Números complejos

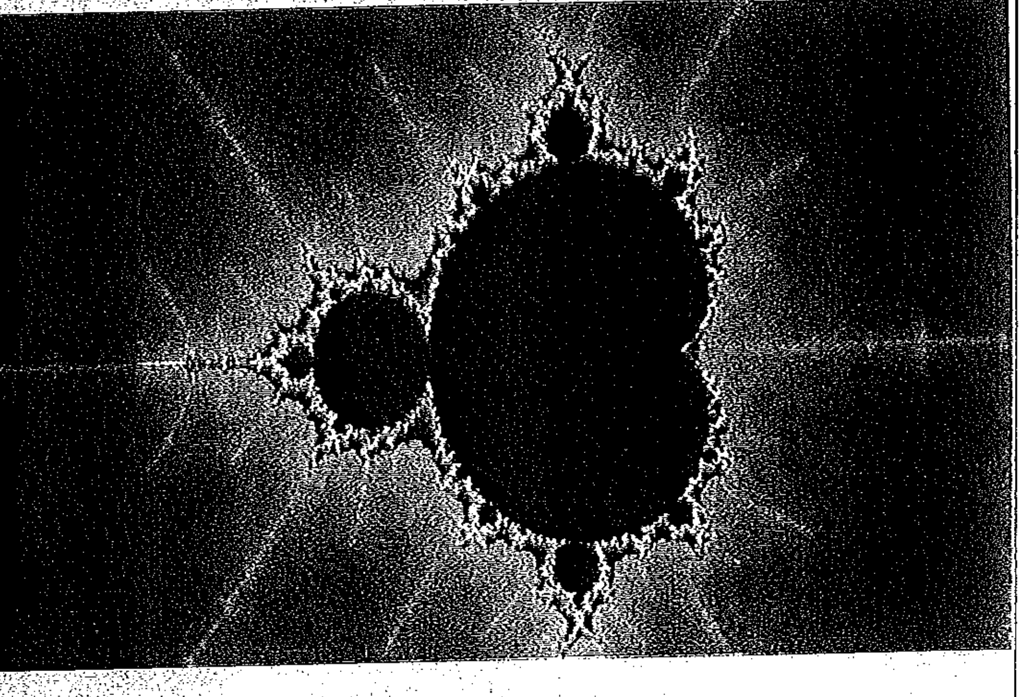
4

En matemáticas

El conjunto de números complejos incluye los números reales y los números imaginarios. Los números complejos pueden utilizarse para resolver ecuaciones que no tienen soluciones reales.

En el mundo real

Los números complejos pueden emplearse para crear imágenes hermosas llamadas fractales. El fractal más famoso es el Conjunto de Mandelbrot, nombrado en honor al matemático Benoit Mandelbrot. (Vea el Ejercicio 11, página 374.)



sciencephotos/Alamy

EN CARRERAS

Existen varias carreras que emplean números complejos. A continuación se listan varias.

- Electricista
  Ejercicio 89, página 344
- Economista
  Ejercicio 85, página 352
- Analista de ventas
  Ejercicio 86, página 352
- Analista de investigación del consumidor
  Ejercicio 48, página 368

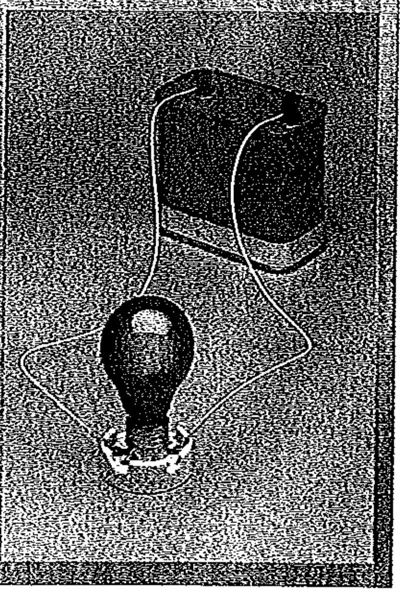
4.1 NÚMEROS COMPLEJOS

Lo que debe aprender

- Usar la unidad imaginaria i para escribir números complejos.
- Sumar, restar y multiplicar números complejos.
- Usar conjugados complejos para escribir el cociente de dos números complejos en forma estándar.
- Encontrar soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas.

Por qué debe aprenderlo

Puede emplear números complejos para modelar y resolver problemas en el mundo real. Por ejemplo, en el Ejercicio 89 en la página 344, aprenderá cómo utilizar los números complejos para encontrar la impedancia de un circuito eléctrico.



Unidad imaginaria *i*

Algunas ecuaciones cuadráticas no tienen soluciones reales. Por ejemplo, la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución real debido a que no existe un número real x que pueda elevarse al cuadrado para producir -1. Para superar esta deficiencia, los matemáticos crearon un sistema expandido de números empleando la **unidad imaginaria** $\boldsymbol{i}$, definida como

$$i = \sqrt{-1} \qquad \text{Unidad imaginaria}$$

donde $i^2 = -1$. Al sumar números reales a múltiplos reales de esta unidad imaginaria, se obtiene el conjunto de **números complejos.** Cada número complejo puede escribirse en **forma estándar** $\boldsymbol{a + bi}$. Por ejemplo, la forma estándar del número complejo $-5 + \sqrt{-9}$ es $-5 + 3i$ debido a que

$$-5 + \sqrt{-9} = -5 + \sqrt{3^2(-1)} = -5 + 3\sqrt{-1} = -5 + 3i.$$

En forma estándar $a + bi$, al número real a se le llama la **parte real** del **número complejo** $\boldsymbol{a + bi}$ y al número bi (donde b es un número real) se le llama la **parte imaginaria** del número complejo.

Definición de un número complejo

Si a y b son números reales, el número $a + bi$ es un **número complejo** y se dice que está escrito en **forma estándar.** Si $b = 0$, el número $a + bi = a$ es un número real. Si $b \neq 0$, al número $a + bi$ se le llama **número complejo.** Un número de la forma bi, donde $b \neq 0$, se llama **número imaginario puro.**

El conjunto de números reales es un subconjunto del conjunto de los números complejos, como se muestra en la Figura 4.1. Esto es verdadero debido a que todo número real a puede escribirse como un número complejo utilizando $b = 0$. Es decir, para todo número real a, puede escribir $a = a + 0i$.

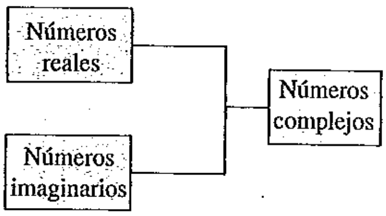


FIGURA 4.1

Igualdad de números complejos

Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$, escritos en forma estándar, son iguales entre sí

$$a + bi = c + di \qquad \text{Igualdad de dos números complejos}$$

si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Operaciones con números complejos

Para sumar (o restar) dos números complejos, sume (o reste) por separado las partes reales e imaginarias de los números.

> **Suma y resta de números complejos**
>
> Si $a + bi$ y $c + di$ son dos números complejos escritos en forma estándar, su suma y resta se definen como a continuación.
>
> *Suma:* $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
>
> *Resta:* $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

El **neutro aditivo** en el sistema de números complejos es cero (al igual que en el sistema de números reales). Además, el **inverso aditivo** del número complejo $a + bi$ es

$-(a + bi) = -a - bi.$ Inverso aditivo

Por lo que tiene

$$(a + bi) + (-a - bi) = 0 + 0i = 0.$$

Ejemplo 1 **Suma y resta de números complejos**

a. $(4 + 7i) + (1 - 6i) = 4 + 7i + 1 - 6i$ Eliminar paréntesis.

$= (4 + 1) + (7i - 6i)$ Agrupar términos comunes.

$= 5 + i$ Escribir en forma estándar.

b. $(1 + 2i) - (4 + 2i) = 1 + 2i - 4 - 2i$ Eliminar paréntesis.

$= (1 - 4) + (2i - 2i)$ Agrupar términos comunes.

$= -3 + 0$ Simplificar.

$= -3$ Escribir en forma estándar.

c. $3i - (-2 + 3i) - (2 + 5i) = 3i + 2 - 3i - 2 - 5i$

$= (2 - 2) + (3i - 3i - 5i)$

$= 0 - 5i$

$= -5i$

d. $(3 + 2i) + (4 - i) - (7 + i) = 3 + 2i + 4 - i - 7 - i$

$= (3 + 4 - 7) + (2i - i - i)$

$= 0 + 0i$

$= 0$

Punto de repaso Ahora intente el Ejercicio 21.

Observe en los Ejemplos 1(b) y 1(d) que la suma de dos números complejos puede ser un número real.

Muchas de las propiedades de los números reales también son válidas para los números complejos. Aquí algunos ejemplos.

Propiedades asociativas de la suma y la multiplicación

Propiedades conmutativas de la suma y la multiplicación

Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma

Observe abajo cómo se emplean estas propiedades cuando se multiplican dos números complejos.

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= a(c+di)+bi(c+di) && \text{Propiedad distributiva}\\ &= ac+(ad)i+(bc)i+(bd)i^2 && \text{Propiedad distributiva}\\ &= ac+(ad)i+(bc)i+(bd)(-1) && i^2=-1\\ &= ac-bd+(ad)i+(bc)i && \text{Propiedad conmutativa}\\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i && \text{Propiedad asociativa}\end{aligned}$$

En vez de tratar de memorizar esta regla de multiplicación, simplemente debe recordar cómo se utiliza la Propiedad distributiva para multiplicar dos números complejos.

Ejemplo 2 Multiplicación de números complejos

a.
$$\begin{aligned}4(-2+3i) &= 4(-2)+4(3i) && \text{Propiedad distributiva}\\ &= -8+12i && \text{Simplificar.}\end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned}(2-i)(4+3i) &= 2(4+3i)-i(4+3i) && \text{Propiedad distributiva}\\ &= 8+6i-4i-3i^2 && \text{Propiedad distributiva}\\ &= 8+6i-4i-3(-1) && i^2=-1\\ &= (8+3)+(6i-4i) && \text{Agrupar términos comunes.}\\ &= 11+2i && \text{Escribir en forma estándar.}\end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned}(3+2i)(3-2i) &= 3(3-2i)+2i(3-2i) && \text{Propiedad distributiva}\\ &= 9-6i+6i-4i^2 && \text{Propiedad distributiva}\\ &= 9-6i+6i-4(-1) && i^2=-1\\ &= 9+4 && \text{Simplificar.}\\ &= 13 && \text{Escribir en forma estándar.}\end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned}(3+2i)^2 &= (3+2i)(3+2i) && \text{Cuadrado de un binomio}\\ &= 3(3+2i)+2i(3+2i) && \text{Propiedad distributiva}\\ &= 9+6i+6i+4i^2 && \text{Propiedad distributiva}\\ &= 9+6i+6i+4(-1) && i^2=-1\\ &= 9+12i-4 && \text{Simplificar.}\\ &= 5+12i && \text{Escribir en forma estándar.}\end{aligned}$$

PUNTO de repaso Ahora intente el Ejercicio 31.

