primeras ecuaciones de (12) y se tiene:

$$\left(x - \frac{1}{7}\right) \frac{1}{50} = \left(x + \frac{4}{7}\right) \frac{1}{17} \Leftrightarrow 17x - 50y - 31 = 0 \quad \forall z$$

es el plano proyectante

Para hallar la ecuación del plano proyectante de  $r$ ) sobre el coordenado  $XZ$ , se elimina  $t$ , entre la primera y última ecuación de (12), se obtiene:

$$\left(x - \frac{1}{7}\right) \frac{1}{50} = -\frac{1}{7}z \Leftrightarrow -7x - 50y + 1 = 0 \quad \forall y$$

es el plano proyectante buscado.

Entonces la misma recta  $r$ ) del ejemplo 3, puede darse así:

$$r) \begin{cases} 17x - 50y - 31 = 0 \\ -7x - 50y + 1 = 0 \end{cases}$$

### Observación:

Dada la recta  $r$ ) del ejercicio 3

$$r) \begin{cases} 2x - 3y - 7z = 2 \\ 3x - 8y + 2z = 5 \end{cases}$$

Las ecuaciones de los planos proyectantes se pueden obtener directamente del sistema dado. Por ejemplo: ecuación del plano proyectante sobre el plano coordenado  $XY$ , se elimina  $z$  entre ambas ecuaciones para ello multiplicamos ambos miembros de la primera ecuación por 2, y ambos miembros de la segunda ecuación por 7, luego restamos, se llega a la ecuación consecuencia del sistema:

$$\begin{aligned} -17x + 50y &= -31 \Leftrightarrow \\ 17x - 50y - 31 &= 0, \quad \forall z \\ &\text{como habíamos obtenido.} \end{aligned}$$

Para obtener la ecuación del plano proyectante sobre el plano coordenado  $XZ$ , eliminemos  $y$ , entre ambas ecuaciones del sistema dado. Para ello multipliquemos la primera ecuación por  $(-8)$  y a la segunda por 3 y luego sumamos, se obtiene la ecuación:

$$\begin{aligned} 7x + 50z &= 1 \Leftrightarrow \\ -7x - 50z + 1 &= 0 \quad \forall y \\ &\text{como obtuvimos} \end{aligned}$$

Veamos ahora el problema inverso, nos dan una recta por sus ecuaciones paramétricas:

$$r) \begin{cases} x = x_1 + u_1 t \\ y = y_1 + u_2 t \\ z = z_1 + u_3 t \end{cases} \quad (13)$$

y se quiere pasar a la forma general, es decir, expresarla como intersección de un par cualquiera de planos no paralelos, tal que  $r = \pi_1 \cap \pi_2$ .

Conviene expresar  $r$ ) como intersección de dos planos proyectantes. Este problema ya lo hemos estudiado, basta eliminar  $t$  entre dos pares cualesquiera de las ecuaciones de (13) se tienen así, según vimos pares de planos proyectantes de  $r$ ) sobre los coordenados (ver sistemas (6)) y el ejemplo 1.

### Ejercicio:

Determinar la forma general de la recta  $r$ ) /

$$r) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$$

**Respuesta:**

$$r) \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - z = 2 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad r) \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2y + 3z = -4 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad r) \begin{cases} 2x - z = 2 \\ 2y + 3z = -4 \end{cases}$$

## 2-6- Ángulos entre dos rectas, condiciones de paralelismo y ortogonalidad entre rectas.

Sean las rectas

$$r_1) \begin{cases} x = x_1 + u_1 t \\ y = y_1 + u_2 t \\ z = z_1 + u_3 t \end{cases}; \quad r_2) \begin{cases} x = x_2 + v_1 t \\ y = y_2 + v_2 t \\ z = z_2 + v_3 t \end{cases}$$

donde  $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$  y  $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$  dan las direcciones de  $r_1$  y  $r_2$  respectivamente.

$$\text{Si } r_1 // r_2 \Leftrightarrow \vec{u} // \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = \alpha \vec{v}; \quad \alpha \neq 0 \Leftrightarrow u_1 = \alpha v_1; \quad u_2 = \alpha v_2; \quad u_3 = \alpha v_3$$

En este caso ambas rectas son coplanares.

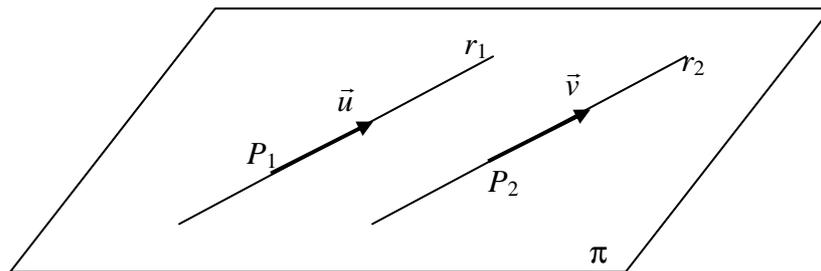


Fig.9

### Resumiendo

$$r_1 // r_2 \Leftrightarrow \vec{u} = \alpha \vec{v} \quad \text{con } \alpha \neq 0$$

Si  $r_1$  y  $r_2$  no son paralelas puede ser

a)  $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$  en este caso se dicen que las rectas son **alabeadas**.

b)  $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$ , en este caso son coplanares y se cortan en un punto.

En el caso b), uno de los ángulos entre  $r_1$  y  $r_2$  es el ángulo entre los vectores que dan sus direcciones.

