

NÚMEROS COMPLEJOS

Viviana Paula D'Agostini

Magister en Didáctica de las Ciencias, mención Matemática

dago@fceia.unr.edu.ar

Introducción

Recordemos algunos conjuntos numéricos que ya conocemos:

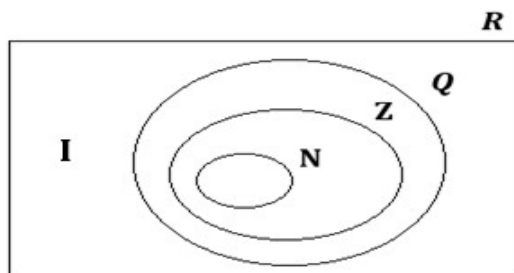
Números Naturales $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Números Naturales incluido el cero $N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\} = N \cup \{0\}$

Números Enteros $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Números Racionales $Q = \left\{ \frac{p}{q} / p, q \in Z \wedge q \neq 0 \right\}$

Números irracionales I : un número es irracional si su representación decimal tiene infinitas cifras no periódicas. Ejemplos: $\pi, e, \sqrt{2}$.



$N \subset Z \subset Q$

$Q \cup I = R$

R: números reales

Cada conjunto de números ha ido ampliándose para dar solución a nuevos problemas. En particular, en el conjunto de los números reales no es posible encontrar solución para la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Es así que se define al número “ i ” tal que $i^2 = -1$ para poder dar solución a la ecuación mencionada.

El conjunto de números que resulta de adjuntar i y sus combinaciones al conjunto de los números Reales es el conjunto de los números Complejos que trataremos a continuación.

Números Complejos

Un número complejo es de la forma $z = a + bi$ donde a y b son números reales e i se define por la relación $i^2 = -1$.

$z = a + bi$ es llamada **Forma Binómica** del complejo z .

a es llamada parte o componente real de z y se simboliza: $Re(z) = a$.

b es llamada parte o componente imaginaria de z y se representa: $Im(z) = b$.

El conjunto de los números complejos se simboliza:

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi : a, b \in R; i^2 = -1\}$$

Todo número real a es un número complejo ya que puede expresarse como $a + 0i$. Así los números reales se identifican con una parte de los números complejos: $a \leftrightarrow a + 0i$.

Todo número de la forma bi , llamado imaginario puro, es un número complejo de parte real nula, y puede expresarse como $0 + bi$.

Ejemplo: Sean $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = \frac{1}{2} - 5i$, $z_3 = \sqrt{3}$, $z_4 = -7i$

3 es la parte o componente real de z_1 . $Re(z_1) = 3$.

2 es la parte o componente imaginaria de z_1 . $Im(z_1) = 2$.

$\frac{1}{2}$ es la parte o componente real de z_2 . $Re(z_2) = \frac{1}{2}$.

-5 es la parte o componente imaginaria de z_2 . $Im(z_2) = -5$.

$\sqrt{3}$ es la parte o componente real de z_3 . $Re(z_3) = \sqrt{3}$.

0 es la parte o componente imaginaria de z_3 . $Im(z_3) = 0$.

0 es la parte o componente real de z_4 . $Re(z_4) = 0$.

-7 es la parte o componente imaginaria de z_4 . $Im(z_4) = -7$.

Ejercicio 1. Determina para cada uno de los siguientes números complejos sus partes real e imaginaria.

$$z_1 = -2 - 4i, \quad z_2 = \frac{1}{3} + 5i, \quad z_3 = \sqrt{2} - 6i, \quad z_4 = -3i, \quad z_5 = 1000$$

La unidad imaginaria

El número i recibe el nombre de unidad imaginaria y se acepta que se comporta como un número real y respeta las propiedades de este conjunto. Además, son válidas las siguientes propiedades de la potencia:

- $i^r \cdot i^s = i^{r+s}$, $i, r \in \mathbb{Z}$
- $(i^r)^s = i^{r \cdot s}$, $i, r \in \mathbb{Z}$

Observación. Las sucesivas potencias de i se repiten periódicamente en grupos de 4. Es decir:

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i, \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i, \quad i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1, \quad i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i, \quad i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$$

Por lo que es posible calcular cualquier potencia de i como se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema: Para todo $n \in \mathbb{Z}$ resulta $i^n = i^r$ donde r es el resto de la división de n por 4 ($r = 0, 1, 2, 3$).

Demostración: $n = 4k + r \quad r = 0, 1, 2 \text{ o } 3$

$$i^n = i^{4k+r} = (i^4)^k \cdot i^r = 1^k \cdot i^r = i^r$$

$$\begin{array}{r} n \quad | \quad 4 \\ r \quad | \quad k \\ \hline \end{array}$$

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } r = 0 \\ i & \text{si } r = 1 \\ -1 & \text{si } r = 2 \\ -i & \text{si } r = 3 \end{cases}$$

Ejemplo: $i^{1223} = i^{305 \cdot 4 + 3} = (i^4)^{305} i^3 = i^3 = -i$

$$\begin{array}{r} 1223 \quad | \quad 4 \\ 3 \quad | \quad 305 \\ \hline \end{array}$$

Ejercicio 2. Determina los valores de: $i^7, i^{1000}, i^{26}, i^{325}$.

Igualdad de números complejos

Se dice que los números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ son iguales si y solo si: $a = c$ y $b = d$.

Opuesto de un número complejo

Dado $z = a + bi$ se llama opuesto de z al número complejo $-z = -a - bi$.

Ejemplo: $z_1 = 3 - 2i \quad -z_1 = -3 + 2i$

Conjugado de un número complejo

Dado $z = a + bi$ se llama conjugado de z al número complejo $\bar{z} = a - bi$.