Tip de estudio

El procedimiento descrito arriba es similar a la multiplicación de dos polinomios y a la agrupación de términos comunes, como en el Método FOIL. Por ejemplo, puede emplear el Método FOIL para multiplicar los dos números complejos del Ejemplo 2(b).

$$(2-i)(4+3i) = \overset{F}{8}+\overset{O}{6i}-\overset{I}{4i}-\overset{L}{3i^2}$$

Soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas

Cuando se utiliza la Fórmula cuadrática para resolver una ecuación cuadrática, con frecuencia obtiene un resultado como $\sqrt{-3}$, el cual sabe que no es un número real. Al factorizar $i = \sqrt{-1}$, puede escribir este número en forma estándar.

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3(-1)} = \sqrt{3}\sqrt{-1} = \sqrt{3}i$$

Al número $\sqrt{3}i$ se le llama *raíz cuadrada principal* de -3.

Ayuda en álgebra

En la Sección P.2 puede repasar las técnicas para el uso de la Fórmula cuadrática.

PRECAUCIÓN/CUIDADO

La definición de la raíz cuadrada principal emplea la regla

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

para $a > 0$ y $b < 0$. Esta regla no es válida si a y b son negativos. Por ejemplo

$$\begin{aligned}\sqrt{-5}\sqrt{-5} &= \sqrt{5(-1)}\sqrt{5(-1)}\\ &= \sqrt{5}i\sqrt{5}i\\ &= \sqrt{25}i^2\\ &= 5i^2 = -5\end{aligned}$$

mientras que

$$\sqrt{(-5)(-5)} = \sqrt{25} = 5.$$

Para evitar problemas con las raíces cuadradas de números negativos, asegúrese de convertir los números complejos a la forma estándar *antes* de la multiplicación.

Raíz cuadrada principal de un número negativo

Si a es un número positivo, la **raíz cuadrada principal** del número negativo $-a$ se define como

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}i.$$

Ejemplo 5 Escritura de números complejos en forma estándar

a. $\sqrt{-3}\sqrt{-12} = \sqrt{3}i\sqrt{12}i = \sqrt{36}i^2 = 6(-1) = -6$

b. $\sqrt{-48} - \sqrt{-27} = \sqrt{48}i - \sqrt{27}i = 4\sqrt{3}i - 3\sqrt{3}i = \sqrt{3}i$

c.
$$\begin{aligned}\left(-1 + \sqrt{-3}\right)^2 &= \left(-1 + \sqrt{3}i\right)^2\\ &= (-1)^2 - 2\sqrt{3}i + \left(\sqrt{3}\right)^2(i^2)\\ &= 1 - 2\sqrt{3}i + 3(-1)\\ &= -2 - 2\sqrt{3}i\end{aligned}$$

Punto de repaso Ahora intente el Ejercicio 63.

Ejemplo 6 Soluciones complejas de una ecuación cuadrática

Resuelva (a) $x^2 + 4 = 0$ y (b) $3x^2 - 2x + 5 = 0$.

Solución

a. $x^2 + 4 = 0$ Escribir la ecuación original.

$x^2 = -4$ Restar 4 de cada lado.

$x = \pm 2i$ Extraer raíces cuadradas.

b. $3x^2 - 2x + 5 = 0$ Escribir la ecuación original.

$x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(5)}}{2(3)}$ Fórmula cuadrática

$= \dfrac{2 \pm \sqrt{-56}}{6}$ Simplificar.

$= \dfrac{2 \pm 2\sqrt{14}i}{6}$ Escribir $\sqrt{-56}$ en forma estándar.

$= \dfrac{1}{3} \pm \dfrac{\sqrt{14}}{3}i$ Escribir en forma estándar.

Punto de repaso Ahora intente el Ejercicio 69.

4.1 EJERCICIOS

Visite www.CalcChat.com para las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO

1. Relacione el tipo de número complejo con su definición.
   (a) Número real (i) $a + bi,\quad a \neq 0,\quad b \neq 0$
   (b) Número complejo (ii) $a + bi,\quad a = 0,\quad b \neq 0$
   (c) Número imaginario puro (iii) $a + bi,\quad b = 0$

En los Ejercicios 2-4, complete los espacios.

2. La unidad imaginaria i se define como $i =$ ________, donde $i^2 =$ ________.
3. Si a es un número positivo, la raíz ________ ________ del número negativo $-a$ se define como $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i$.
4. A los números $a + bi$ y $a - bi$ se les llama ________ ________ y su producto es un número real $a^2 + b^2$.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-8, encuentre los números reales a y b de tal manera que la ecuación sea verdadera.

5. $a + bi = -12 + 7i$
6. $a + bi = 13 + 4i$
7. $(a - 1) + (b + 3)i = 5 + 8i$
8. $(a + 6) + 2bi = 6 - 5i$

En los Ejercicios 9-20, escriba el número complejo en forma estándar.

9. $8 + \sqrt{-25}$
10. $5 + \sqrt{-36}$
11. $2 - \sqrt{-27}$
12. $1 + \sqrt{-8}$
13. $\sqrt{-80}$
14. $\sqrt{-4}$
15. 14
16. 75
17. $-10i + i^2$
18. $-4i^2 + 2i$
19. $\sqrt{-0.09}$
20. $\sqrt{-0.0049}$

En los Ejercicios 21-30, desarrolle la suma o la resta y escriba el resultado en forma estándar.

21. $(7 + i) + (3 - 4i)$
22. $(13 - 2i) + (-5 + 6i)$
23. $(9 - i) - (8 - i)$
24. $(3 + 2i) - (6 + 13i)$
25. $\left(-2 + \sqrt{-8}\right) + \left(5 - \sqrt{-50}\right)$
26. $\left(8 + \sqrt{-18}\right) - \left(4 + 3\sqrt{2}i\right)$
27. $13i - (14 - 7i)$
28. $25 + (-10 + 11i) + 15i$
29. $-\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i\right) + \left(\frac{5}{3} + \frac{11}{3}i\right)$
30. $(1.6 + 3.2i) + (-5.8 + 4.3i)$

En los Ejercicios 31-40, desarrolle la operación y escriba el resultado en forma estándar.

31. $(1 + i)(3 - 2i)$
32. $(7 - 2i)(3 - 5i)$
33. $12i(1 - 9i)$
34. $-8i(9 + 4i)$
35. $\left(\sqrt{14} + \sqrt{10}i\right)\left(\sqrt{14} - \sqrt{10}i\right)$
36. $\left(\sqrt{3} + \sqrt{15}i\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{15}i\right)$
37. $(6 + 7i)^2$
38. $(5 - 4i)^2$
39. $(2 + 3i)^2 + (2 - 3i)^2$
40. $(1 - 2i)^2 - (1 + 2i)^2$

En los Ejercicios 41-48, escriba el complejo conjugado del número complejo. Después multiplique el número por su complejo conjugado.

41. $9 + 2i$
42. $8 - 10i$
43. $-1 - \sqrt{5}i$
44. $-3 + \sqrt{2}i$
45. $\sqrt{-20}$
46. $\sqrt{-15}$
47. $\sqrt{6}$
48. $1 + \sqrt{8}$

En los Ejercicios 49-58, escriba el cociente en forma estándar.

49. $\dfrac{3}{i}$
50. $-\dfrac{14}{2i}$
51. $\dfrac{2}{4 - 5i}$
52. $\dfrac{13}{1 - i}$
53. $\dfrac{5 + i}{5 - i}$
54. $\dfrac{6 - 7i}{1 - 2i}$
55. $\dfrac{9 - 4i}{i}$
56. $\dfrac{8 + 16i}{2i}$
57. $\dfrac{3i}{(4 - 5i)^2}$
58. $\dfrac{5i}{(2 + 3i)^2}$

En los Ejercicios 59-62, desarrolle la operación y escriba el resultado en forma estándar.

59. $\dfrac{2}{1 + i} - \dfrac{3}{1 - i}$
60. $\dfrac{2i}{2 + i} + \dfrac{5}{2 - i}$
61. $\dfrac{i}{3 - 2i} + \dfrac{2i}{3 + 8i}$
62. $\dfrac{1 + i}{i} - \dfrac{3}{4 - i}$

En los Ejercicios 63-68, escriba el número complejo en forma estándar.

63. $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-2}$ **64.** $\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-10}$

65. $(\sqrt{-15})^2$ **66.** $(\sqrt{-75})^2$

67. $(3 + \sqrt{-5})(7 - \sqrt{-10})$ **68.** $(2 - \sqrt{-6})^2$

En los Ejercicios 69-78, use la Fórmula cuadrática para resolver la ecuación cuadrática.

69. $x^2 - 2x + 2 = 0$ **70.** $x^2 + 6x + 10 = 0$

71. $4x^2 + 16x + 17 = 0$ **72.** $9x^2 - 6x + 37 = 0$

73. $4x^2 + 16x + 15 = 0$ **74.** $16t^2 - 4t + 3 = 0$

75. $\frac{3}{2}x^2 - 6x + 9 = 0$ **76.** $\frac{7}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{16} = 0$

77. $1.4x^2 - 2x - 10 = 0$ **78.** $4.5x^2 - 3x + 12 = 0$

En los Ejercicios 79-88, simplifique el número complejo y escríbalo en forma estándar.

79. $-6i^3 + i^2$ **80.** $4i^2 - 2i^3$

81. $-14i^5$ **82.** $(-i)^3$

83. $(\sqrt{-72})^3$ **84.** $(\sqrt{-2})^6$

85. $\dfrac{1}{i^3}$ **86.** $\dfrac{1}{(2i)^3}$

87. $(3i)^4$ **88.** $(-i)^6$

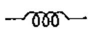
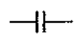
89. IMPEDANCIA A la oposición a la corriente en un circuito eléctrico se le llama impedancia. La impedancia z en un circuito en paralelo con dos trayectorias satisface la ecuación

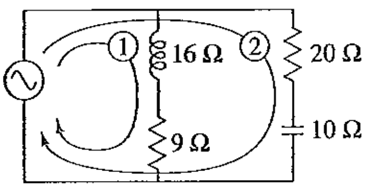
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$$

donde z_1 es la impedancia (en ohms) de la trayectoria 1 y z_2 es la impedancia de la trayectoria 2.

(a) La impedancia de cada trayectoria en un circuito en paralelo se encuentra sumando las impedancias de todos los componentes en la trayectoria. Use la tabla para encontrar z_1 y z_2.

(b) Encuentre la impedancia z.

	Resistencia	Bobina	Capacitor
Símbolo			
Impedancia	a	bi	$-ci$



90. Eleve al cubo cada número complejo.

(a) 2 (b) $-1 + \sqrt{3}i$ (c) $-1 - \sqrt{3}i$

91. Eleve a la cuarta potencia cada número complejo.

(a) 2 (b) -2 (c) $2i$ (d) $-2i$

92. Escriba cada una de las potencias de i como i, $-i$, 1 o -1.

(a) i^{40} (b) i^{25} (c) i^{50} (d) i^{67}

EXPLORACIÓN

¿FALSO O VERDADERO? **En los Ejercicios 93-96, determine si el enunciado es falso o verdadero. Justifique su respuesta.**

93. No existe un número complejo que sea igual a su complejo conjugado.

94. $-i\sqrt{6}$ es una solución de $x^4 - x^2 + 14 = 56$.