Es decir

$$\angle(r_1, r_2) = \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \varphi$$

Recordar que:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \rightarrow \varphi \quad (14)$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

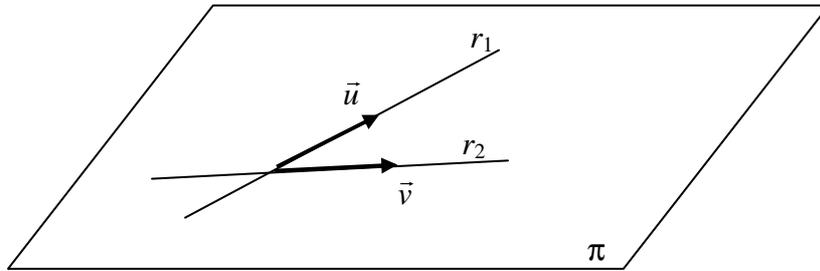


Fig.10

Al ser  $r_1$  y  $r_2$  coplanares serán  $r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = 0 \Leftrightarrow u_1v_2 - u_2v_1 = 0$   
 Si  $r_1$  y  $r_2$  son albeadas se define como ángulo entre las mismas, al ángulo determinado por dos rectas respectivamente paralelas a las dadas y que se interceptan en un punto (es decir coplanares, como en Fig.11)  
 Es decir:

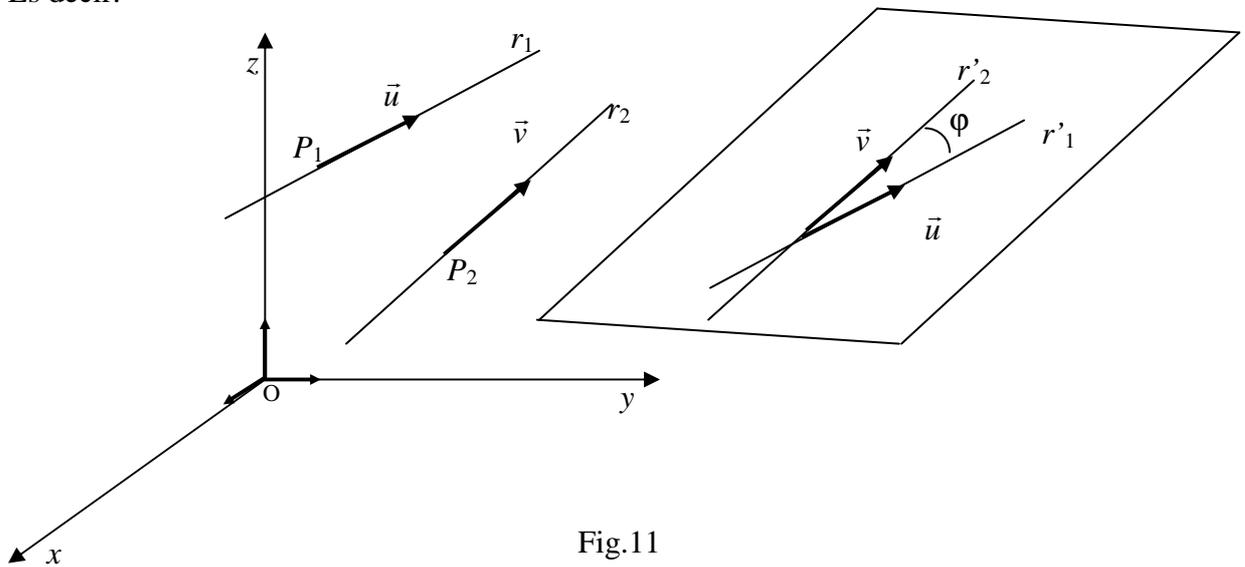


Fig.11

$r_1 \parallel r'_1$  ,  $r_2 \parallel r'_2$   $r'_1$  y  $r'_2$  coplanarios.

Por definición

$$\angle r_1, r_2 = \angle r'_1, r'_2 = \angle \vec{u}, \vec{v} = \varphi$$

el que se calcula con la expresión (14).

Si  $r_1$  y  $r_2$  son albeadas se dice también que

$$\text{son ortogonales} \Leftrightarrow r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = 0 \Leftrightarrow u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$$

En resumen **las rectas  $r_1$  y  $r_2$ , en el espacio** (coplanares o alabeadas) **son ortogonales**  $\Leftrightarrow u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$

**Ejemplo 5:**

Determinar si el siguiente par de rectas son paralelas u ortogonales.

$$r_1) \begin{cases} x - \frac{2}{7}z = \frac{15}{7} & (\pi_1) \\ y + \frac{5}{7}z = -\frac{34}{7} & (\pi_2) \end{cases} ; \quad r_2) \begin{cases} x - y - z - 7 = 0 & (\pi_3) \\ 3x - 4y - 11 = 0 & (\pi_4) \end{cases}$$

Ambas rectas dadas en su forma general. Debemos determinar los vectores que dan sus respectivas direcciones.

Para  $r_1$ ) tenemos:

$$\left. \begin{matrix} \vec{n}_1 = \left(1; 0; -\frac{2}{7}\right) \\ \vec{n}_2 = \left(0; 1; \frac{5}{7}\right) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} \end{vmatrix} = \frac{2}{7}\vec{i} - \frac{5}{7}\vec{j} + \vec{k}$$

Para  $r_2$ ):

$$\left. \begin{matrix} \vec{n}_3 = (1; -1; -1) \\ \vec{n}_4 = (3; -4; 0) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \vec{v} = \vec{n}_3 \wedge \vec{n}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$$

Es evidente que  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  no son paralelos  $\Leftrightarrow r_1 \not\parallel r_2$

Veamos

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\frac{2}{7}; -\frac{5}{7}; 1\right) \times (-4; -3; -1) = -\frac{8}{7} + \frac{15}{7} - 1 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow r_1 \text{ y } r_2 \text{ son ortogonales}$$

**2-7- Condiciones de paralelismo y ortogonalidad entre recta y plano**

Sean

$$\pi) ax + by + cz + d = 0 \quad \text{y} \quad r) \begin{cases} x = x_1 + u_1t \\ y = y_1 + u_2t \\ z = z_1 + u_3t \end{cases}$$

El vector normal a  $r$ ) es  $\vec{n} = (a; b; c)$  y el vector que da la dirección de  $r$ ) es

$$\vec{u} = (u_1; u_2; u_3).$$

Entonces :