Ejemplos: Dados $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = \frac{1}{2} - 5i$, $z_3 = \sqrt{3}$, $z_4 = -7i$
 resultan $\bar{z}_1 = 3 - 2i$, $\bar{z}_2 = \frac{1}{2} + 5i$, $\bar{z}_3 = \sqrt{3}$, $\bar{z}_4 = 7i$

Operaciones con números complejos en forma binómica

Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ entonces:

- $z_1 + z_2 = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$
- $z_1 + (-z_2) = z_1 - z_2 = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i$
- $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (a + bi) \cdot c + (a + bi) \cdot di =$
 $= a \cdot c + bi \cdot c + a \cdot di + bi \cdot di = a \cdot c + b \cdot ci + a \cdot di + b \cdot di^2 =$
 $= (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i$
- $z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \left(\frac{a \cdot c + b \cdot d}{c^2 + d^2} \right) + \left(\frac{b \cdot c - a \cdot d}{c^2 + d^2} \right) i$

Ejemplos: Dados $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = 1 - 2i$

$$z_1 + z_2 = 3 + 2i + 1 + (-2)i = (3 + 1) + (2 - 2)i = 4 + 0i$$

$$z_1 - z_2 = 3 + 2i - 1 - (-2)i = 2 + 4i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i) \cdot (1 - 2i) = (3 + 4) + (-6 + 2)i = 7 - 4i$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 2i}{1 - 2i} = \frac{3 + 2i}{1 - 2i} \cdot \frac{1 - (-2)i}{1 - (-2)i} = \frac{3 \cdot 1 + 2(-2)}{1^2 + 2^2} + \frac{2 \cdot 1 - 3(-2)}{1^2 + 2^2} i =$$

$$= \frac{-1}{5} + \frac{8}{5} i$$

Ejercicio 3

i) Dados los números complejos $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = 3 - 5i$,

$z_3 = -\sqrt{3} + 7i$, $z_4 = 6i$, $z_5 = -5$, realiza las operaciones indicadas.

a) $z_1 + z_2 =$ d) $\bar{z}_2 =$ g) $z_1 : z_2 =$ j) $z_3 + z_1 + z_4 =$

b) $z_1 + \bar{z}_1 =$ e) $-\bar{z}_3 =$ h) $\bar{z}_5 + z_4 =$ k) $z_1 \cdot z_4 =$

c) $z_1 - z_2 =$ f) $z_1 \cdot z_2 =$ i) $z_5 : z_6 =$ l) $-z_3 - z_1 =$

ii) Determina para qué valores de a y b los complejos $z_1 = a + 3i$ y $z_2 = \frac{3}{4} - bi$ son iguales.

Propiedades

1) $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in R$

2) $z + \bar{z} = 2a$

3) $z - \bar{z} = 2bi$

4) $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

5) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

6) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

7) $-\bar{z} = \overline{-z}$

8) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad z_2 \neq 0$

9) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad z \neq 0$

Ejercicio 4. Compruebe la veracidad de las propiedades citadas.

El plano complejo

Los números complejos pueden definirse como el conjunto de los pares ordenados (a, b) de números reales.

$\mathbb{C} = R \times R = \{(a, b) : a, b \in R\}$ (a es la componente real, b es la componente imaginaria).

Puede establecerse una correspondencia biunívoca entre los pares $(a, 0)$ y los números reales a .

La unidad imaginaria se define: $i = (0, 1)$

$$z = a + bi \leftrightarrow z = (a, b)$$

Representación geométrica

Dado un sistema de ejes cartesianos ortogonales en el plano, se establece una correspondencia binunívoca entre puntos del plano y pares ordenados de

números reales. Esto permite representar los números complejos, ya que z se corresponde con un punto $P(a, b)$ del plano y recíprocamente.

$$P(a, b) \leftrightarrow z = a + bi$$

P recibe el nombre de afijo de z .

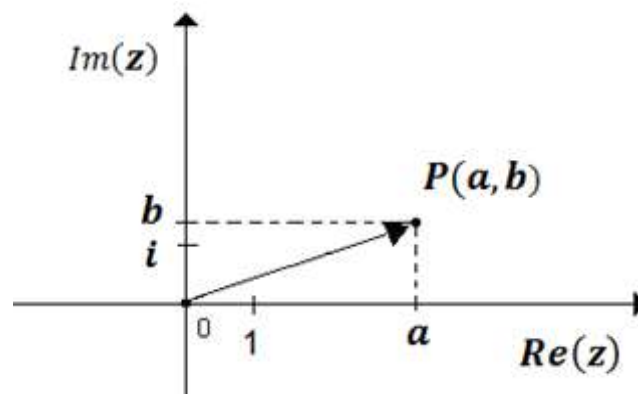
Dicha correspondencia hace posible así hablar del Plano Complejo.

El eje de las abscisas se llama eje real $Re(z)$ y en él se representan los números complejos de la forma $z = a + 0i \leftrightarrow (a, 0)$.

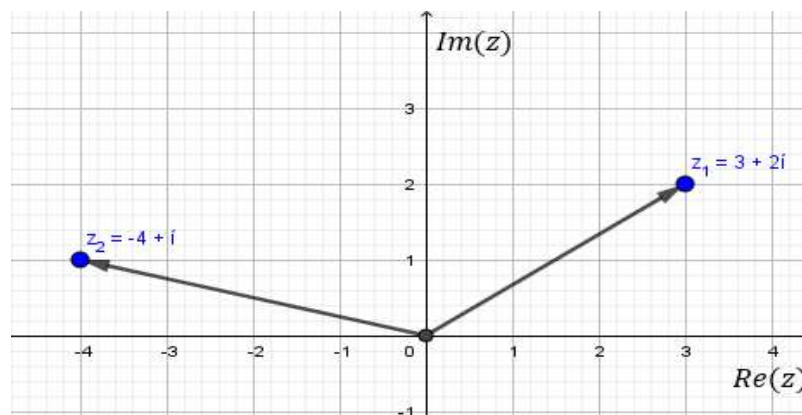
El eje de las ordenadas se llama eje imaginario $Im(z)$ y en él se representan los números complejos puros $z = 0 + bi \leftrightarrow (0, b)$.