95. $i^{44} + i^{150} - i^{74} - i^{109} + i^{61} = -1$

96. La suma de dos números complejos siempre es un número real.

97. RECONOCIMIENTO DEL PATRÓN Complete lo siguiente.

$i^1 = i$ $i^2 = -1$ $i^3 = -i$ $i^4 = 1$

$i^5 =$ $i^6 =$ $i^7 =$ $i^8 =$

$i^9 =$ $i^{10} =$ $i^{11} =$ $i^{12} =$

¿Qué patrón observa? Escriba una descripción breve de cómo encontraría i elevado a cualquier potencia entera positiva.

98. TOQUE FINAL Considere las funciones

$f(x) = 2(x - 3)^2 - 4$ y $g(x) = -2(x - 3)^2 - 4$.

(a) Sin graficar alguna función, determine si la gráfica de f y la gráfica de g tienen intersecciones en x. Explique su razonamiento.

(b) Resuelva $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$.

(c) Explique cómo se relacionan los ceros de f y g si sus gráficas tienen intersecciones en x.

(d) Para la función $f(x) = a(x - h)^2 + k$, haga un enunciado general acerca de cómo son afectados a, h y k si la gráfica de f tiene intersecciones en x y si los ceros de f son reales o complejos.

99. ANÁLISIS DE ERRORES Describa el error.

$$\cancel{\sqrt{-6}\sqrt{-6} = \sqrt{(-6)(-6)} = \sqrt{36} = 6}$$

100. DEMOSTRACIÓN Demuestre que el complejo conjugado del producto de dos números complejos $a_1 + b_1i$ y $a_2 + b_2i$ es el producto de sus complejos conjugados.

101. DEMOSTRACIÓN Demuestre que el complejo conjugado de la suma de dos números complejos $a_1 + b_1i$ y $a_2 + b_2i$ es la suma de sus complejos conjugados.

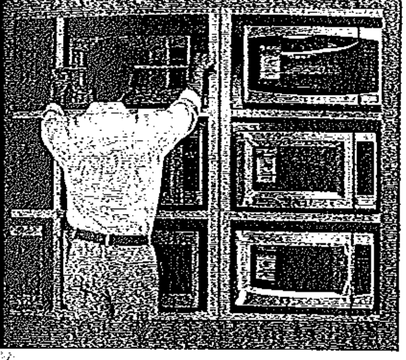
4.2 Soluciones complejas de ecuaciones

Lo que debe aprender

- Determinar el número de soluciones de ecuaciones polinómicas.
- Encontrar las soluciones de ecuaciones polinómicas.
- Encontrar los ceros de funciones polinómicas y encontrar funciones polinómicas dados los ceros de las funciones.

Por qué debe aprenderlo

La obtención de los ceros de las funciones polinómicas es una parte importante de la resolución de problemas en el mundo real. Por ejemplo, en el Ejercicio 85 en la página 352, los ceros de una función polinómica pueden ayudarle a analizar la función de la ganancia para un horno de microondas.



Número de soluciones de una ecuación polinómica

El Teorema fundamental del álgebra implica que una ecuación polinómica de grado n tiene precisamente n soluciones en el sistema de números complejos. Estas soluciones pueden ser reales o complejas y pueden repetirse. El Teorema fundamental del álgebra y el Teorema de la factorización lineal se listan abajo para su repaso. Para una comprobación del Teorema de la factorización lineal, vea Demostraciones matemáticas en la página 372.

Teorema fundamental del álgebra

Si $f(x)$ es un polinomio de grado n, donde $n > 0$, entonces f tiene al menos un cero en el sistema de números complejos.

Observe que el encontrar los ceros de una función polinómica f es equivalente a encontrar las soluciones de la ecuación polinómica $f(x) = 0$.

Teorema de la factorización lineal

Si $f(x)$ es un polinomio de grado n, donde $n > 0$, entonces f tiene precisamente n factores lineales

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \cdot \cdot \cdot (x - c_n)$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son números complejos.

Ejemplo 1 Soluciones de ecuaciones polinómicas

a. La ecuación de primer grado $x - 2 = 0$ tiene exactamente *una* solución: $x = 2$.

b. La ecuación de segundo grado

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \qquad \text{Ecuación de segundo grado}$$

$$(x - 3)(x - 3) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

tiene exactamente *dos* soluciones: $x = 3$ y $x = 3$. (A esto se le llama *solución repetida.*)

c. La ecuación de tercer grado

$$x^3 + 4x = 0 \qquad \text{Ecuación de tercer grado}$$

$$x(x - 2i)(x + 2i) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

tiene exactamente *tres* soluciones: $x = 0$, $x = 2i$ y $x = -2i$.

d. La ecuación de cuarto grado

$$x^4 - 1 = 0 \qquad \text{Ecuación de cuarto grado}$$

$$(x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

tiene exactamente *cuatro* soluciones: $x = 1$, $x = -1$, $x = i$ y $x = -i$.

PUNTO de repaso Ahora intente el Ejercicio 5.

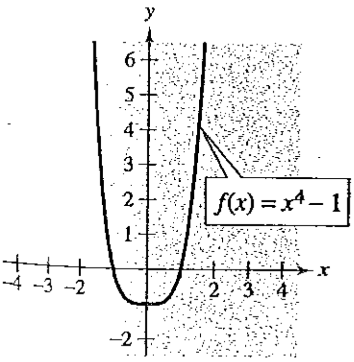


FIGURA 4.2

Puede emplear la gráfica para comprobar el número de soluciones *reales* de una ecuación. Como se muestra en la Figura 4.2, la gráfica de $f(x) = x^4 - 1$ tiene dos intersecciones en x, lo cual implica que tiene dos soluciones reales.

Toda ecuación de segundo grado, $ax^2 + bx + c = 0$, tiene precisamente dos soluciones dadas por la Fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A la expresión dentro del radical, $b^2 - 4ac$, se le llama **discriminante** y puede emplearse para determinar si las soluciones son reales, repetidas o complejas.

1. Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación tiene dos soluciones complejas.
2. Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una solución real repetida.
3. Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

Ejemplo 2 Uso del discriminante

Use el discriminante para encontrar el número de soluciones reales de cada ecuación.

a. $4x^2 - 20x + 25 = 0$ **b.** $13x^2 + 7x + 2 = 0$ **c.** $5x^2 - 8x = 0$

Solución

a. Para esta ecuación, $a = 4$, $b = -20$ y $c = 25$. Por lo que el discriminante es

$$b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4(4)(25) = 400 - 400 = 0.$$

Debido a que el discriminante es cero, existe una solución real repetida.

b. Para esta ecuación, $a = 13$, $b = 7$ y $c = 2$. Por lo que el discriminante es

$$b^2 - 4ac = 7^2 - 4(13)(2) = 49 - 104 = -55.$$

Debido a que el discriminante es negativo, existen dos soluciones complejas.

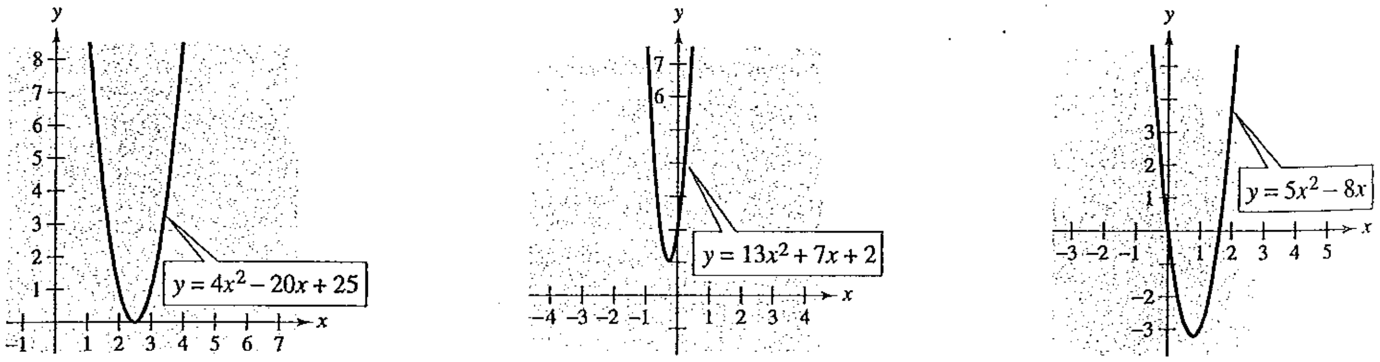
c. Para esta ecuación, $a = 5$, $b = -8$ y $c = 0$. Por lo que el discriminante es

$$b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(5)(0) = 64 - 0 = 64.$$

Debido a que el discriminante es positivo, existen dos soluciones reales distintas.

Punto de repaso Ahora intente el Ejercicio 9.

La Figura 4.3 muestra las gráficas de las funciones que corresponden a las ecuaciones en el Ejemplo 2. Observe que con una solución repetida, la gráfica *toca* el eje x en su intersección en x. Con dos soluciones complejas, la gráfica no tiene intersecciones en x. Con dos soluciones reales, la gráfica *atraviesa* el eje x en sus interseccciones en x.



(a) Solución real repetida (b) Sin solución real (c) Dos soluciones reales distintas

FIGURA 4.3

Determinación de las soluciones de ecuaciones polinómicas

Ejemplo 3 Resolución de una ecuación cuadrática

Resuelva $x^2 + 2x + 2 = 0$. Escriba las soluciones complejas en forma estándar.

Solución

Usando $a = 1$, $b = 2$ y $c = 2$, puede aplicar la fórmula cuadrática como a continuación.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Fórmula cuadrática

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$ Sustituir 1 para a, 2 para b y 2 para c.

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$ Simplificar.

$$= \frac{-2 \pm 2i}{2}$$ Simplificar.

$$= -1 \pm i$$ Escribir en forma estándar.

PUNTO de repaso Ahora intente el Ejercicio 23.

En el Ejemplo 3, las dos soluciones complejas son **conjugadas**. Es decir, son de la forma $a \pm bi$. Esto no es una coincidencia, como se indica por medio del siguiente teorema.

Las soluciones complejas ocurren en pares conjugados

Si $a + bi$, $b \neq 0$, es una solución de una ecuación polinómica con coeficientes reales, el conjugado $a - bi$ también es una solución de la ecuación.

Asegúrese de observar que este resultado sólo es verdadero si el polinomio tiene coeficientes *reales*. Por ejemplo, el resultado aplica para la ecuación $x^2 + 1 = 0$, pero no para la ecuación $x - i = 0$.

Ejemplo 4 Resolución de una ecuación polinómica

Resuelva $x^4 - x^2 - 20 = 0$.

Solución

$$x^4 - x^2 - 20 = 0$$ Escribir la ecuación original.

$$(x^2 - 5)(x^2 + 4) = 0$$ Factorizar de manera parcial.

$$(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})(x + 2i)(x - 2i) = 0$$ Factorizar por completo.

El igualar a cero cada factor da las soluciones $x = -\sqrt{5}$, $x = \sqrt{5}$, $x = -2i$ y $x = 2i$.

PUNTO de repaso Ahora intente el Ejercicio 51.