**1º)** Si  $r // \pi \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{n} \times \vec{u} = 0 \Leftrightarrow au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$

que es la conclusión de paralelismo entre recta y plano

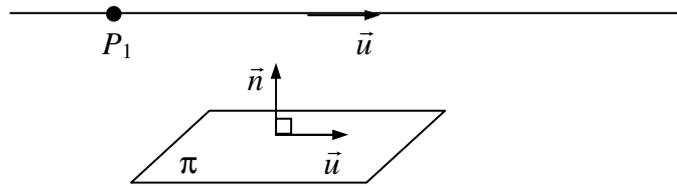
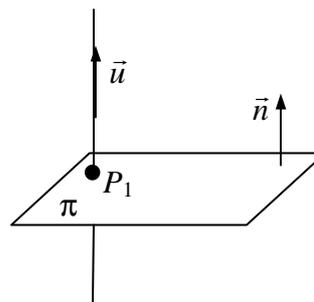


Fig.12

2º) Si

$$r \perp \pi \Leftrightarrow \vec{n} // \vec{u} \Leftrightarrow \vec{n} = \alpha \vec{u} \Leftrightarrow (a; b; c) = \alpha (u_1; u_2; u_3) \Leftrightarrow a = \alpha u_1; b = \alpha u_2; c = \alpha u_3 = 0$$

que es la condición de ortogonalidad entre recta y plano



### 2-8- Ángulos entre recta y plano

Dados una recta y un plano:

$$r \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \pi_1) \quad ax + by + cz + d = 0$$

Se define el ángulo determinado por la recta  $r$  y el plano  $\pi_1$ , al ángulo que forman  $r$ , con su proyección ortogonal  $r'$ , sobre  $\pi_1$ .

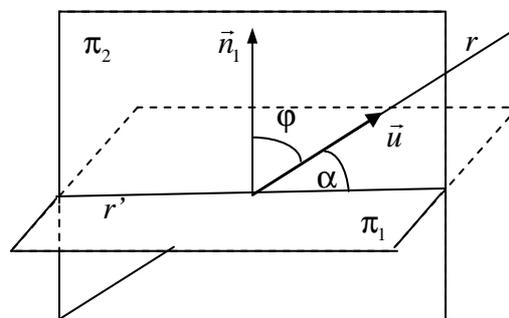


Fig 13

$$r \in \pi_2; \quad \pi_2 \perp \pi_1;$$

la proyección ortogonal de  $r$  sobre  $\pi_1$  es:  $r' = \pi_1 \cap \pi_2$

$\vec{n}_1, r = r', r' = \alpha$ . Por otra parte  $(\vec{n}, \vec{u}) = \varphi$  es complementario de  $\alpha$

Luego

$$\cos \varphi = \sin \alpha = \frac{\vec{n}_1 \times \vec{u}}{|\vec{n}_1| |\vec{u}|} = \frac{au_1 + bu_2 + cu_3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} \rightarrow \alpha$$

## 2-9- Problemas de intersección

### 2-9-1- intersección de rectas en el espacio

Idem las rectas:

$$r_1) \begin{cases} x = x_1 + u_1 t \\ y = y_1 + u_2 t \\ z = z_1 + u_3 t \end{cases} ; \quad r_2) \begin{cases} x = x_2 + v_1 s \\ y = y_2 + v_2 s \\ z = z_2 + v_3 s \end{cases}$$

Determinar si existe en el espacio en el espacio, pueden presentarse sus ecuaciones en forma general como intersección de pares de planos proyectantes. Así:

$$r_1 = \left\{ P(x; y; z) / \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2} \wedge \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{z-z_1}{u_3} \right\}$$

y para  $r_2$  es

$$r_2 = \left\{ P(x; y; z) / \frac{x-x_2}{v_1} = \frac{y-y_2}{v_2} \wedge \frac{x-x_2}{v_1} = \frac{z-z_2}{v_3} \right\}$$

Es evidente que si se desea estudiar  $r_1 \cap r_2$ , ello equivale algebraicamente a plantear el sistema siguiente

$$\begin{cases} \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2} \\ \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{z-z_1}{u_3} \\ \frac{x-x_2}{v_1} = \frac{y-y_2}{v_2} \\ \frac{x-x_2}{v_1} = \frac{z-z_2}{v_3} \end{cases}$$

Los puntos  $P(x; y; z) \in r_1 \cap r_2$  deben ser solución de este sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas que equivale a considerar la intersección de cuatro planos. Más adelante aprenderemos a resolver sistemas de ecuaciones lineales en general.

Por ahora procederemos así: se plantea la intersección de tres de los cuatro planos, supongamos que exista, entonces se verifica si dicha intersección satisface la ecuación del cuarto plano.

- Si existe un único punto de intersección  $(x_0; y_0; z_0)$ , entonces las rectas  $r_1$  y  $r_2$  se cortan en dicho punto y son coplanares.
- Si la intersección es vacía, entonces  $r_1$  y  $r_2$  son paralelas (coplanares) ó alabeadas (es sistema es incompatibles)
- Si los puntos de una de las rectas son soluciones del sistema ambas rectas son coincidentes (el sistema se dice indeterminado)

## Ejemplo 6

Hallar la intersección, si existe, de las rectas

$$r_1) \begin{cases} x+2y=1 \\ 5y-z=-7 \end{cases} ; \quad r_2) \begin{cases} 3x+4y=1 \\ 2y+3z=38 \end{cases}$$

como vemos acá las rectas ya vienen dadas como intersección de pares de planos proyectantes. Entonces para plantear  $r_1 \cap r_2$ , debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 5y-z=-7 \\ 3x+4y=1 \\ 2y+3z=38 \end{cases} \quad (15)$$

Veamos la posible solución del sistema formado, por ejemplo, con las tres ecuaciones del sistema.

Las podemos resolver, por ejemplo, aplicando la Regla de Cramer.