A cada número complejo le corresponde un vector $\overline{OP}$ de origen en O y extremo el afijo P de z .

$$z = a + bi \leftrightarrow P(a, b) \leftrightarrow \overline{OP}$$



Ejemplo:



Igualdad de complejos

Sean $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$ entonces $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c$ y $b = d$.

Operaciones

Si $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$ resulta:

- $z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a, b) + (-c, -d) = (a - c, b - d)$
- $z_1 \cdot z_2 = (a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$
- $z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{(a, b)}{(c, d)} \cdot \frac{(\overline{c, d})}{(\overline{c, d})} = \frac{(a, b)}{(c, d)} \cdot \frac{(c, -d)}{(c, -d)} =$

$$= (a, b) \cdot \left(\frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{-d}{c^2 + d^2} \right) = \left(\frac{a \cdot c + b \cdot d}{c^2 + d^2}, \frac{b \cdot c - a \cdot d}{c^2 + d^2} i \right)$$
- $z^n = z \cdot z \dots z$ n veces, $n \in \mathbb{N} - \{1\}$

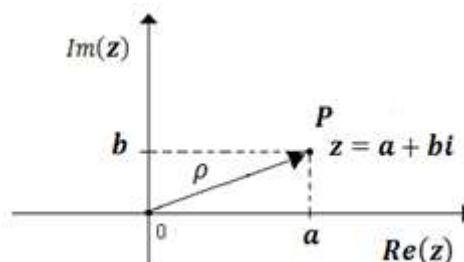
Ejercicio 5. Realiza las operaciones establecidas para los números complejos indicados.

$$z_1 = (3, -2), \quad z_2 = (-3, 5), \quad z_3 = (-\sqrt{3}, 6), \quad z_4 = (0, 5), \quad z_5 = (-6, 0)$$

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------|-----------------------------|
| a) $z_1 + z_2 =$ | d) $\overline{z_1} =$ | g) $z_1 : z_2 =$ |
| b) $z_1 + \overline{z_2} =$ | e) $z_1^2 =$ | h) $\overline{z_5} =$ |
| c) $z_1 - \overline{z_2} =$ | f) $z_1 \cdot z_2 =$ | i) $\overline{z_4} + z_5 =$ |

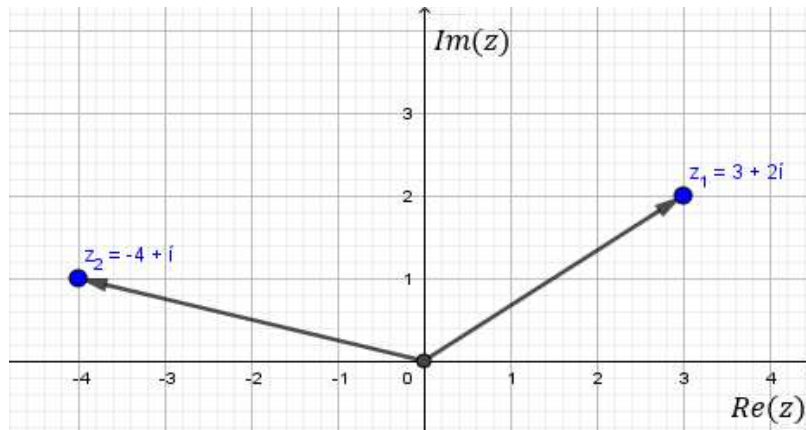
Módulo y argumento de un número complejo

Se llama módulo de un número complejo $z = a + bi$ al número real positivo, igual a la longitud del vector $\overline{OP}$ donde P es el afijo de z . Y simbolizamos con la letra ρ o $|z|$.



Se observa gráficamente y utilizando el teorema de Pitágoras que:
 $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

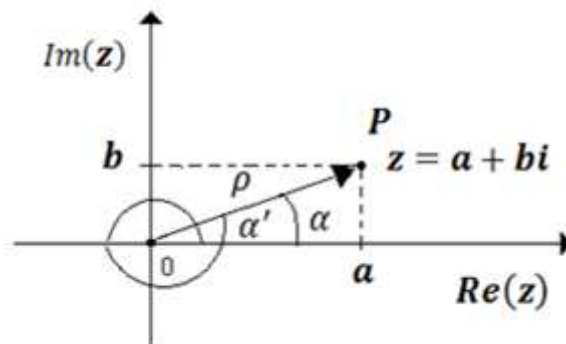
Ejemplo: $|z_1| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ $|z_2| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$



Ejercicio 6. Determina los módulos de los siguientes números complejos

$$\begin{array}{llll} z_1 = -2 + 3i & z_2 = 3 + 1i & z_3 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i & z_4 = 6i \\ z_5 = -2 & z_6 = (1,5) & z_7 = (-1,4) & z_8 = (-3,-3) \end{array}$$

Se llama **argumento** de un número complejo $z = a + bi$ al ángulo α que forma la dirección positiva del eje $\text{Re}(z)$ con el vector asociado a z .