Determinación de los ceros de funciones polinómicas

El problema de encontrar los *ceros* de una función polinómica es en esencia el mismo problema que encontrar las soluciones de una ecuación polinómica. Por ejemplo, los ceros de la función polinómica

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 5$$

son simplemente las soluciones de la ecuación polinómica.

$$3x^2 - 4x + 5 = 0.$$

Ejemplo 5 Obtención de los ceros de una función polinómica

Encuentre todos los ceros de

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 60$$

dado que $1 + 3i$ es un cero de f.

Solución algebraica

Debido a que los ceros complejos ocurren en pares conjugados, conoce que $1 - 3i$ también es un cero de f. Esto significa que

$$[x - (1 + 3i)] \quad \text{y} \quad [x - (1 - 3i)]$$

son factores de f. El multiplicar estos dos factores produce

$$\begin{aligned}[x - (1 + 3i)][x - (1 - 3i)] &= [(x - 1) - 3i][(x - 1) + 3i] \\ &= (x - 1)^2 - 9i^2 \\ &= x^2 - 2x + 10.\end{aligned}$$

Utilizando la división larga, puede dividir $x^2 - 2x + 10$ en f para obtener lo siguiente:

$$\begin{array}{r} x^2 - x - 6 \\ x^2 - 2x + 10 \overline{\smash{)}\, x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 60} \\ \underline{x^4 - 2x^3 + 10x^2} \\ -x^3 - 4x^2 + 2x \\ \underline{-x^3 + 2x^2 - 10x} \\ -6x^2 + 12x - 60 \\ \underline{-6x^2 + 12x - 60} \\ 0 \end{array}$$

Por lo que tiene

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 2x + 10)(x^2 - x - 6) \\ &= (x^2 - 2x + 10)(x - 3)(x + 2) \end{aligned}$$

y puede concluir que los ceros de f son $x = 1 + 3i$, $x = 1 - 3i$, $x = 3$ y $x = -2$.

PUNTO de repaso Ahora intente el Ejercicio 53.

Solución gráfica

Los ceros complejos siempre ocurren en pares conjugados, por lo que conoce que $1 - 3i$ también es un cero de f. Debido que el polinomio es un polinomio de cuarto grado, conoce que existen otros dos ceros de la función. Use una utilería de graficación para graficar

$$y = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 60$$

como se muestra en la Figura 4.4

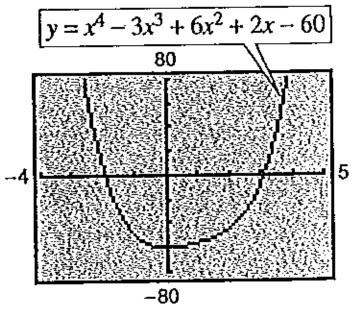


FIGURA 4.4

Puede observar que -2 y 3 parecen ser las intersecciones en x de la gráfica de la función. Use el comando *zero* o *root* o los comandos *zoom* o *trace* de la utilería de graficación para confirmar que $x = -2$ y $x = 3$ son las intersecciones en x de la gráfica. Por lo que puede concluir que los ceros de f son $x = 1 + 3i$, $x = 1 - 3i$, $x = 3$ y $x = -2$.

Ejemplo 6 Obtención de un polinomio con los ceros dados

Encuentre una función polinómica de cuarto grado con los coeficientes reales que tienen a -1, -1 y $3i$ como ceros.

Solución

Debido a que $3i$ es un cero y se enuncia que el polinomio tiene coeficientes reales, conoce que el conjugado $-3i$ también debe ser un cero. Por lo que, a partir del Teorema de la factorización lineal, $f(x)$ puede escribirse como

$$f(x) = a(x + 1)(x + 1)(x - 3i)(x + 3i).$$

Por simplicidad, sea $a = 1$ para obtener

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 9) \\ &= x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 18x + 9. \end{aligned}$$

PUNTO de repaso Ahora intente el Ejercicio 65.

Ejemplo 7 Obtención de un polinomio con los ceros dados

Encuentre una función polinómica cúbica f con los coeficientes reales que tienen a 2 y $1 - i$ como ceros, tales que $f(1) = 3$.

Solución

Debido a que $1 - i$ es un cero de f, también lo es $1 + i$. Por lo que

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - 2)[x - (1 - i)][x - (1 + i)] \\ &= a(x - 2)[(x - 1) + i][(x - 1) - i] \\ &= a(x - 2)[(x - 1)^2 - i^2] \\ &= a(x - 2)(x^2 - 2x + 2) \\ &= a(x^3 - 4x^2 + 6x - 4). \end{aligned}$$

Para encontrar el valor de a, use el hecho de que $f(1) = 3$ y obtiene

$$\begin{aligned} f(1) &= a[1^3 - 4(1)^2 + 6(1) - 4] \\ 3 &= -a \\ -3 &= a. \end{aligned}$$

Por lo que $a = -3$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(x) &= -3(x^3 - 4x^2 + 6x - 4) \\ &= -3x^3 + 12x^2 - 18x + 12. \end{aligned}$$

PUNTO de repaso Ahora intente el Ejercicio 71.

4.2 EJERCICIOS

Visite www.CalcChat.com para las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Complete los espacios.

1. El _______ _______ del _______ enuncia que si $f(x)$ es un polinomio de grado n $(n > 0)$, entonces f tiene al menos un cero en el sistema de números complejos.
2. El _______ _______ _______ enuncia que si $f(x)$ es un polinomio de grado n $(n > 0)$, entonces f tiene precisamente n factores lineales, $f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$, donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son números complejos.
3. A dos soluciones complejas de la forma $a \pm bi$ de una ecuación polinómica con coeficientes reales se les llaman _______.
4. A la expresión dentro del radical de la Fórmula cuadrática, $b^2 - 4ac$, se le llama el _______ y se le emplea para determinar los tipos de soluciones de una ecuación cuadrática.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-8, determine el número de soluciones de la ecuación en el sistema de números complejos.

5. $2x^3 + 3x + 1 = 0$
6. $x^6 + 4x^2 + 12 = 0$
7. $50 - 2x^4 = 0$
8. $14 - x + 4x^2 - 7x^5 = 0$

En los Ejercicios 9-16, use el discriminante para determinar el número de soluciones reales de la ecuación cuadrática.

9. $2x^2 - 5x + 5 = 0$
10. $2x^2 - x - 1 = 0$
11. $\frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}x - 8 = 0$
12. $\frac{1}{3}x^2 - 5x + 25 = 0$
13. $2x^2 - x - 15 = 0$
14. $-2x^2 + 11x - 2 = 0$
15. $x^2 + 2x + 10 = 0$
16. $x^2 - 4x + 53 = 0$

En los Ejercicios 17-30, resuelva la ecuación. Escriba las soluciones complejas en forma estándar.

17. $x^2 - 5 = 0$
18. $3x^2 - 1 = 0$
19. $(x + 5)^2 - 6 = 0$
20. $16 - (x - 1)^2 = 0$
21. $x^2 - 8x + 16 = 0$
22. $4x^2 + 4x + 1 = 0$
23. $x^2 + 2x + 5 = 0$
24. $54 + 16x - x^2 = 0$
25. $4x^2 - 4x + 5 = 0$
26. $4x^2 - 4x + 21 = 0$
27. $230 + 20x - 0.5x^2 = 0$
28. $125 - 30x + 0.4x^2 = 0$
29. $8 + (x + 3)^2 = 0$
30. $(x - 1)^2 + 12 = 0$

ANÁLISIS GRÁFICO Y ANALÍTICO En los Ejercicios 31-34, (a) use una utilería de graficación para graficar la función, (b) encuentre todos los ceros de la función y (c) describa la relación entre el número de ceros reales y el número de intersecciones en x de la gráfica.

31. $f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 4$
32. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$
33. $f(x) = x^4 + 4x^2 + 4$
34. $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$

En los Ejercicios 35-52, encuentre todos los ceros de la función y escriba el polinomio como un producto de factores lineales.

35. $f(x) = x^2 + 36$
36. $f(x) = x^2 - x + 56$
37. $h(x) = x^2 - 2x + 17$
38. $g(x) = x^2 + 10x + 17$
39. $f(x) = x^4 - 81$
40. $f(y) = y^4 - 256$
41. $f(z) = z^2 - 2z + 2$
42. $h(x) = x^2 - 6x - 10$
43. $g(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 9$
44. $f(x) = x^3 - 8x^2 - 12x + 96$
45. $h(x) = x^3 - 4x^2 + 16x - 64$
46. $h(x) = x^3 + 5x^2 + 2x + 10$
47. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 36x - 18$
48. $g(x) = 4x^3 + 3x^2 + 96x + 72$
49. $g(x) = x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 96x$
50. $h(x) = x^4 + x^3 + 100x^2 + 100x$
51. $f(x) = x^4 + 10x^2 + 9$
52. $f(x) = x^4 + 29x^2 + 100$

En los Ejercicios 53-62, use el cero dado para encontrar todos los ceros de la función.

	Función	*Cero*
53.	$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 50x + 75$	$5i$
54.	$f(x) = x^3 + x^2 + 9x + 9$	$3i$
55.	$f(x) = 2x^4 - x^3 + 7x^2 - 4x - 4$	$2i$
56.	$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$	i
57.	$g(x) = 4x^3 + 23x^2 + 34x - 10$	$-3 + i$
58.	$g(x) = x^3 - 7x^2 - x + 87$	$5 + 2i$
59.	$f(x) = x^3 - 2x^2 - 14x + 40$	$3 - i$
60.	$f(x) = x^3 + 4x^2 + 14x + 20$	$-1 - 3i$
61.	$f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 21x + 22$	$-3 + \sqrt{2}i$
62.	$h(x) = 3x^3 - 4x^2 + 8x + 8$	$1 - \sqrt{3}i$

En los Ejercicios 63-68, encuentre una función polinómica con los coeficientes reales que tengan los ceros dados. (Existen varias respuestas correctas.)

63. $1, 5i$
64. $4, -3i$
65. $2, 5 + i$
66. $5, 3 - 2i$
67. $\frac{2}{3}, -1, 3 + \sqrt{2}i$
68. $-5, -5, 1 + \sqrt{3}i$

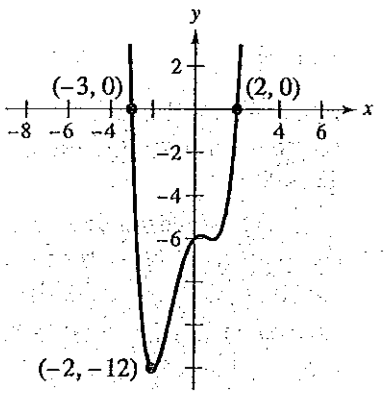
En los Ejercicios 69-74, encuentre una función polinómica cúbica f con los coeficientes reales que tengan los ceros dados y el valor de la función dada.