Tendríamos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2}{-2} = -1 ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -7 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-24}{-2} = 12$$

**La solución  $(-1; 1; 12)$  es la solución de las tres primeras ecuaciones de (15) pero no del sistema.**

Por ello debemos ver si verifica la última ecuación del mismo :

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 12 = 38$$

Luego sin más ambas rectas se cortan en el punto  $P_1(-1;1;12)$  y por lo tanto son coplanares.

Podemos escribir entonces:

$$r_1 \cap r_2 = \{(-1;1;12)\}$$

### 2-9-2- Intersección de rectas y planos.

Sean la recta

$$r) \begin{cases} x = x_1 + u_1 t \\ y = y_1 + u_2 t \\ z = z_1 + u_3 t \end{cases} \quad y \quad \pi) ax + by + cz + d = 0$$

Se desea  $r \cap \pi$  es decir el conjunto:

$$r \cap \pi = \{P(x; y; z) / x = x_1 + u_1 t; y = y_1 + u_2 t; z = z_1 + u_3 t; ax + by + cz + d = 0 \}$$

lo que equivale a plantear el sistema:

$$\begin{cases} x = x_1 + u_1 t \\ y = y_1 + u_2 t \\ z = z_1 + u_3 t \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas de fácil solución por sustitución. Para ello reemplazamos en la última ecuación los valores de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  dados en las tres primeras ecuaciones, se obtendrá una ecuación en  $t$  del tipo

$$\alpha t = \beta; \text{ si } \alpha \neq 0 \text{ entonces } t = \frac{\beta}{\alpha}$$

Reemplazando este valor de  $t$  en las primeras se obtiene

$$\{(x_0; y_0; z_0)\} = r \cap \pi$$

es decir el punto de intersección de  $r$  y  $\pi$ .

Si  $\alpha = 0$  puede ser:

- 1)  $\beta = 0$ , luego quedará  $0 t = 0$ , ecuación que se verifica  $\forall t \in R$ , lo que equivale a decir que todo valor de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de las tres primeras verifica la ecuación del plano.

En este caso en que la recta está contenida en el plano.

Es decir:

$$r = r \cap \pi \quad \text{en este caso.}$$

2)  $\beta \neq 0$ , entonces será  $0t = \beta$  ecuación incompatible, lo que significa que para ningún valor de  $t$  se obtendrán valores  $x, y, z$  de las tres primeras ecuaciones que verifiquen la ecuación del plano.

En otras palabras

$$r \cap \pi = \emptyset \text{ (sistema incompatible).}$$

Geoméricamente significa que  $r // \pi$

### Ejemplo 7:

Hallar, si existe  $r \cap \pi$ , siendo  $\pi) 2x - y + z - 1 = 0$  y  $r) \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$  el sistema a

plantear es el siguiente:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - t \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Reemplazando las tres primeras en la última, se tiene:

$$2t - (-1 + 2t) + (1 - t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2t + 1 = -2t + 1 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - t = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Reemplazando este valor de  $t$  en cada una de las tres primeras ecuaciones y obtenemos:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ y_0 &= -1 + 2 = 1 \\ z_0 &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Luego  $r$  y  $\pi$  se cortan en el punto  $P_0(1; 1; 0)$

**Observación:** si la recta  $r$  viene dada como intersección de planos proyectantes, por ejemplo,

$$r) = \begin{cases} \frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{u_2} \\ \frac{x - x_1}{u_1} = \frac{z - z_1}{u_3} \end{cases}$$

Entonces  $r \cap \pi$ , razonando como siempre, nos lleva a plantear un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, es decir la intersección de tres planos.

$$\begin{cases} \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2} \\ \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{z-z_1}{u_3} \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases}$$

que y sabemos encarar, aunque el camino anterior es más sencillo.

## 2-10 Problemas de distancia

### 2-10-1- Distancia de un punto a una recta en el espacio.

Sean

$$r) \begin{cases} x = x_1 + u_1 t \\ y = y_1 + u_2 t \\ z = z_1 + u_3 t \end{cases} \quad \text{y el punto } P_0(x_0; y_0; z_0)$$

se desea hallar la distancia de  $P_0$  a  $r$ ) que simbolizaremos

$$\delta(P_0; r)$$

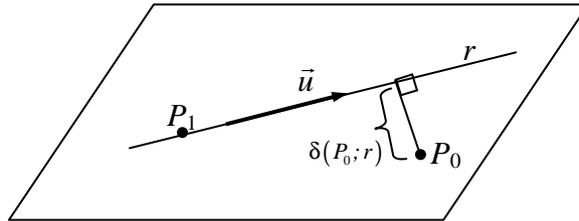


Fig.14

Si  $P_0 \in r \Rightarrow \delta(P_0, r) = 0$

Consideremos entonces  $P_0 \notin r$

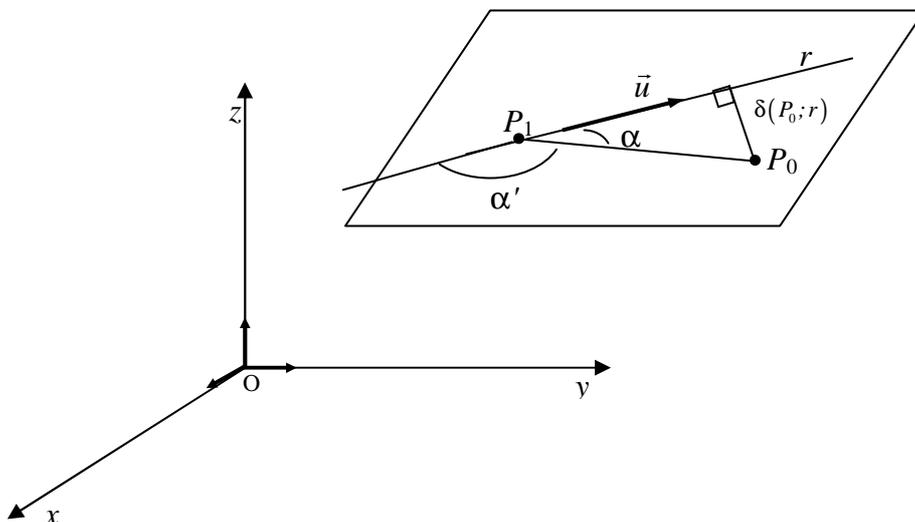


Fig 15

En el  $P_1 R P_0$  contenido en  $\pi$ , se verifica que:

$\delta(P_0; r) = \frac{|\overline{P_1 P_0}| \operatorname{sen} \alpha}{|\vec{u}|}$ , como  $\vec{u} \neq \vec{0}$  podemos multiplicar y dividir por  $|\vec{u}|$  tenemos:

$$\delta(P_0; r) = \frac{|\overline{P_1 P_0}| |\vec{u}| \operatorname{sen} \alpha}{|\vec{u}|} = \frac{|\overline{P_1 P_0} \wedge \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

expresión esta última que nos da la distancia pedida. Observemos que si el sentido de  $\vec{u}$  fuera contrario deberíamos trabajar con  $\alpha'$ , pero  $\operatorname{sen} \alpha' = \operatorname{sen} \alpha$  pues  $\alpha + \alpha' = \pi$ .

### Ejemplo 8

Calcular  $\delta(P_0; r)$  siendo:

$$r) \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases}; P_0(1; 2; -2)$$

$$\vec{u} = (1; 2; -1); P_1 \in r / P_1(-1; 1; 0); \overline{P_1 P_0} = (2; 1; -2); |\vec{u}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

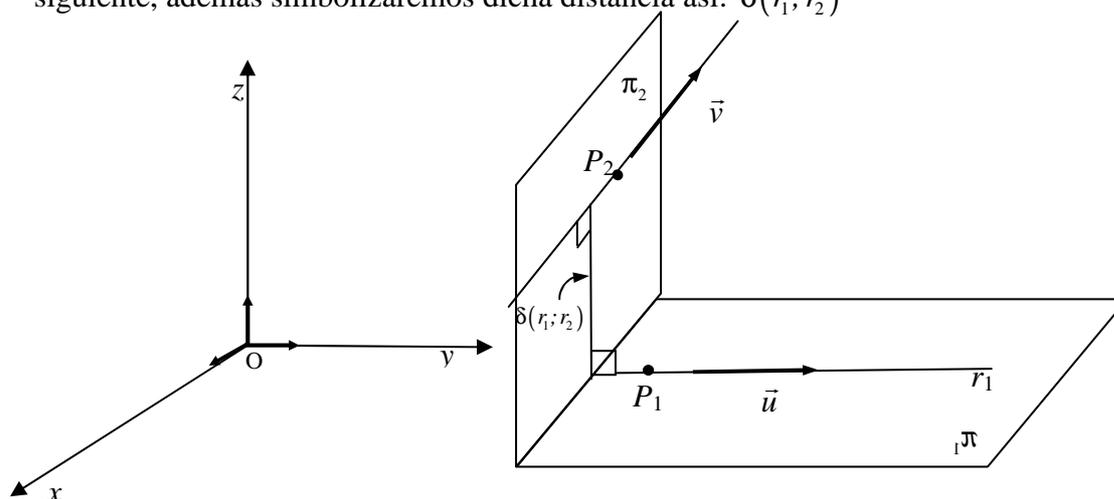
$$\overline{P_1 P_0} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k}; |\overline{P_1 P_0} \wedge \vec{u}| = \sqrt{9+0+9} = \sqrt{18}$$

luego

$$\delta(P_0; r) = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}} \cong 1,73$$

### 2-10-2- Distancias entre dos rectas alabeadas

Dada dos rectas alabeadas, es decir no coplanarias se desea calcular las distancias entre ellas, es decir la distancia medida sobre la dirección normal a ambas. Veamos la figura siguiente, además simbolizaremos dicha distancia así:  $\delta(r_1; r_2)$



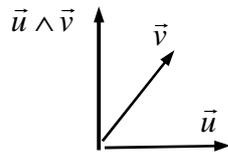


Fig.16

Observemos que la distancia  $\delta(r_1; r_2)$  se obtiene proyectando  $\overline{P_1P_2}$  sobre la dirección normal a  $r_1$  y  $r_2$  simultáneamente, dicha dirección normal a ambas rectas viene dada por la dirección de  $(\vec{u} \wedge \vec{v})$ .

Entonces dados

$$r_1) \begin{cases} x = x_1 + u_1t \\ y = y_1 + u_2t \\ z = z_1 + u_3t \end{cases}; \quad r_2) \begin{cases} x = x_2 + v_1s \\ y = y_2 + v_2s \\ z = z_2 + v_3s \end{cases}$$

donde  $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$  da la dirección de  $r_1$  y  $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$  da la dirección de  $r_2$ .

Por lo dicho arriba será:

$$\delta(r_1; r_2) = \left| \text{Proy}_{(\vec{u} \wedge \vec{v})} \overline{P_1P_2} \right| = \left| \overline{P_1P_2} \times (\vec{u} \wedge \vec{v}) \right|_0 = \left| \overline{P_1P_2} \times \frac{(\vec{u} \wedge \vec{v})}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|} \right|$$

expresión que permite calcular la distancia pedida.