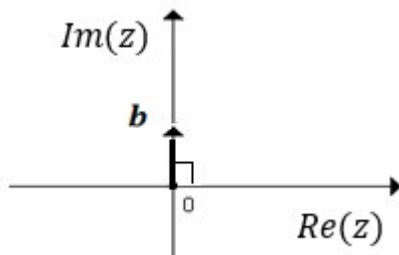
El complejo $z = 0$ no posee argumento.

Si α y α' son dos argumentos de z entonces $\alpha = \alpha' + 2k\pi$.

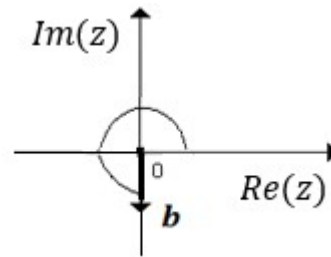
Se llama **argumento principal** de z : $\alpha = \arg(z)$, $0 \leq \alpha < 2\pi$,

$$\text{tg } \alpha = \frac{b}{a} \quad a \neq 0$$

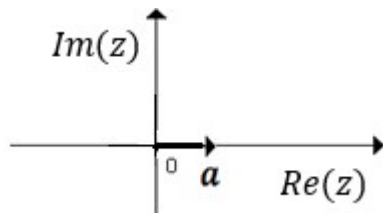
Si $a = 0$ y $b > 0$ entonces $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$



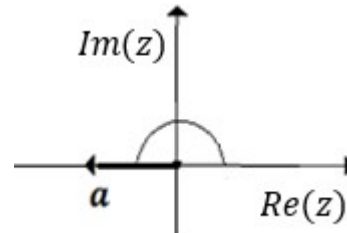
Si $a = 0$ y $b < 0$ entonces $\arg(z) = \frac{3\pi}{2}$



Si $b = 0$ y $a > 0$ entonces $\arg(z) = 0$

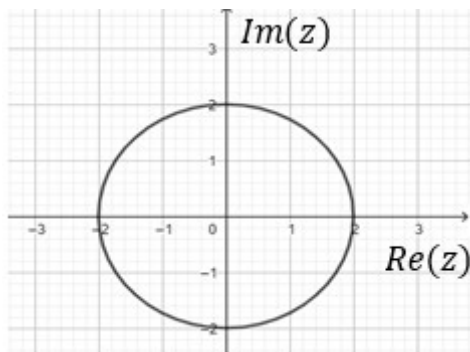


Si $b = 0$ y $a < 0$ entonces $\arg(z) = \pi$

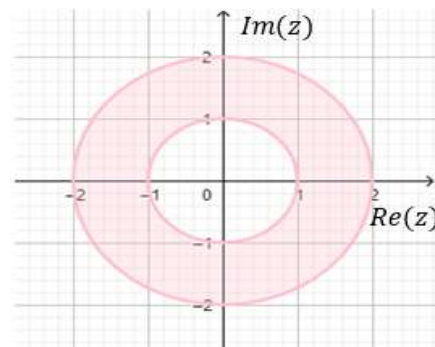


Algunos ejemplos más:

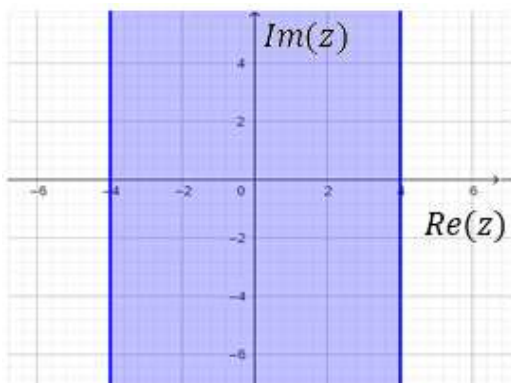
$$M = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 2\}$$



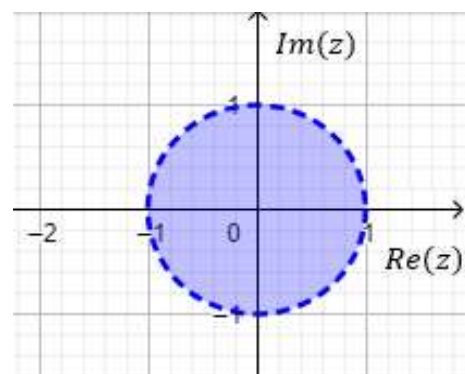
$$R = \{z \in \mathbb{C} / 1 \leq |z| \leq 2\}$$



$$S = \{z \in \mathbb{C} / |\operatorname{re}(z)| \leq 4\}$$

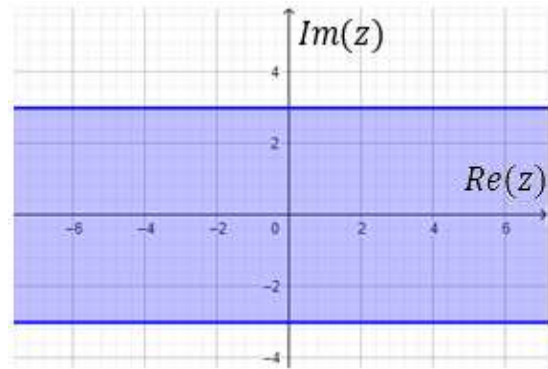
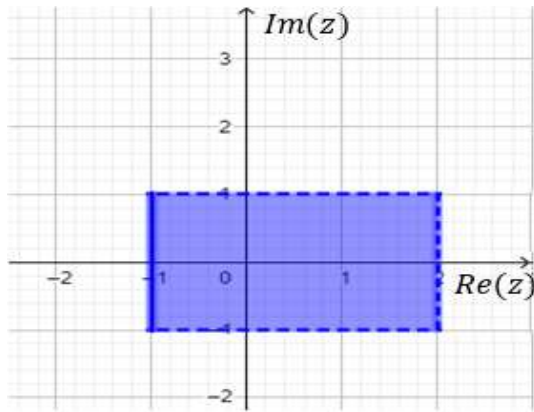