	Ceros	*Valor de la función*
69.	$1, 2i$	$f(-1) = 10$
70.	$2, i$	$f(-1) = 6$
71.	$-1, 2 + i$	$f(2) = -9$
72.	$-2, 1 - 2i$	$f(2) = -10$
73.	$\frac{1}{2}, 1 + \sqrt{3}i$	$f(1) = -3$
74.	$\frac{3}{2}, 2 + \sqrt{2}i$	$f(1) = -6$

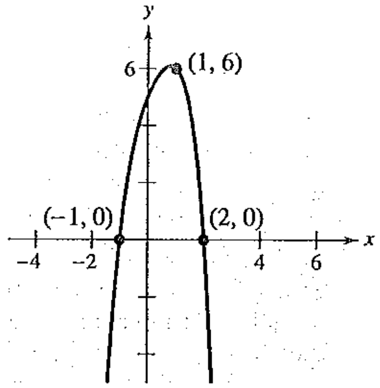
En los Ejercicios 75-80, encuentre una función polinómica f con los coeficientes reales que tengan los ceros complejos y la intersección en x dados. (Existen varias respuestas correctas.)

	Ceros complejos	*Intersección en x*
75.	$x = 4 \pm 2i$	$(-2, 0)$
76.	$x = 3 \pm i$	$(1, 0)$
77.	$x = 2 \pm \sqrt{6}i$	$(-1, 0)$
78.	$x = 2 \pm \sqrt{5}i$	$(2, 0)$
79.	$x = -1 \pm \sqrt{3}i$	$(4, 0)$
80.	$x = -3 \pm \sqrt{2}i$	$(-2, 0)$

81. Encuentre la función polinómica de cuarto grado f con los coeficientes reales que tengan los ceros $x = \pm\sqrt{2}i$ y las intersecciones en x mostradas en la gráfica.



82. Encuentre la función polinómica de cuarto grado f con los coeficientes reales que tengan los ceros $x = \pm\sqrt{5}i$ y las intersecciones en x mostradas en la gráfica.



83. **ALTURA DE UN BALÓN** Un balón es pateado hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 48 pies por segundo. La altura h (en pies) del balón está dada por $h(t) = -16t^2 + 48t$, $0 \le t \le 3$, donde t es el tiempo (en segundos).

(a) Complete la tabla para encontrar las alturas h del balón para los tiempos dados t.

t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
h							

(b) A partir de la tabla en el inciso (a), ¿aparece que el balón alcanza una altura de 64 pies?

(c) Determine de manera algebraica si el balón alcanza una altura de 64 pies.

(d) Use una utilería de graficación para graficar la función. Determine de manera gráfica si el balón alcanza una altura de 64 pies.

(e) Compare sus resultados de los incisos (b), (c) y (d).

84. **ALTURA DE UNA PELOTA DE BEISBOL** Una pelota de beisbol es lanzada hacia arriba desde una altura de 5 pies con una velocidad inicial de 79 pies por segundo. La altura h (en pies) de la pelota de beisbol está dada por $h = -16t^2 + 79t + 5$, $0 \le t \le 5$, donde t es el tiempo (en segundos).

(a) Complete la tabla para encontrar las alturas h de la pelota de beisbol para los tiempos dados t.

t	0	1	2	3	4	5
h						

(b) A partir de la tabla en el inciso (a), ¿aparece que la pelota de beisbol alcanza una altura de 110 pies?

(c) Determine de manera algebraica si la pelota de beisbol alcanza una altura de 110 pies.

(d) Use una utilería de graficación para graficar la función. Determine de manera gráfica si la pelota de beisbol alcanza una altura de 110 pies.

(e) Compare sus resultados de los incisos (b), (c) y (d).

85. **BENEFICIO** La ecuación de la demanda para un horno de microondas está dada por $p = 140 - 0.0001x$, donde p es el precio unitario (en dólares) del horno de microondas y x es el número de unidades vendidas. La ecuación del costo para el horno de microondas es $C = 80x + 150{,}000$, donde C es el costo total (en dólares) y x es el número de unidades producidas. El beneficio total P obtenido por producir y vender x unidades es $P = xp - C$. Está trabajando en el departamento de mercadotecnia de la compañía y se le ha pedido que determine lo siguiente:
   (a) La función del beneficio.
   (b) El beneficio cuando se venden 250,000 unidades.
   (c) El precio unitario cuando se venden 250,000 unidades.
   (d) Si es posible, el precio unitario que dará un beneficio de 10 millones de dólares.

86. **ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN: VENTAS** En la tabla se muestran las ventas S (en miles de millones de dólares) para Texas Instruments, Inc., para los años del 2003 al 2008. (Fuente: Texas Instruments, Inc.)

Año	Ventas, S
2003	9.8
2004	12.6
2005	13.4
2006	14.3
2007	13.8
2008	12.5

   (a) Use el comando *regression* de una utilería de graficación para encontrar el modelo cuadrático para la información. t representa el año, con $t = 3$ correspondiendo al 2003.
   (b) Use una utilería de graficación para graficar el modelo que encontró en el inciso (a).
   (c) Use su gráfica del inciso (b) para determinar el año en el que las ventas alcanzaron los $15 mil millones. ¿Es esto posible?
   (d) Determine de manera algebraica el año en el que las ventas alcanzan los $15 mil millones. Explique.

EXPLORACIÓN

¿FALSO O VERDADERO? En los Ejercicios 87 y 88, determine si el enunciado es falso o verdadero. Justifique su respuesta.

87. Es posible que una función polinómica de tercer grado con coeficientes enteros no tenga ceros reales.

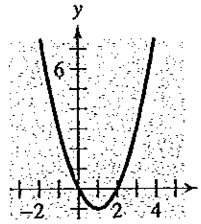
88. Si $x = -i$ es un cero de la función dada por

   $f(x) = x^3 + ix^2 + ix - 1$

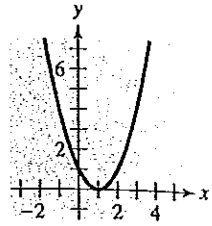
   entonces $x = i$ debe también ser un cero de f.

89. A partir de cada gráfica, ¿puede decir si el discriminante es positivo, igual a cero o negativo? Explique su razonamiento. Encuentre cada discriminante para verificar sus respuestas.

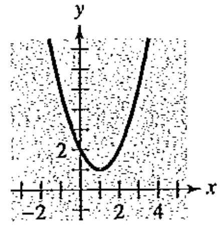
   (a) $x^2 - 2x = 0$



   (b) $x^2 - 2x + 1 = 0$



   (c) $x^2 - 2x + 2 = 0$



   ¿Cuántas soluciones tendría el inciso (c) si el término lineal fuera $2x$? ¿Si la constante fuera -2?

90. **TOQUE FINAL** Escriba un párrafo que explique las relaciones entre las soluciones de una ecuación polinómica, los ceros de una función polinómica y las intersecciones en x de la gráfica de una función polinómica. Incluya ejemplos en su párrafo.

PIENSE EN ELLO En los Ejercicios 91-96, determine (si es posible) los ceros de la función g si la función f tiene ceros en $x = r_1, x = r_2$ y $x = r_3$.

91. $g(x) = -f(x)$
92. $g(x) = 3f(x)$
93. $g(x) = f(x - 5)$
94. $g(x) = f(2x)$
95. $g(x) = 3 + f(x)$
96. $g(x) = f(-x)$

97. Encuentre una función cuadrática f (con coeficientes enteros) que tenga a $\pm\sqrt{b}\,i$ como ceros. Asuma que b es un entero positivo.

98. Encuentre una función cuadrática f (con coeficientes enteros) que tenga a $a \pm bi$ como ceros. Asuma que b es un entero positivo y que a es un entero diferente a cero.

PROYECTO: OPORTUNIDAD DE MATRICULACIÓN Para trabajar una aplicación extendida que analiza la Oportunidad de matriculación en Estados Unidos de 1988 al 2007, visite el sitio web de este libro en *academic. cengage. com.* (Fuente de la información: U. S. Department of Health and Human Services)

4.3 FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Lo que debe aprender

- Graficar números complejos en el plano complejo y encontrar valores absolutos de números complejos.
- Escribir las formas trigonométricas de números complejos.
- Multiplicar y dividir números complejos escritos en forma trigonométrica.

Por qué debe aprenderlo

Puede desarrollar las operaciones de multiplicación y división en números complejos aprendiendo a escribir los números complejos en forma trigonométrica. Por ejemplo, en los Ejercicios 63-70 en la página 359, puede multiplicar y dividir números complejos en forma trigonométrica y en forma estándar.

Plano complejo

Al igual que los números reales pueden representarse por medio de puntos en la línea de números reales, puede representarse un número complejo

$$z = a + bi$$

como el punto (a, b) en un plano coordenado (**plano complejo**). Al eje horizontal se le llama **eje real** y al eje vertical se le llama **eje imaginario**, como se muestra en la Figura 4.5.

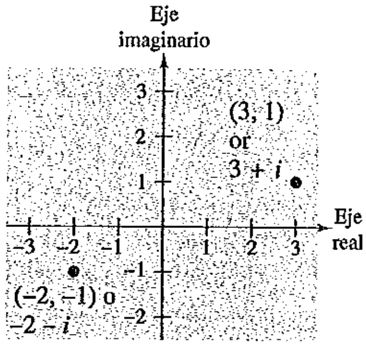


FIGURA 4.5

El **módulo** del número complejo $a + bi$ se define como la distancia entre el origen $(0, 0)$ y el punto (a, b).

Definición del módulo de un número complejo

El **módulo** del número complejo $z = a + bi$ es

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si el número complejo $a + bi$ es un número real (es decir, si $b = 0$), entonces esta definición concuerda con la dada para el valor absoluto de un número real

$$|a + 0i| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|.$$

Ejemplo 1 Obtención del módulo de un número complejo

Grafique $z = -2 + 5i$ y encuentre su módulo.

Solución

En la Figura 4.6 se grafica el número complejo z. Tiene un módulo de

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2}$$
$$= \sqrt{29}.$$

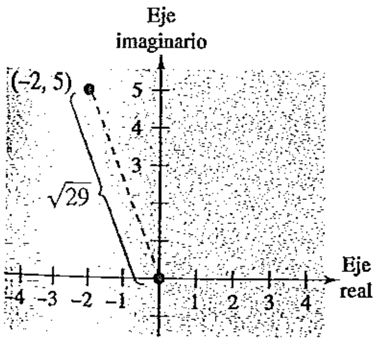


FIGURA 4.6

PUNTO de repaso Ahora intente el Ejercicio 9.

Forma trigonométrica de un número complejo

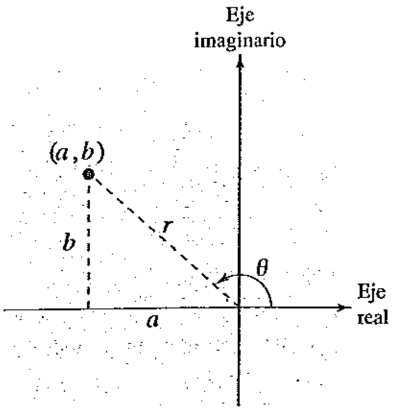


FIGURA 4.7

En la Sección 4.1, aprendió cómo sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos. Para trabajar de manera efectiva con *potencias* y *raíces* de números complejos, es de utilidad escribir los números complejos en forma trigonométrica. En la Figura 4.7, considere el número complejo no cero $a + bi$. Dejando que θ sea el ángulo desde el eje real positivo (medido en sentido contrario a las manecillas del reloj) al segmento de línea que conecta el origen y el punto (a, b) puede escribir

$$a = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad b = r\,\text{sen}\,\theta$$

donde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. En consecuencia, tiene

$$a + bi = (r\cos\theta) + (r\,\text{sen}\,\theta)i$$

a partir de la cual puede obtener la **forma trigonométrica de un número complejo.**

Forma trigonométrica de un número complejo

La **forma trigonométrica** del número complejo $z = a + bi$ es

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

donde $a = r\cos\theta$, $b = r\,\text{sen}\,\theta$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, y $\tan\theta = b/a$. El número r es el **módulo** de z y a θ se le llama **argumento** de z.