### Ejemplo 9

Hallar la distancia entre las rectas

$$r_1) \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}; \quad r_2) \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 2 - 3s \\ z = -1 - 4s \end{cases}$$

$P_1(2; 1; -1); P_2(1; 2; -1)$  luego  $\overline{P_1P_2} = (-1; 1; 0)$  además  $\vec{u} = (-1; 2; 1); \vec{v} = (2; -3; -4)$

Calculamos ahora:

$$\left| \overline{P_1P_2} \times \vec{u} \wedge \vec{v} \right| = \left\| \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \right\| = 3$$

Entonces:

$$\delta(r_1; r_2) = \frac{3}{\sqrt{30}}$$

### 3-10- Condición de coplanaridad de rectas en el espacio

Sean las rectas:

$$r_1) \begin{cases} x = x_1 + u_1 t \\ y = y_1 + u_2 t \\ z = z_1 + u_3 t \end{cases}; \quad r_2) \begin{cases} x = x_2 + v_1 s \\ y = y_2 + v_2 s \\ z = z_2 + v_3 s \end{cases}$$

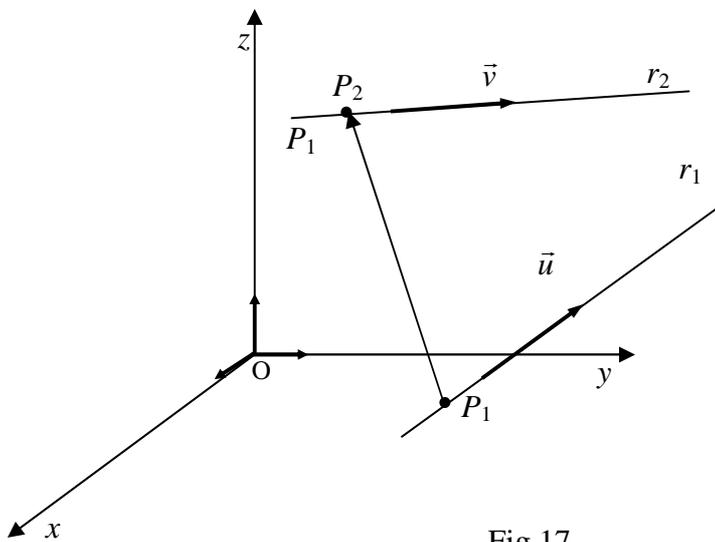


Fig 17

Si  $r_1$  y  $r_2$  son coplanares deberán ser coplanares los vectores:  $\overline{P_1 P_2}$ ;  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

Luego  $r_1$  y  $r_2$  son coplanares  $\Leftrightarrow \overline{P_1 P_2} \times \vec{u} \wedge \vec{v} = 0$

Como  $\overline{P_1 P_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$

$$\vec{u} = (u_1; u_2; u_3); \quad \vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$$

La condición de coplanaridad de  $r_1$  y  $r_2$  será:

$$\overline{P_1 P_2} \times \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

### 3-11- Haz de planos

Sean los planos  $\pi_1) a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$ ;  $\pi_2) a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$

Tal que  $\pi_1$  no es paralelo a  $\pi_2$ , luego  $\pi_1 \cap \pi_2 = r$ . Es decir tenemos una recta darle por sus ecuaciones en forma general.

$$r) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \quad (16)$$

queremos hallar una ecuación que nos da en la posible, todos los planos que pasan por  $r = \pi_1 \cap \pi_2$ . Dicho conjunto de planos se llama haz (o familia) de planos de eje  $r$ . Para obtener esa ecuación, a la primera ecuación de (16) le sumamos la segunda multiplicada previamente por un número  $\lambda \in \mathbb{R}$  se obtiene:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

es decir

$$(a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y + (c_1 + \lambda c_2)z + (d_1 + \lambda d_2) = 0 \quad (17)$$

esta ecuación es de primer grado en  $x, y, z$ , luego para cada valor de  $\lambda$ , tendremos la ecuación de un punto.

Ahora debemos mostrar que los planos que 17 contienen a la recta  $r = \pi_1 \cap \pi_2$

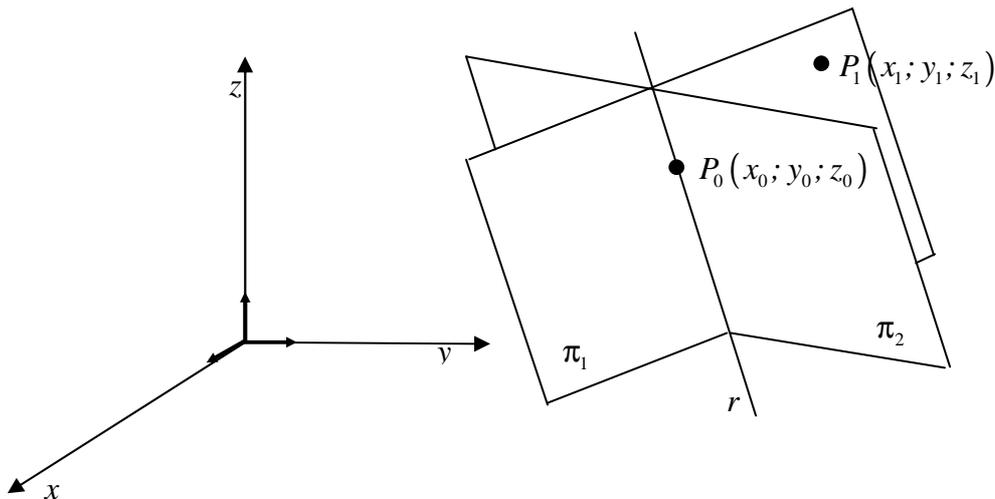


Fig.18

Para ello tomamos un punto **arbitrario**  $P_0(x_0; y_0; z_0) \in r = \pi_1 \cap \pi_2$  y probamos que verifica la ecuación del haz de planos (17)

En efecto como  $P_0 \in (\pi_1 \cap \pi_2) \Leftrightarrow P_0 \in \pi_1$  y  $P_0 \in \pi_2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1 = 0 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 + d_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{identidades numéricas})$$

Si a la primera le sumamos la segunda multiplicada por  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tendremos :

$$(a_1 + \lambda a_2)x_0 + (b_1 + \lambda b_2)y_0 + (c_1 + \lambda c_2)z_0 + (d_1 + \lambda d_2) = 0$$

Entonces  $P_0(x_0; y_0; z_0) \in$  a los planos que se obtienen de la ecuación (17) para cada valor de  $\lambda$ . Como  $P_0 \in r$  es arbitrario, **equivale a decir que los planos que se obtienen de (17) contienen a toda la recta  $r = \pi_1 \cap \pi_2$ .**

Finalmente probaremos que (17) da todos los planos del haz, excepto aquel cuya ecuación fue multiplicada por  $\lambda$ , en nuestro caso  $\pi_2$ . Para ello pensemos en determinar la ecuación del plano del haz que pasa por un punto  $P_1(x_1; y_1; z_1)$ . Debemos determinar el correspondiente valor de  $\lambda$ , para ello, pensemos que  $P_1(x_1; y_1; z_1)$  tiene que verificar (17) pues  $P_1$  pertenece a un plano del haz.