$$X = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$$

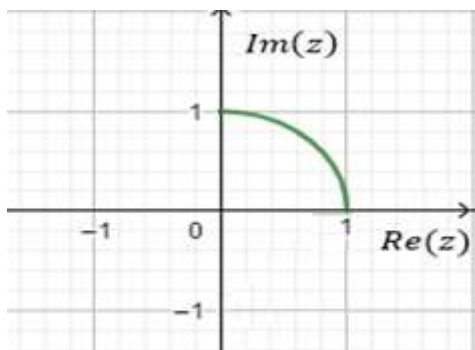


$$W = \{z \in \mathbb{C} / -1 \leq \operatorname{re}(z) < 2 \wedge |\operatorname{Im}(z)| < 1\}$$

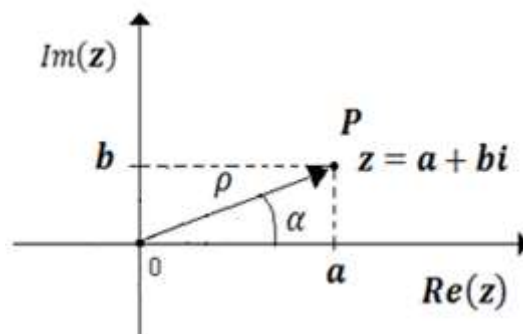
$$T = \{z \in \mathbb{C} / |\operatorname{Im}(z)| \leq 3\}$$



$$L = \left\{ z \in \mathbb{C} / |z| = 1 \wedge 0 \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$



Forma trigonométrica de un número complejo



Como puede observarse en figura $a = \rho \cos \alpha$ y $b = \rho \sin \alpha$, lo que permite expresar a z en su **forma trigonométrica**:

$$z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$z = a + bi \leftrightarrow z = (a, b) \leftrightarrow \rho(\cos \alpha) + \rho(\sin \alpha)i$$

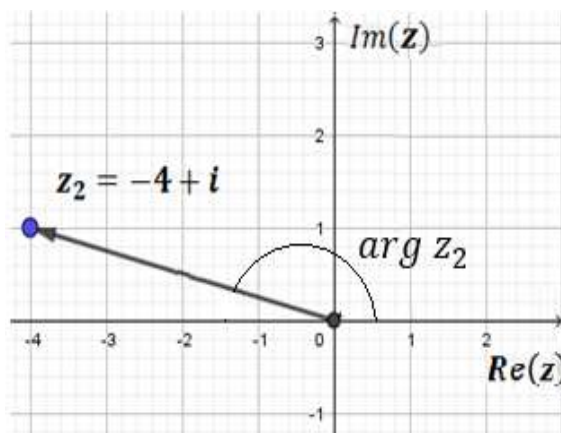
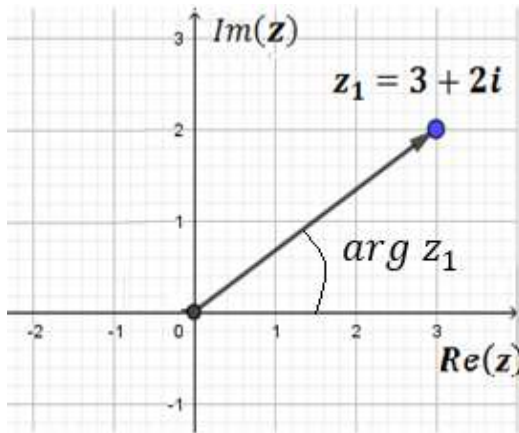
Ejemplo: $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -4 + i$, $z_3 = 2 - 2i$, $z_4 = -1 - 3i$

$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{2}{3}, \quad \text{tg } \alpha_2 = \frac{1}{-4}, \quad \text{tg } \alpha_3 = \frac{-2}{2}, \quad \text{tg } \alpha_4 = \frac{-3}{-1}$$

$$\alpha_1 = 33^\circ 41' 24'', \quad \alpha_2 = -14^\circ 2' 10'', \quad \alpha_3 = -45^\circ, \quad \alpha_4 = 71^\circ 33' 54''$$

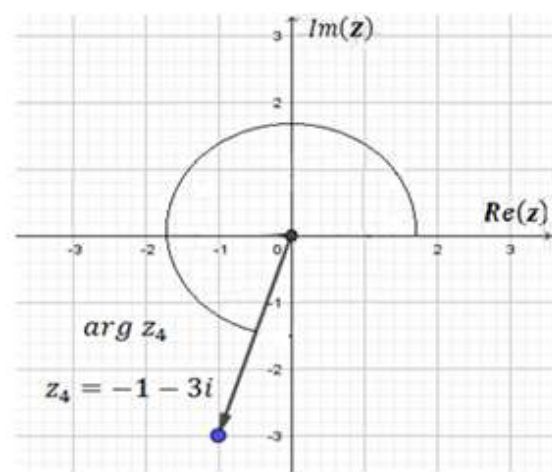
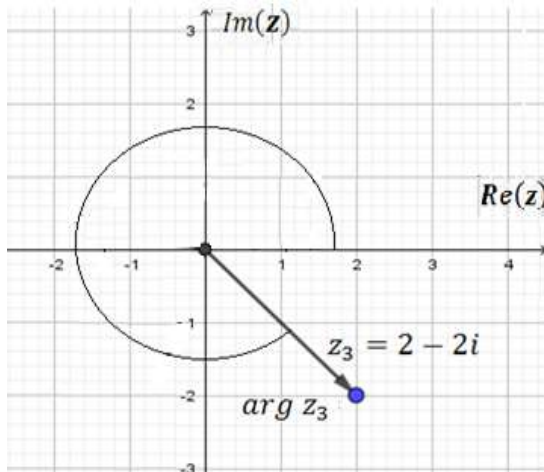
$$\arg z_1 = 33^\circ 41' 24''$$