A la forma trigonométrica de un número complejo también se le llama *forma polar*. Debido a que existen infinitamente varias elecciones para θ, la forma trigonométrica de un número complejo no es única. Por lo general, θ se restringe al intervalo $0 \le \theta < 2\pi$, aunque en ocasiones es conveniente utilizar $\theta < 0$.

Ejemplo 2 Representación de un número complejo en forma trigonométrica

Exprese el número complejo $z = -2 - 2\sqrt{3}i$ en forma trigonométrica.

Solución

El módulo de z es

$$r = \left|-2 - 2\sqrt{3}i\right| = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$$

y el ángulo de referencia θ' está dado por

$$\tan\theta' = \frac{b}{a} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}.$$

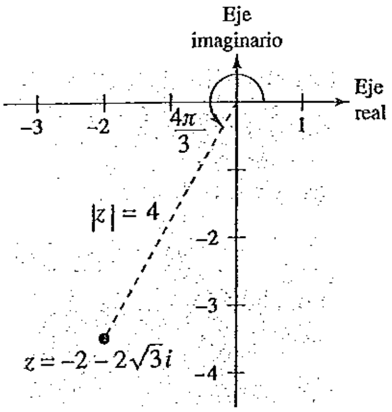


FIGURA 4.8

Debido a que $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$ y debido a que $z = -2 - 2\sqrt{3}i$ se encuentra en el Cuadrante III, elija a θ como $\theta = \pi + \pi/3 = 4\pi/3$. Por lo que la forma trigonométrica es

$$\begin{aligned} z &= r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \\ &= 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Vea la Figura 4.8.

PUNTO de reposo Ahora intente el Ejercicio 17. 1

Ejemplo 3 Representación de un número complejo en forma trigonométrica

Exprese el número complejo en forma trigonométrica.

$$z = 6 + 2i$$

Solución

El módulo de z es

$$\begin{aligned} r &= |6 + 2i| \\ &= \sqrt{6^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{40} \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

y el ángulo θ es

$$\tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Debido a que $z = 6 + 2i$ está en el Cuadrante I, puede concluir que

$$\theta = \arctan \frac{1}{3} \approx 0.32175 \text{ radián} \approx 18.4°.$$

Por lo que la forma trigonométrica de z es

$$\begin{aligned} z &= r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \\ &= 2\sqrt{10}\left[\cos\left(\arctan \frac{1}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\arctan \frac{1}{3}\right)\right] \\ &\approx 2\sqrt{10}(\cos 18.4° + i \operatorname{sen} 18.4°). \end{aligned}$$

En la Figura 4.9 se ilustra este resultado.

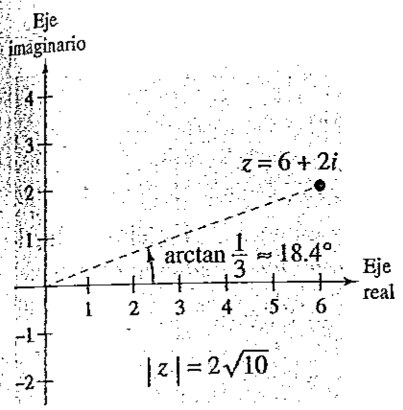


FIGURA 4.9

PUNTO de repaso Ahora intente el Ejercicio 23.

Ejemplo 4 Representación de un número complejo en forma estándar

Exprese el número complejo en forma estándar $a + bi$.

$$z = \sqrt{8}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

Solución

Debido a que $\cos(-\pi/3) = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen}(-\pi/3) = -\sqrt{3}/2$, puede escribir

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{8}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= \sqrt{2} - \sqrt{6}i. \end{aligned}$$

PUNTO de repaso Ahora intente el Ejercicio 37.

TECNOLOGÍA

Puede emplear una utilería de graficación para convertir un número complejo en forma trigonométrica (o polar) a la forma estándar. Para la secuencia de comandos, vea el manual de usuario de su utilería de graficación.

Multiplicación y división de números complejos

La forma trigonométrica se adapta bien a la multiplicación y división de números complejos. Suponga que se le dan dos números complejos

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \quad \text{y} \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2).$$

El producto de z_1 y z_2 está dado por

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)]. \end{aligned}$$

Utilizando las fórmulas de suma y resta para el coseno y el seno, puede escribir esta ecuación como

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)].$$

Esto establece la primera parte de la siguiente regla. La segunda parte se deja para que usted la verifique (vea el Ejercicio 83).

Producto y cociente de dos números complejos

Sean $z_1 = r_1r_2(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ y $z_2 = r_1r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$ números complejos.

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \qquad \text{Producto}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)], \quad z_2 \neq 0 \qquad \text{Cociente}$$

Observe que esta regla indica que al *multiplicar* dos números complejos multiplique los módulos y sume los argumentos, mientras que al *dividir* dos números complejos divida los módulos y reste los argumentos.

Ejemplo 5 División de números complejos

Encuentre el cociente z_1/z_2 de los números complejos.

$$z_1 = 24(\cos 300° + i\,\text{sen}\,300°) \qquad z_2 = 8(\cos 75° + i\,\text{sen}\,75°)$$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{24(\cos 300° + i\,\text{sen}\,300°)}{8(\cos 75° + i\,\text{sen}\,75°)} \\ &= \frac{24}{8}[\cos(300° - 75°) + i\,\text{sen}(300° - 75°)] \\ &= 3(\cos 225° + i\,\text{sen}\,225°) \\ &= 3\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Dividir los módulos y restar los argumentos.

PUNTO de repaso Ahora intente el Ejercicio 57.

Ejemplo 6 Multiplicación de números complejos

Encuentre el producto z_1z_2 de los números complejos.

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right) \qquad z_2 = 8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right)$$

Solución

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)\cdot 8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right)\\
&= 16\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{11\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{11\pi}{6}\right)\right] &&\text{Multiplicar los módulos y sumar los argumentos.}\\
&= 16\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{2}\right)\\
&= 16\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)\\
&= 16[0 + i(1)]\\
&= 16i
\end{aligned}$$

TECNOLOGÍA

Algunas utilerías de graficación pueden multiplicar y dividir números complejos en forma trigonométrica. Si tiene acceso a tal utilería de graficación, úsela para encontrar z_1/z_2 y z_1z_2 en los Ejemplos 5 y 6.

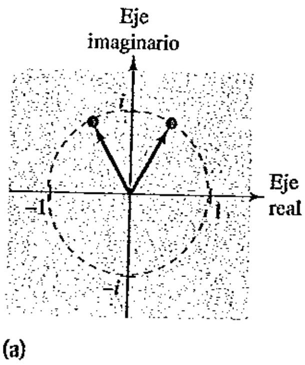
PUNTO de repaso Ahora intente el Ejercicio 51.

Puede comprobar el resultado en el Ejemplo 6 convirtiendo primero los números complejos a las formas estándar $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ y $z_2 = 4\sqrt{3} - 4i$ y después multiplicando de manera algebraica, como en la Sección 4.1.

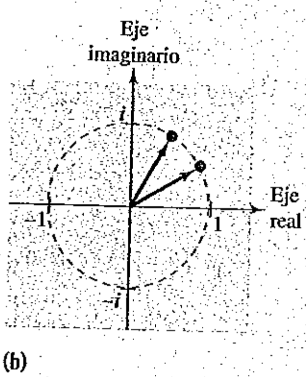
$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= \left(-1 + \sqrt{3}i\right)\left(4\sqrt{3} - 4i\right)\\
&= -4\sqrt{3} + 4i + 12i + 4\sqrt{3}\\
&= 16i
\end{aligned}$$

Discusión en el salón de clases

Multiplicación de números complejos de manera gráfica Explique cómo puede aproximar de manera gráfica el producto de los números complejos. Después, aproxime los valores de los productos y compruebe sus respuestas de manera analítica



(a)



(b)

4.3 EJERCICIOS

Visite www.CalcChat.com para las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Complete los espacios.

1. En el plano complejo, al eje horizontal se le llama eje ________ y al eje vertical se le llama eje ________.
2. El ________ ________ de un número complejo $a + bi$ es la distancia entre el origen (0, 0) y el punto (a, b).
3. El ________ ________ de un número complejo $z = a + bi$ está dado por $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, donde r es el ________ de z y θ es el ________ de z.
4. Sean $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$ números complejos, entonces el producto $z_1z_2 =$ ________ y el cociente $z_1/z_2 =$ ________ $(z_2 \neq 0)$.

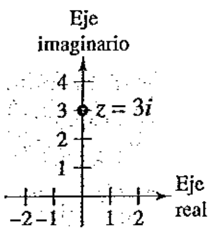
HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-10, grafique el número complejo y encuentre su módulo

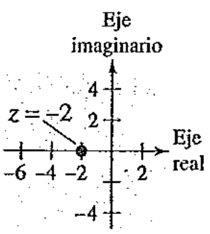
5. $-6 + 8i$
6. $5 - 12i$
7. $-7i$
8. -7
9. $4 - 6i$
10. $-8 + 3i$

En los Ejercicios 11-14, escriba el número complejo en forma trigonométrica.

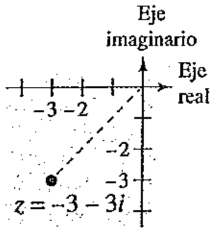
11.



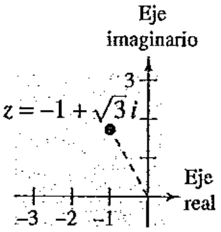
12.



13.



14.



En los Ejercicios 15-34, represente el número complejo de manera gráfica y encuentre la forma trigonométrica del número.

15. $1 + i$
16. $5 - 5i$
17. $1 - \sqrt{3}i$
18. $4 - 4\sqrt{3}i$
19. $-2(1 + \sqrt{3}i)$
20. $\frac{5}{2}(\sqrt{3} - i)$
21. $-5i$
22. $12i$
23. $-7 + 4i$
24. $3 - i$
25. 2
26. 4
27. $3 + \sqrt{3}i$
28. $2\sqrt{2} - i$
29. $-3 - i$
30. $1 + 3i$
31. $5 + 2i$
32. $8 + 3i$
33. $-8 - 5\sqrt{3}i$
34. $-9 - 2\sqrt{10}i$

En los Ejercicios 35-44, encuentre la forma estándar del número complejo. Después represente el número complejo de manera gráfica.

35. $2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$
36. $5(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$
37. $\sqrt{48}[\cos(-30°) + i \operatorname{sen}(-30°)]$
38. $\sqrt{8}(\cos 225° + i \operatorname{sen} 225°)$
39. $\frac{9}{4}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$
40. $6\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}\right)$
41. $7(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$
42. $8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$
43. $5[\cos(198° 45') + i \operatorname{sen}(198° 45')]$
44. $9.75[\cos(280° 30') + i \operatorname{sen}(280° 30')]$

En los Ejercicios 45-48, use una utilería de graficación para representar el número complejo en forma estándar.