Tenemos:

$$(a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y + (c_1 + \lambda c_2)z + (d_1 + \lambda d_2) = 0$$

Despejemos  $\lambda$ , y tenemos:

$$\lambda = -\frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}$$

este valor de  $\lambda$  existe  $\Leftrightarrow a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \neq 0 \Leftrightarrow P_1 \notin \pi_2$

Luego la ecuación (17) representa a todos los planos del haz de eje  $r = \pi_1 \cap \pi_2$ , excepto  $\pi_2$  (en este caso).

Si se quiere la ecuación de todos los planos del haz, deberá considerarse:

$$\begin{aligned} (a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y + (c_1 + \lambda c_2)z + (d_1 + \lambda d_2) &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Si  $\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$  entonces será:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}; \quad (a_2 \neq 0; b_2 \neq 0; c_2 \neq 0)$$

Si sumamos  $\lambda$  a todos los miembros:

$$\frac{a_1 + \lambda}{a_2} = \frac{b_1 + \lambda}{b_2} = \frac{c_1 + \lambda}{c_2} \Leftrightarrow \frac{a_1 + \lambda}{a_2} = \frac{b_1 + \lambda}{b_2} = \frac{c_1 + \lambda}{c_2} \Leftrightarrow \text{todos los planos de (17) ó (18)}$$

son coincidentes con  $\pi_1 = \pi_2$

## Ejemplo 10

Dados los planos

$$\pi_1) x - y - 2z = 1$$

$$\pi_2) x + y - z = 2$$

determinar el plano que pasa por  $r = \pi_1 \cap \pi_2$  y que verifica, en cada caso las siguientes condiciones:

- pase por el punto  $P_1(2; -3; 1)$
- sea normal al plano  $\pi_2) 2x + y - 3z = 4$
- pasa por el punto  $P_2(2; 0; 0)$

La ecuación del haz de planos de eje  $r = \pi_1 \cap \pi_2$  es

$$(1 + \lambda)x + (-1 + \lambda)y + (-2 - \lambda)z = (1 + 2\lambda) \quad (19)$$

- el valor de  $\lambda$  se obtiene (pues  $P_1 \notin \pi_2$ ) reemplazando sus coordenadas en lugar de  $x, y, z$  respectivamente.

$$(1 + \lambda)2 + (-1 + \lambda) - 3 + (-2 - \lambda) = (1 + 2\lambda) \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

reemplazando en (19) se obtiene la ecuación del plano paralelo:

$$\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{2}z = 2$$

- si el plano (19) debe ser perpendicular a  $\pi_3$  el producto escalar de sus versores normales debe ser nulo.

Es decir, siendo

$$\vec{n}_3 = (2; 1; -3) \quad \text{y} \quad \vec{n} = (1 + \lambda; -1 + \lambda; -2 - \lambda)$$

$$\vec{n}_3 \times \vec{n} = 2(1 + \lambda) + (-1 + \lambda) + (-3)(-2 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{7}{6}$$

Reemplazando en (19) tenemos la ecuación del plano pedido

$$-\frac{1}{6}x - \frac{13}{6}y - \frac{5}{6}z = -\frac{4}{3}$$

- observemos que  $P_2 \in \pi_2$ , luego si aplicáramos el método del caso a) veíamos que no existe  $\lambda$ , lo que ocurre que el plano pedido es el propio  $\pi_2$ , cuya ecuación fue multiplicada por  $\lambda$ , es decir:

$$x + y - z = 2$$

## PROPUESTAS PARA LA PRÁCTICA

1. Una recta tiene por ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 - t \\ z = 1 + 5t \end{cases} \quad t \in \mathfrak{R}$$

- a) Escribe las coordenadas de dos puntos pertenecientes a la misma.  
b) Explica por qué el punto de coordenadas (10,1,10) no pertenece a la recta.  
c) Escribe las coordenadas de los puntos de la recta que se encuentra a  $\sqrt{46}$  unidades del origen de coordenadas.  
d) Obtén la forma canónica o simétrica y expresa luego la recta como intersección de dos planos proyectantes.  
e) Escribe las ecuaciones de las rectas que resultan de proyectar la recta dada sobre cada uno de los planos coordenados.
2. Escribe ecuaciones paramétricas de la recta que contiene al punto (2,3,-4) y es perpendicular al plano de ecuación  $x - 4y + 2z = 8$ .

3. a) Obtén ecuaciones paramétricas de la recta  $\begin{cases} 2x - y + z = 6 \\ x + 4y - 2z = 8 \end{cases}$ .

b) Halla las coordenadas del punto donde la recta corta al plano coordenado XZ.

4. Halla el ángulo agudo que determinan las rectas:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - z + 7 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x + y - 2z + 3 = 0 \\ 4x - y + 3z + 7 = 0 \end{cases}$$

5. Verifica que las rectas:

a)  $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - 4y + 2z + 12 = 0 \end{cases}$  y  $\frac{x+7}{2} = \frac{3y+4}{-3} = \frac{9-z}{3}$  son paralelas.

b)  $\begin{cases} 2x + y - 2z + 10 = 0 \\ y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$  y  $\frac{4-x}{4} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+11}{2}$  son ortogonales.

6. Verifica que el plano de ecuación  $3x - 8y + 2z = 8$  contiene a la recta de ecuaciones  $\frac{x-2}{10} = \frac{2y-2}{11} = \frac{z-5}{7}$ .