$$\arg z_2 = -14^\circ 2' 10'' + 180^\circ = 165^\circ 57' 50''$$



$$\arg z_3 = -45^\circ + 360^\circ = 315^\circ$$

$$\arg z_4 = 71^\circ 33' 54'' + 180^\circ = 251^\circ 33' 54''$$



Ejercicio 7

a) Representa gráficamente los siguientes números complejos indicando a que cuadrante o eje pertenecen.

$$z_1 = -2 + 3i, \quad z_2 = 3 + 1i, \quad z_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i,$$

$$z_4 = 6i, \quad z_5 = -2, \quad z_6 = \frac{1}{2} - i$$

b) Representa los siguientes conjuntos del plano complejo.

$$A = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 2\}$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} / 1 \leq |z| \leq 3\}$$

$$C = \{z \in \mathbb{C} / |\operatorname{re}(z)| \leq 2\}$$

$$D = \{z \in \mathbb{C} / |\operatorname{Re}(z)| < 2 \wedge |\operatorname{Im}(z)| \leq 1\}$$

$$E = \{z \in \mathbb{C} / -1 \leq \operatorname{Re}(z) < 3 \wedge \operatorname{Im}(z) = 1\}$$

$$F = \left\{z \in \mathbb{C} / |z| < 3 \wedge \operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}\right\}$$

$$G = \left\{z \in \mathbb{C} / 1 \leq |z| \leq 2 \wedge |\operatorname{Arg}(z)| \leq \frac{\pi}{4}\right\}$$

c) Determina, justificando tu respuesta, si $z_1 \in C, z_2 \in E, z_5 \in G, z_3 \in F,$
 $z_4 \in C, z_6 \in D.$

Forma polar de un número complejo

Sea $z = a + bi = |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ llamamos **Forma Polar** a la expresión: $z = |z|_{\alpha} = \rho_{\alpha}.$

Ejemplos: $z_1 = 2 - 2i, \quad z_1 = |z_1|_{\alpha} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} \frac{7\pi}{4}, \quad z_1 = \sqrt{8} \frac{7\pi}{4}$

$$\begin{array}{ll} z_2 = -3i & z_2 = 3 \frac{3\pi}{2} \\ z_3 = 4 & z_3 = 4_0 \end{array}$$

Igualdad de complejos en su forma polar

Sean $z_1 = |z_1|_{\alpha_1}$ y $z_2 = |z_2|_{\alpha_2}$ entonces $z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \wedge$
 $\alpha_1 = \alpha_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Operaciones en Forma polar

Dados $z_1 = |z_1|_{\alpha_1}$ y $z_2 = |z_2|_{\alpha_2}$

- $z_1 \cdot z_2 = |z_1|_{\alpha_1} \cdot |z_2|_{\alpha_2} = (|z_1| \cdot |z_2|)_{(\alpha_1 + \alpha_2)}$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|_{\alpha_1}}{|z_2|_{\alpha_2}} = \left(\frac{|z_1|}{|z_2|}\right)_{(\alpha_1 - \alpha_2)} \quad z_2 \neq 0$

Ejemplos: $z_1 = \sqrt{8} \frac{7\pi}{4}, \quad z_2 = 3 \frac{2\pi}{3}, \quad z_3 = 4_0$

$$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{8} \frac{7\pi}{4} \cdot 3 \frac{2\pi}{3} = (3\sqrt{8})_{\left(\frac{14}{6}\right)} = (3\sqrt{8})_{\left(\frac{7\pi}{3}\right)}$$

$$\frac{z_2}{z_3} = \frac{3^{\frac{2\pi}{3}}}{4_0} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2\pi}{3}}$$

Ejercicio 8. Dados los números complejos

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 3 - 3i, \quad z_3 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z_4 = -1 - \sqrt{3}i$$

exprésalos en forma polar y realiza las operaciones establecidas.

- a) $z_1 \cdot z_2 =$ b) $z_3 \cdot z_4 =$ c) $z_2 : z_1 =$
 d) $z_1 \cdot z_3 =$ e) $z_4 : z_3 =$ f) $z_1 \cdot z_3 \cdot z_4 =$

Pasaje de una forma a la otra

$z = a + bi$	$ z = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad tga \alpha = \frac{b}{a}$ $a \neq 0$	$z = z _{\alpha}$
		$z = z (\cos \alpha + i \sen \alpha)$
$z = z _{\alpha}$	$a = z (\cos \alpha)$ $b = z (\sen \alpha)$	$z = z (\cos \alpha + i \sen \alpha)$
		$z = z \cos \alpha + i z \sen \alpha$ $z = a + bi$
$z = z (\cos \alpha + i \sen \alpha)$	$z = z \cos \alpha + i z \sen \alpha$	$z = a + bi$
		$z = z _{\alpha}$

$$z = a + bi \leftrightarrow z = (a, b) \leftrightarrow |z|(\cos \alpha) + |z|(\sen \alpha)i \leftrightarrow |z|_{\alpha}$$