45. $5\left(\cos\frac{\pi}{9} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{9}\right)$
46. $10\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}\right)$
47. $2(\cos 155° + i \operatorname{sen} 155°)$
48. $9(\cos 58° + i \operatorname{sen} 58°)$

En los Ejercicios 49 y 50, represente las potencias z, z^2, z^3 y z^4 de manera gráfica. Describa el patrón.

49. $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$
50. $z = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$

En los Ejercicios 51-62, desarrolle la ecuación y deje el resultado en forma trigonométrica.

51. $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[6\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)\right]$

52. $\left[\frac{3}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)\right]\left[4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

53. $\left[\frac{5}{3}(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)\right]\left[\frac{2}{3}(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)\right]$

54. $\left[\frac{1}{2}(\cos 100° + i \operatorname{sen} 100°)\right]\left[\frac{4}{5}(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°)\right]$

55. $(\cos 80° + i \operatorname{sen} 80°)(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°)$

56. $(\cos 5° + i \operatorname{sen} 5°)(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)$

57. $\dfrac{3(\cos 50° + i \operatorname{sen} 50°)}{9(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)}$

58. $\dfrac{\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°}{2(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)}$

59. $\dfrac{\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi}{\cos(\pi/3) + i \operatorname{sen}(\pi/3)}$

60. $\dfrac{5(\cos 4.3 + i \operatorname{sen} 4.3)}{4(\cos 2.1 + i \operatorname{sen} 2.1)}$

61. $\dfrac{12(\cos 92° + i \operatorname{sen} 92°)}{2(\cos 122° + i \operatorname{sen} 122°)}$

62. $\dfrac{6(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)}{7(\cos 100° + i \operatorname{sen} 100°)}$

En los Ejercicios 63-70, (a) escriba las formas trigonométricas de los números complejos, (b) desarrolle la operación indicada utilizando las formas trigonométricas y (c) desarrolle la operación indicada utilizando las formas estándar y compruebe su resultado con el del inciso (b).

63. $(2 + 2i)(1 - i)$

64. $(\sqrt{3} + i)(1 + i)$

65. $-2i(1 + i)$

66. $3i(1 - \sqrt{2}i)$

67. $\dfrac{3 + 4i}{1 - \sqrt{3}i}$

68. $\dfrac{1 + \sqrt{3}i}{6 - 3i}$

69. $\dfrac{5}{2 + 3i}$

70. $\dfrac{4i}{-4 + 2i}$

En los Ejercicios 71-74, dibuje la gráfica de todos los números complejos z que satisfacen la condición dada.

71. $|z| = 2$

72. $|z| = 3$

73. $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

74. $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$

INGENIERÍA ELÉCTRICA En los Ejercicios 75-80, use la fórmula para encontrar la cantidad faltante para las condiciones dadas. La fórmula

$$E = I \cdot Z$$

donde E representa el voltaje, I representa la corriente y Z representa la impedancia (una medida de la oposición a una corriente eléctrica sinusoidal), se emplea en la ingeniería eléctrica. Cada variable es un número complejo.

75. $I = 10 + 2i$, $Z = 4 + 3i$

76. $I = 12 + 2i$, $Z = 3 + 5i$

77. $I = 2 + 4i$, $E = 5 + 5i$

78. $I = 10 + 2i$, $E = 4 + 5i$

79. $E = 12 + 24i$, $Z = 12 + 20i$

80. $E = 15 + 12i$, $Z = 25 + 24i$

EXPLORACIÓN

¿FALSO O VERDADERO? En los Ejercicios 81 y 82, determine si el enunciado es falso o verdadero. Justifique su respuesta.

81. Aunque el cuadrado del número complejo bi está dado por $(bi)^2 = -b^2$, el módulo del número complejo $z = a + bi$ se define como

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

82. El producto de dos números complejos

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$$

y

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

es igual a cero sólo cuando $r_1 = 0$ y/o $r_2 = 0$.

83. Dados dos números complejos $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$, $z_2 \neq 0$, muestre que

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)].$$

Muestre que $\bar{z} = r[\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)]$ es el conjugado complejo de $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$.

85. Use las formas trigonométricas de z y $\bar{z}$ en el Ejercicio 84 para encontrar (a) $z\bar{z}$ y (b) $z/\bar{z}$, $\bar{z} \neq 0$.

86. **TOQUE FINAL** Dados dos números complejos z_1 y z_2, explique las ventajas y desventajas de emplear las formas trigonométricas de estos números (contra las formas estándar) cuando se desarrollan las siguientes operaciones.

(a) $z_1 + z_2$ (b) $z_1 - z_2$

(c) $z_1 \cdot z_2$ (d) z_1/z_2

4.4 TEOREMA DE DEMOIVRE

Lo que debe aprender

- Usar el Teorema de DeMoivre para encontrar potencias de números complejos.
- Encontrar las raíces n-ésimas de números complejos.

Por qué debe aprenderlo

Puede emplear la forma trigonométrica de un número complejo para desarrollar operaciones con números complejos. Por ejemplo, en los Ejercicios 55-70 en la página 365, puede usar las formas trigonométricas de números complejos para ayudarle a resolver ecuaciones polinómicas.

Potencias de números complejos

Se utiliza la forma trigonométrica de un número complejo para elevar un número complejo a una potencia. Para lograr esto, considere el uso repetido de la regla de multiplicación.

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$
$$z^2 = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = r^2(\cos 2\theta + i\operatorname{sen} 2\theta)$$
$$z^3 = r^2(\cos 2\theta + i\operatorname{sen} 2\theta)r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = r^3(\cos 3\theta + i\operatorname{sen} 3\theta)$$
$$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i\operatorname{sen} 4\theta)$$
$$z^5 = r^5(\cos 5\theta + i\operatorname{sen} 5\theta)$$
$$\vdots$$

Este patrón conduce al Teorema de DeMoivre, el cual se nombra en honor al matemático francés Abraham DeMoivre (1667-1754).

Teorema de DeMoivre

Si $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ es un número complejo y n es un entero positivo, entonces

$$\begin{aligned} z^n &= [r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]^n \\ &= r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta). \end{aligned}$$

Ejemplo 1 Obtención de una potencia de un número complejo

Use el Teorema de DeMoivre para encontrar $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{12}$.

Solución

Primero convierta el número complejo a la forma trigonométrica utilizando

$$r = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2 \quad \text{y} \quad \theta = \arctan\frac{\sqrt{3}}{-1} = \frac{2\pi}{3}.$$

Por lo que la forma trigonométrica es

$$z = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right).$$

Entonces, por medio del Teorema de DeMoivre tiene

$$\begin{aligned} \left(-1+\sqrt{3}i\right)^{12} &= \left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{12} \\ &= 2^{12}\left[\cos\frac{12(2\pi)}{3} + i\operatorname{sen}\frac{12(2\pi)}{3}\right] \\ &= 4096(\cos 8\pi + i\operatorname{sen} 8\pi) \\ &= 4096(1+0) \\ &= 4096. \end{aligned}$$

PUNTO de repaso Ahora intente el Ejercicio 5.

NOTA HISTÓRICA

Abraham DeMoivre (1667-1754) es recordado por su trabajo en la teoría de la probabilidad y por el Teorema de DeMoivre. Su libro *The Doctrine of Chances* (publicado en 1718) incluye la teoría de las series recurrentes y la teoría de las fracciones parciales.

Raíces de números complejos

Recuerde que una consecuencia del Teorema fundamental del álgebra es que una ecuación polinómica de grado n tiene n soluciones en el sistema de números complejos. Por lo que la ecuación $x^6 = 1$ tiene seis soluciones y en este caso particular puede encontrar las seis soluciones factorizando y empleando la Fórmula cuadrática

$$\begin{aligned} x^6 - 1 &= (x^3 - 1)(x^3 + 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, las soluciones son

$$x = \pm 1, \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \qquad \text{y} \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

Cada uno de estos números es una raíz sexta de 1. En general, una **raíz n-ésima de un número complejo** se define como a continuación.

Definición de una raíz n-ésima de un número complejo

El número complejo $u = a + bi$ es una **raíz n-ésima** del número complejo z si

$$z = u^n = (a + bi)^n.$$

Para encontrar una fórmula para una raíz n-ésima de un número complejo, sea u una raíz n-ésima de z, donde

$$u = s(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$$

y

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Por medio del Teorema de DeMoivre y el hecho de que $u^n = z$, tiene

$$s^n(\cos n\beta + i \operatorname{sen} n\beta) = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Al tomar el módulo de cada lado de esta ecuación, se tiene que $s^n = r$. Al sustituir de vuelta en la ecuación previa y dividiendo entre r, obtiene

$$\cos n\beta + i \operatorname{sen} n\beta = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

Por lo que se tiene que

$$\cos n\beta = \cos \theta \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} n\beta = \operatorname{sen} \theta.$$

Debido a que el seno y el coseno tienen un periodo de 2π, estas dos últimas ecuaciones tienen soluciones si y sólo si los ángulos difieren por un múltiplo de 2π. En consecuencia, debe existir un entero k tal que

$$n\beta = \theta + 2\pi k$$

$$\beta = \frac{\theta + 2\pi k}{n}.$$

Al sustituir este valor de β en la forma trigonométrica de u, obtiene el resultado enunciado en la siguiente página.

Determinación de las raíces n-ésimas de un número complejo

Para un entero positivo n, el número complejo $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ tiene exactamente n raíces n-ésimas distintas dadas por

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

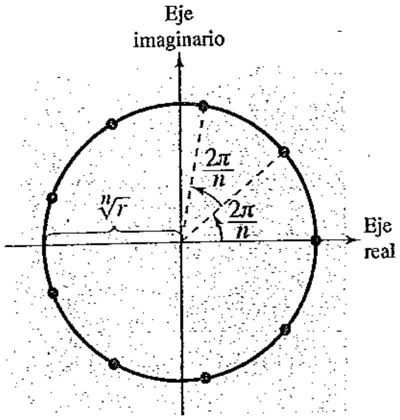


FIGURA 4.10

Cuando k excede $n - 1$, las raíces comienzan a repetirse. Por ejemplo, si $k = n$, el ángulo

$$\frac{\theta + 2\pi n}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$$

es coterminal con θ/n, lo cual se obtiene cuando $k = 0$.

La fórmula para las raíces n-ésimas de un número complejo z tiene una buena interpretación geométrica, como se muestra en la Figura 4.10. Observe que debido a que las raíces n-ésimas de z tienen la misma magnitud $\sqrt[n]{r}$, se encuentran en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ con centro en el origen. Además, debido a que las raíces n-ésimas sucesivas tienen argumentos que difieren por $2\pi/n$, las n-raíces están igualmente espaciadas sobre la circunferencia.

Ya ha encontrado las raíces sextas de 1 factorizando y utilizando la Fórmula cuadrática. El Ejemplo 2 muestra cómo puede resolver el mismo problema con la fórmula para las raíces n-ésimas.

Ejemplo 2 Hallar las raíces n-ésimas de un número real

Encuentre las seis raíces sextas de 1.

