FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
Escuela de Formación Básica
Departamento de Matemática

Álgebra y Geometría Analítica

- Práctica adicional Polinomios -

1. Halla todas las raíces de los siguientes polinomios (puedes darlas en forma binómica o polar):

   a) $P(x) = x^5 + 64x^2$

   Resolución:

   $P(x) = x^5 + 64x^2 = x^2\left(x^3 + 64\right)$. Luego, 0 es raíz doble de P, y para hallar las restantes raíces, deberemos resolver la ecuación $x^3 + 64 = 0$.

   $x^3 + 64 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -64 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{64_\pi} = 4_{\frac{\pi+2k\pi}{3}}, k = 0, 1, 2$

   para $k = 0$: $x = 4_{\frac{\pi}{3}} = 2 + 2\sqrt{3}i$
   para $k = 1$: $x = 4_\pi = -4$
   para $k = 2$: $x = 4_{\frac{5}{3}\pi} = 2 - 2\sqrt{3}i$

   Por lo tanto las raíces de P son: 0 (doble), $2 + 2\sqrt{3}i$, -4 y $2 - 2\sqrt{3}i$.

   b) $Q(x) = x^6 + i$

   c) $R(x) = x^4 + 2 + 2\sqrt{3}$

   d) $S(x) = x^7 + x^6 + x + 1$

2. Halla la descomposición factorial de los siguientes polinomios:

   a) $p(x) = x^5 + 3x^3 - 4x$

   Resolución:

   $p(x) = x^5 + 3x^3 - 4x = x\left(x^4 + 3x^2 - 4\right)$.

   Las posibles ríces racionales de $x^4 + 3x^2 - 4$ son: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

	1	0	3	0	-4
1		1	1	4	4
	1	1	4	4	|0
-1		-1	0	-4	
	1	0	4	|0	

   Luego, $p(x) = x\,(x-1)\,(x+1)\left(x^2+4\right)$

   Como, además: $x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Leftrightarrow x = \pm 2i$, tenemos finalmente que:

   $p(x) = x\,(x-1)\,(x+1)\,(x-2i)\,(x+2i)$.

   b) $q(x) = x^6 - x^5 + 16x^2 - 16x$

   c) $r(x) = \left(x^3 - 3x^2 + 4\right).\left(x^3 - i\right)$

   d) $s(x) = 2x^4 - 5x^3 - x^2 - 5x - 3$

3. Dado $P(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 + x^2 + mx + 1$,

   a) halla m para que el resto de dividir a P por $Q(x) = x - 2$ sea 17;

   b) para dicho valor de m, factoriza completamente a P.

4. Sea $Q(x) = x^7 + x^5 - x^2 - 1$.

   a) Verifica que i es una raíz de $Q(x)$.

   b) Halla las restantes raíces del polinomio.

5. *a*) Representa gráficamente el conjunto $A = \left\{z = \rho_\theta \in \mathbb{C} : 1 \leq \rho \leq 3,\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$.
   b) Halla todas las raíces de $P(x) = x^4 + 8x$.
   c) Indica cuáles de las raíces de P pertenecen al conjunto A.

6. Encuentra el polinomio P a coeficientes reales, de menor grado posible, que tenga por raíces a **todas** las raíces cúbicas de $-8i$ y cuyo resto al dividirse por el polinomio $Q(x) = x$ sea 128. (Puedes dejarlo factorizado.)

   Resolución:

   Comencemos por hallar las raíces cúbicas de $-8i$: $\quad z = \sqrt[4]{-8i} = \sqrt[4]{8_{\frac{3}{2}\pi}} = 2_{\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$

   para $k = 0$: $z = 2_{\frac{\pi}{2}} = 2i$

   para $k = 1$: $z = 4_{\frac{7}{6}\pi} = -\sqrt{3} - i$

   para $k = 2$: $z = 4_{\frac{11}{6}\pi} = \sqrt{3} - i$

   Como el polinomio P debe ser a coeficientes reales, los complejos conjugados de estas tres raíces ($-2i, -\sqrt{3}+i$ y $-\sqrt{3}+i$) también serán raíces de P. Luego, si expresamos P en su forma factorizada:

   $P(x) = a\,(x - 2i)\,(x + 2i)\,\left(x + \sqrt{3} + i\right)\left(x + \sqrt{3} - i\right)\left(x - \sqrt{3} + i\right)\left(x - \sqrt{3} - i\right)$, con $a \in \mathbb{R}$.

   Además, sabemos que resto al dividir P por x es 128, y esto es equivalente a que $P(0) = 128$, por el Teorema del Resto. Entonces:

   $128 = P(0) = a\,(0 - 2i)\,(0 + 2i)\,\left(0 + \sqrt{3} + i\right)\left(0 + \sqrt{3} - i\right)\left(0 - \sqrt{3} + i\right)\left(0 - \sqrt{3} - i\right) = a \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 =$
   $= a \cdot 64 \Rightarrow a = 2$

   Finalmente:

   $P(x) = 2\,(x - 2i)\,(x + 2i)\,\left(x + \sqrt{3} + i\right)\left(x + \sqrt{3} - i\right)\left(x - \sqrt{3} + i\right)\left(x - \sqrt{3} - i\right)$

7. Determina un polinomio de menor grado posible a coeficientes reales que verifique:
   a) tiene a -1 como raíz doble, y a 2 y $-1 + 2i$ como raíz simple. ¿Es única la respuesta?
   b) tiene a 1 como raíz triple, a $2i$ como raíz doble y $P(i) = 2 + 2i$. ¿Es única la respuesta?

8. Analiza si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.
   a) $P(x) = (x - 2)(x - 3)^2$ es el único polinomio de grado 3 que tiene a 2 como raíz simple y a 3 como raíz doble.
   b) Si P es un polinomio cualquiera y $2 + i$ es raíz de P, entonces $2 - i$ también lo es.
   c) Existen valores a y b enteros para los cuales $\frac{1}{2}$ es raíz de $Q(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 1$.
   d) El polinomio $R(x) = x^6 + 32x$ no tiene raíces múltiples.