Ejemplo: $z = 2 - 2i$ $z = |z|_{\alpha} = \sqrt{2^2 + (-2)^2}^{\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{8}^{\frac{7\pi}{4}}$

$$z = |z|(\cos \alpha + i \sen \alpha) = \sqrt{8} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sen \frac{7\pi}{4} \right)$$

$$= \sqrt{8} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{(-\sqrt{2})}{2}i \right) = 2 - 2i$$

$$z = 2 - 2i \leftrightarrow z = (2, -2) \leftrightarrow \sqrt{8} \left(\cos \frac{7\pi}{4} \right) + \sqrt{8} \left(\sen \frac{7\pi}{4} \right) i \leftrightarrow \sqrt{8}^{\frac{7\pi}{4}}$$

Recuerdo:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\operatorname{sen} \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

Ejercicio 9. Expresa los siguientes números complejos en forma binómica.

$$z_1 = 5_0, \quad z_2 = 2_{\frac{7\pi}{6}}, \quad z_3 = 4_{\frac{3\pi}{2}}, \quad z_4 = 2_{\frac{5\pi}{3}}, \quad z_5 = 1_{\frac{\pi}{6}}, \quad z_6 = \sqrt{2}_{\frac{4\pi}{3}}$$

Potencia entera de un número complejo

Sea $z = |z|_{\alpha}$, $n \in \mathbb{Z}$ resulta $z^n = |z|_{n.\alpha}^n$

Ejemplo: $z = 2 - 2i$ $z = |z|_{\alpha} = \sqrt{2^2 + (-2)^2}_{\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{8}_{\frac{7\pi}{4}}$

$$z^3 = (\sqrt{8})^3_{\frac{21\pi}{4}}$$

Ejercicio 10. Realiza las operaciones indicadas.

$$z_1 = 5_0, \quad z_2 = 2_{\frac{7\pi}{6}}, \quad z_3 = 4_{\frac{3\pi}{2}}, \quad z_4 = 2_{\frac{5\pi}{3}}, \quad z_5 = 1_{\frac{\pi}{6}}, \quad z_6 = \sqrt{2}_{\frac{4\pi}{3}}$$

$$a) z_1^3 = \quad b) z_2^4 = \quad c) z_3^2 = \quad d) z_4^2 = \quad e) z_5^8 = \quad f) z_6^4 =$$

Raíz enésima de un número complejo

Sea $z = a + bi$ se llama raíz enésima a toda solución de la ecuación

$$x^n = a + bi, n \in \mathbb{N} - \{1\}. \text{ Se indica } x = \sqrt[n]{a + bi}.$$

Teorema: Todo complejo $z = |z|_{\alpha}$ tiene exactamente n raíces enésimas

$$\text{dadas por: } \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}_{\frac{\alpha + 2k\pi}{n}}; k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Observación. Todas las raíces enésimas tienen igual módulo $\sqrt[n]{|z|}$ y sus

argumentos difieren en $\frac{2\pi}{n}$ radianes, por lo tanto, los afijos de estas raíces son

RESPUESTAS

Ejercicio 1

$$\operatorname{Re}(z_1) = -2 \qquad \operatorname{Im}(z_1) = -4$$

$$\operatorname{Re}(z_2) = \frac{1}{3} \qquad \operatorname{Im}(z_2) = 5$$

$$\operatorname{Re}(z_3) = \sqrt{2} \qquad \operatorname{Im}(z_3) = -6$$

$$\operatorname{Re}(z_4) = 0 \qquad \operatorname{Im}(z_4) = -3$$

$$\operatorname{Re}(z_5) = 1000 \qquad \operatorname{Im}(z_5) = 0$$

Ejercicio 2

$$i^7 = -i, \qquad i^{1000} = 1, \qquad i^{26} = -1, \qquad i^{325} = i$$

Ejercicio 3

i) $a) z_1 + z_2 = 1 - 2i$

b) $z_1 + \bar{z}_1 = -4$

c) $z_1 - z_2 = -5 + 8i$

d) $\bar{z}_2 = 3 + 5i$

e) $-\bar{z}_3 = \sqrt{3} + 7i$

f) $z_1 \cdot z_2 = 9 + 19i$

g) $z_1 : z_2 = -\frac{21}{34} - \frac{1}{34}i$

h) $\bar{z}_5 + z_4 = -5 + 6i$

i) $z_5 : z_6 = \frac{5}{6}i$

j) $z_3 + z_1 + z_4 = (-2 - \sqrt{3}) + 16i$

k) $z_1 \cdot z_4 = -18 - 12i$

l) $-z_3 - z_1 = (\sqrt{3} + 2) - 10i$

ii) $a = \frac{3}{4} \quad b = -3$

Ejercicio 4

1) $z = \bar{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow bi = -bi \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

2) $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = a + a + bi - bi = 2a$

3) $z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = a + bi - a + bi = 2bi$

4) $z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = aa + abi - abi - bbi^2 = a^2 + b^2$

5) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} =$

$$= (a + c) - (b + d)i = (a + c) + (-b - d)i =$$

$$= a + c - bi - di = (a - bi) + (c - di) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\begin{aligned} 6) \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} = \overline{(a \cdot c - bd) + (ab + bc)i} = \\ &= (ac - bd) + (-ad - bc)i = ac - bd - adi - bci = \\ &= ac - adi - bci + bdi^2 = (a - bi) \cdot (c - di) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \end{aligned}$$

$$7) -\overline{z} = -(a - bi) = -a + bi = \overline{-a - bi} = \overline{-(a + bi)} = \overline{-z}$$

$$\begin{aligned} 8) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)} = \overline{\left(\frac{a \cdot c + b \cdot d}{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{b \cdot c - a \cdot d}{c^2 + d^2}\right)i} = \\ &= \left(\frac{a \cdot c + b \cdot d}{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{-b \cdot c + a \cdot d}{c^2 + d^2}\right)i = \frac{a - bi}{c - di} \cdot \frac{c + di}{c + di} = \frac{a - bi}{c - di} = \frac{\overline{a + bi}}{\overline{c + di}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad z_2 \neq 0 \end{aligned}$$

$$9) \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{\overline{1}}{\overline{z}} = \frac{1}{\overline{z}} \quad z \neq 0$$