7. Determina el valor de  $a$  para que el plano  $x + y - 2z = 5$  y la recta  $\frac{x-1}{3a} = \frac{y-2}{a+1} = \frac{z-5}{a+2}$  sean paralelos y calcula la distancia entre ambos.

8. Dado el plano  $x + 2y - z = 4$ , determina el valor de  $a$  y  $b$  para que la recta  $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{a+1} = \frac{z-4}{2b}$  sea perpendicular al plano.

9. Halla el ángulo formado por la recta  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{5}$  y el plano  $2x + y - z = 5$ .

10. Verifica que la recta de ecuaciones  $\begin{cases} x = 1 + u \\ y = 2 + u \\ z = -3 \end{cases}$ ;  $u \in \mathfrak{R}$  es ortogonal al plano

$$\begin{cases} x = 2 + t - s \\ y = 1 - t + s \\ z = 2 + t + 2s \end{cases}; t, s \in \mathfrak{R} \text{ y encuentra las coordenadas del punto de intersección.}$$

11. Halla las coordenadas del punto simétrico a  $P(1,1,1)$  respecto del plano  $x - 2y + 3z = 0$ . Controla el resultado calculando la distancia de  $P$  y del punto simétrico a  $P$ , al plano.

12. Encuentra las coordenadas del punto de intersección entre las rectas

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = -2 - t \end{cases}; t \in \mathfrak{R} \text{ y } \begin{cases} x = 17 + 3s \\ y = 4 + s \\ z = -8 - s \end{cases}; s \in \mathfrak{R} \text{ y obtén luego una ecuación del plano que determinan.}$$

13. Halla la distancia del punto  $P(1,4,5)$  a la recta  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{3}$  y encuentra las coordenadas del punto de la recta que se encuentra a dicha distancia.

14. Calcula la distancia entre el par de rectas paralelas del ejercicio 5 a).

15. Dadas las rectas  $\begin{cases} x = k + 2t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$  y  $\begin{cases} x = 1 + s \\ y = -1 + 2s \\ z = -s \end{cases}$

- Determina  $k$  para que resulten coplanares.
- Para dicho valor de  $k$  halla una ecuación del plano que determinan y las coordenadas del punto de intersección.

16. a) Halla la distancia entre las rectas  $r_1$   $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$  y  $r_2$ ) determinada por los

puntos  $P(1,0,2)$  y  $Q(-2,2,6)$ .

- Explica cómo podrías determinar las coordenadas de los puntos  $A \in r_1$  y  $B \in r_2$  de modo que el módulo del vector  $\overline{AB}$  sea igual a la distancia entre  $r_1$  y  $r_2$ .

17. Determina una ecuación del plano  $\pi$  que contiene al punto  $P(6,7,0)$  y a la recta

$$r) \begin{cases} 3x - y + z + 1 = 0 \\ x + 3y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

18. Halla una ecuación de la recta proyección ortogonal de la recta  $r$  sobre el plano  $\pi$ )  $x + y - z = 1$ , siendo  $r$ )  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{5}$ .
19. Encuentra una ecuación del plano que contiene a la recta  $\begin{cases} 2x + 3y - 5z + 7 = 0 \\ 5x + 4y + 7z + 1 = 0 \end{cases}$  y es perpendicular al plano  $x - y + z = 0$ .
20. Encuentra una ecuación de la recta  $L$  que contiene al punto  $P(-2, 3, 4)$  y es ortogonal a  $r_1$ )  $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + 3t \\ z = -7 + 5t \end{cases}$ ;  $t \in \mathfrak{R}$  y a  $r_2$ )  $\begin{cases} x = -2 + 4s \\ y = 3 - 2s \\ z = 3 + t \end{cases}$ ;  $s \in \mathfrak{R}$ .
21. Halla una ecuación de la recta que contiene al punto  $P(1, 2, 3)$  y se intercepta con las rectas de ecuaciones  $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{4}$  y  $\begin{cases} 2x + 3y - z + 1 = 0 \\ x - y + 3z - 4 = 0 \end{cases}$
22. Escribe unas ecuaciones de la recta que contiene al punto  $M(-1, 2, -3)$ , es perpendicular al vector  $\vec{v} = (6, -2, -3)$  y se corta con la recta  $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$ .
23. Los puntos  $A(1, -2, 4)$ ,  $B(3, 1, -3)$  y  $C(5, 1, -7)$  son los vértices de un triángulo.
- Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a la altura trazada por el vértice  $B$  al lado opuesto.
  - ¿En qué intervalo tiene que variar el parámetro para generar los puntos de la altura?

### ❖ RESPUESTAS

1. c)  $P(1, 3, 6)$  y  $Q\left(\frac{29}{7}, \frac{33}{7}, -\frac{18}{7}\right)$
3. b)  $(4, 0, -2)$
7.  $a = \frac{3}{2}$ ;  $dist = 2\sqrt{6}$
8.  $a = 9$  y  $b = -\frac{5}{2}$
9.  $\alpha = \arcsen\left(\frac{\sqrt{198}}{198}\right)$
10. I  $(1, 2, -3)$

11.  $\left(\frac{5}{7}, \frac{11}{7}, \frac{1}{7}\right)$

12.  $P(2, -1, -3)$

13.  $d = \sqrt{\frac{16}{11}}$  ;  $Q\left(\frac{23}{11}, \frac{40}{11}, \frac{51}{11}\right)$

15.  $k = -6$  ;  $x + y + 3z = 0$  ;  $I(4, 5, -3)$

17.  $\pi) -13x + 11y - 7z + 1 = 0$

18.  $\begin{cases} 2x - 3y + z + 3 = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

19.  $23x + 24y + z + 31 = 0$

20.  $L) \begin{cases} x = -2 + 13t \\ y = 3 + 22t \\ z = 4 - 8t \end{cases} \quad t \in \mathfrak{R}$

21. La recta es la intersección de los planos que determina el punto  $P$  con cada una de las rectas dadas.

22.  $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -3 - 6t \end{cases} \quad t \in \mathfrak{R}$