Ejercicio 5

$$\begin{array}{lll} a) z_1 + z_2 = (0,3) & d) \overline{z_1} = (3,2) & g) z_1 : z_2 = \left(\frac{-1}{34}, \frac{21}{34}i\right) \\ b) z_1 + \overline{z_2} = (0, -7) & e) z_1^2 = (5, -12) & h) \overline{z_5} = (-6, 0) \\ c) z_1 - \overline{z_2} = (6,3) & f) z_1 \cdot z_2 = (1,21) & i) \overline{z_4} + z_5 = (-6, -5) \end{array}$$

Ejercicio 6

$$\begin{aligned} |z_1| &= \sqrt{13}, \quad |z_2| = \sqrt{10}, \quad |z_3| = 2, \quad |z_4| = 6, \\ |z_5| &= 2, \quad |z_6| = \sqrt{26}, \quad |z_7| = \sqrt{17}, \quad |z_8| = \sqrt{18} \end{aligned}$$

Ejercicio 7

$$\begin{array}{lll} a) z_1 \in II C, & z_2 \in I C, & z_3 \in III C, \\ & z_4 \in \text{eje imag.}, & z_5 \in \text{eje real}, & z_6 \in IV C \end{array}$$

$$c) z_1 \in C, z_2 \notin E, z_5 \notin G, z_3 \notin F, z_4 \in C, z_6 \in D.$$

Ejercicio 8

$$z_1 = \sqrt{2} \frac{\pi}{4}, \quad z_2 = \sqrt{18} \frac{7\pi}{4}, \quad z_3 = 2 \frac{2\pi}{3}, \quad z_4 = 2 \frac{4\pi}{3}$$

$$a) z_1 \cdot z_2 = 6_0, \quad b) z_3 \cdot z_4 = 4_0, \quad c) z_2 : z_1 = 3 \frac{3\pi}{2},$$

$$d) z_1 \cdot z_3 = 2\sqrt{2} \frac{11}{12}, \quad e) z_4 : z_3 = 1 \frac{2\pi}{3}, \quad f) z_1 \cdot z_3 \cdot z_4 = 4\sqrt{2} \frac{\pi}{4}$$

Ejercicio 9

$$z_1 = 5,$$

$$z_2 = -\sqrt{3} - i,$$

$$z_3 = -4i,$$

$$z_4 = 1 - \sqrt{3}i,$$

$$z_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$z_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

Ejercicio 10

$$a) (5_0)^3 = 125_0$$

$$b) \left(2\frac{7\pi}{6}\right)^4 = 16\frac{2\pi}{3}$$

$$c) \left(4\frac{3\pi}{2}\right)^2 = 16_0$$

$$d) \left(2\frac{5\pi}{3}\right)^2 = 4\frac{4\pi}{3}$$

$$e) \left(1\frac{\pi}{6}\right)^8 = 1\frac{4\pi}{3}$$

$$f) \left(\sqrt{2}\frac{4\pi}{3}\right)^2 = 2\frac{2\pi}{3}$$

Ejercicio 11

$$i) a) 1\frac{3\pi+2k\pi}{2} \quad k = 0,1,2. \quad x_0 = 1\frac{\pi}{2}, \quad x_1 = 1\frac{7\pi}{6}, \quad x_2 = 1\frac{11\pi}{6}$$

$$b) \sqrt[2]{i} = 1\frac{\pi+2k\pi}{2} \quad k = 0,1. \quad x_0 = 1\frac{\pi}{4}, \quad x_1 = 1\frac{5\pi}{4}$$

$$c) \sqrt[8]{2\frac{\pi+2k\pi}{4}} \quad k = 0,1,2,3.$$

$$x_0 = \sqrt[8]{2}\frac{\pi}{16}, \quad x_1 = \sqrt[8]{2}\frac{9\pi}{16}, \quad x_2 = \sqrt[8]{2}\frac{17\pi}{16}, \quad x_3 = \sqrt[8]{2}\frac{25\pi}{16}$$

$$d) \sqrt[6]{2\frac{7\pi+2k\pi}{4}} \quad k = 0,1,2. \quad x_0 = \sqrt[6]{2}\frac{7\pi}{12}, \quad x_1 = \sqrt[6]{2}\frac{5\pi}{4}, \quad x_2 = \sqrt[6]{2}\frac{23\pi}{12}$$

$$ii) x^5 + 1 = 0 \quad x = \sqrt[5]{-1}$$

$$\sqrt[5]{-1} = 1\frac{\pi+2k\pi}{5} \quad k = 0,1,2,3,4.$$

$$x_0 = 1\frac{\pi}{5}, \quad x_1 = 1\frac{3\pi}{5}, \quad x_2 = 1\pi, \quad x_3 = 1\frac{7\pi}{5}, \quad x_4 = 1\frac{9\pi}{5}$$

Bibliografía

- Guzmán, M. (2007). *Curso Introductorio Matemática*. Rosario: UNREditora.
- Stewart, J., Redlin, L., Watson, S. (2012). *Précalculo. Matemáticas para el Cálculo*. México: Cengage Learning.
- Sullivan, M. (2006). *Álgebra y Trigonometría*. México: Pearson.
- Swokowski, E; Cole, J. (2009). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Cengage Learning.