Solución

Primero escriba 1 en la forma trigonométrica $1 = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$. Después, por medio de la fórmula de las raíces n-ésimas, con $n = 6$ y $r = 1$, las raíces tienen la forma

$$\sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{0 + 2\pi k}{6} + i \operatorname{sen}\frac{0 + 2\pi k}{6}\right) = \cos\frac{\pi k}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi k}{3}.$$

Así, para $k = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5, las raíces sextas son las siguientes. (Vea la Figura 4.11.)

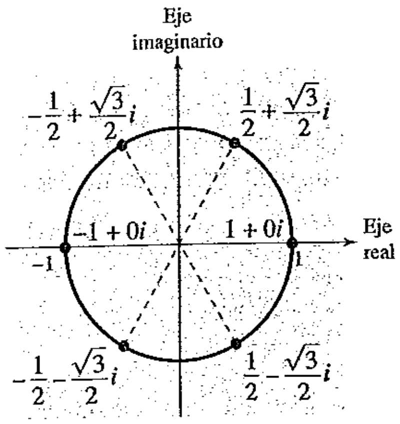


FIGURA 4.11

$$\cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$$

$$\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \text{Incrementar por } \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\cos\frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

PUNTO de repaso Ahora intente el Ejercicio 47.

En la Figura 4.11, observe que las raíces obtenidas en el Ejemplo 2 tienen una magnitud de 1 y están igualmente espaciadas alrededor del círculo unitario. También observe que las raíces complejas ocurren en pares conjugados, como se explicó en la Sección 4.2. A las n distintas raíces n-ésimas de 1 se les llaman **raíces n-ésimas de la unidad.**

Ejemplo 3 Hallar las raíces n-ésimas de un número complejo

Encuentre las tres raíces cúbicas de $z = -2 + 2i$.

Solución

Debido a que z se encuentra en el Cuadrante II, la forma trigonométrica de z es

$$z = -2 + 2i$$
$$= \sqrt{8}\,(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°). \qquad \theta = \arctan\left(\frac{2}{-2}\right) = 135°$$

Por medio de la fórmula de las raíces n-ésimas, las raíces cúbicas tienen la forma

$$\sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{135° + 360°k}{3} + i \operatorname{sen}\frac{135° + 360°k}{3}\right).$$

Por último, para $k = 0$, 1 y 2 obtiene las raíces

$$\sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{135° + 360°(0)}{3} + i \operatorname{sen}\frac{135° + 360°(0)}{3}\right) = \sqrt{2}(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$$
$$= 1 + i$$

$$\sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{135° + 360°(1)}{3} + i \operatorname{sen}\frac{135° + 360°(1)}{3}\right) = \sqrt{2}(\cos 165° + i \operatorname{sen} 165°)$$
$$\approx -1.3660 + 0.3660i$$

$$\sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{135° + 360°(2)}{3} + i \operatorname{sen}\frac{135° + 360°(2)}{3}\right) = \sqrt{2}(\cos 285° + i \operatorname{sen} 285°)$$
$$\approx 0.3660 - 1.3660i.$$

Vea la Figura 4.12.

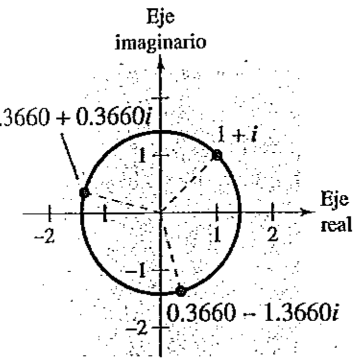


FIGURA 4.12

PUNTO de repaso Ahora intente el Ejercicio 53.

Discusión en el salón de clases

Una fórmula matemática famosa A la fórmula famosa

$$e^{a+bi} = e^{a}(\cos b + i \operatorname{sen} b)$$

se le llama Fórmula de Euler, en honor al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783). Aunque la interpretación de la fórmula está más allá del alcance de este libro, se decidió incluirla debido a que da origen a una de las ecuaciones más maravillosas en las matemáticas.

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Esta ecuación elegante relaciona los cinco números más famosos en las matemáticas —0, 1, π, e e i— en una sola ecuación (a e se le llama base natural y se explica en la Sección 5.1). Muestre cómo puede emplearse la Fórmula de Euler para derivar esta ecuación.

Tip de estudio

Observe en el Ejemplo 3 que el módulo de z es

$$r = |-2 + 2i|$$
$$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2}$$
$$= \sqrt{8}$$

y el ángulo θ está dado por

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{2}{-2} = -1.$$

4.4 EJERCICIOS

Visite www.CalcChat.com para las soluciones a los ejercicios impares.

VOCABULARIO: Complete los espacios.

1. El Teorema de __________ enuncia que si $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ es un número complejo y n es un entero positivo, entonces $z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$.
2. El número complejo $u = a + bi$ es una __________ __________ del número complejo z si $z = u^n = (a + bi)^n$.
3. Para un entero positivo n, el número complejo $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ tiene exactamente n raíces n-ésimas distintas dadas por __________ donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.
4. A las n raíces n-ésimas distintas de 1 se les llama raíces n-ésimas de la __________.

HABILIDADES Y APLICACIONES

En los Ejercicios 5-28, use el Teorema de DeMoivre para encontrar la potencia indicada del número complejo. Escriba el resultado en forma estándar.

5. $(1 + i)^5$
6. $(2 + 2i)^6$
7. $(-1 + i)^6$
8. $(3 - 2i)^8$
9. $2(\sqrt{3} + i)^{10}$
10. $4(1 - \sqrt{3}i)^3$
11. $[5(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)]^3$
12. $[3(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)]^4$
13. $\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)^{12}$
14. $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)\right]^8$
15. $[5(\cos 3.2 + i \operatorname{sen} 3.2)]^4$
16. $(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)^{20}$
17. $(3 - 2i)^5$
18. $(2 + 5i)^6$
19. $(\sqrt{5} - 4i)^3$
20. $(\sqrt{3} + 2i)^4$
21. $[3(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°)]^4$
22. $[2(\cos 10° + i \operatorname{sen} 10°)]^8$
23. $[5(\cos 95° + i \operatorname{sen} 95°)]^3$
24. $[4(\cos 110° + i \operatorname{sen} 110°)]^4$
25. $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{10} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{10}\right)\right]^5$
26. $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\right)\right]^6$
27. $\left[3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)\right]^3$
28. $\left[3\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)\right]^5$

En los Ejercicios 29-36, encuentre las raíces cuadradas del número complejo.

29. $2i$
30. $5i$
31. $-3i$
32. $-6i$
33. $2 - 2i$
34. $2 + 2i$
35. $1 + \sqrt{3}i$
36. $1 - \sqrt{3}i$

En los Ejercicios 37-54, (a) use el teorema en la página 362 para encontrar las raíces indicadas del número complejo, (b) representar cada una de las raíces de manera gráfica y (c) escribir cada una de las raíces en forma estándar.

37. Raíces cuadradas de $5(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$
38. Raíces cuadradas de $16(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$
39. Raíces cúbicas de $8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$
40. Raíces cúbicas de $64\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$
41. Raíces quintas de $243\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$
42. Raíces quintas de $32\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$
43. Raíces cuartas de $81i$
44. Raíces cuartas de $625i$
45. Raíces cúbicas de $-\frac{125}{2}(1 + \sqrt{3}i)$
46. Raíces cúbicas de $-4\sqrt{2}(-1 + i)$
47. Raíces cuartas de 16
48. Raíces cuartas de i
49. Raíces quintas de 1
50. Raíces cúbicas de 1000
51. Raíces cúbicas de -125
52. Raíces cuartas de -4
53. Raíces quintas de $4(1 - i)$
54. Raíces sextas de $64i$

En los Ejercicios 55-70, use el teorema en la página 362 para encontrar todas las soluciones de la ecuación y represente las soluciones de manera gráfica.

55. $x^4 + i = 0$
56. $x^3 - i = 0$
57. $x^6 + 1 = 0$
58. $x^3 + 1 = 0$
59. $x^5 + 243 = 0$
60. $x^3 + 125 = 0$
61. $x^3 - 64 = 0$
62. $x^3 - 27 = 0$
63. $x^4 + 16i = 0$
64. $x^3 + 27i = 0$
65. $x^4 - 16i = 0$
66. $x^6 + 64i = 0$
67. $x^3 - (1 - i) = 0$
68. $x^5 - (1 - i) = 0$
69. $x^6 + (1 + i) = 0$
70. $x^4 + (1 + i) = 0$

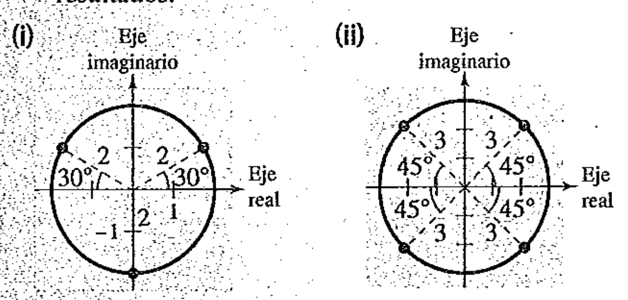
EXPLORACIÓN

¿FALSO O VERDADERO? En los Ejercicios 71-73, determine si el enunciado es falso o verdadero. Justifique su respuesta.

71. De manera geométrica, las raíces n-ésimas de cualquier número complejo z están todas igualmente espaciadas sobre la circunferencia unitaria centrada en el origen.
72. Por medio del Teorema de DeMoivre,
$$\left(4 + \sqrt{6}i\right)^8 = \cos(32) + i\,\text{sen}\left(8\sqrt{6}\right).$$
73. $\sqrt{3} + i$ es una solución de la ecuación $x^2 - 8i = 0$.

74. **PIENSE EN ELLO** Explique cómo puede emplear el Teorema de DeMoivre para resolver la ecuación polinómica $x^4 + 16 = 0$. [*Sugerencia*: Escriba -16 como $16(\cos \pi + i \text{ sen } \pi)$.]
75. Muestre que $\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}i\right)$ es una raíz novena de -1.
76. Muestre que $2^{-1/4}(1 - i)$ es una raíz cuarta de -2.
77. Use la Fórmula cuadrática y, si es necesario, el teorema en la página 362 para resolver cada ecuación.
   (a) $x^2 + ix + 2 = 0$
   (b) $x^2 + 2ix + 1 = 0$
   (c) $x^2 + 2ix + \sqrt{3}i = 0$

78. **TOQUE FINAL** Use la gráfica de las raíces de un número complejo.
   (a) Escriba cada una de las raíces en forma trigonométrica.
   (b) Identifique el número complejo cuyas raíces se dan. Use una utilería de graficación para verificar sus resultados.

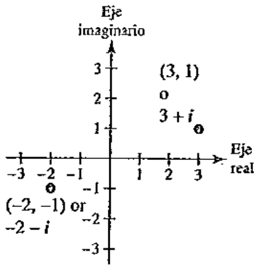


En los Ejercicios 79 y 80, (a) muestre que el valor dado de x es una solución de la ecuación cuadrática, (b) encuentre la otra solución y escríbala en forma trigonométrica, (c) explique cómo obtuvo su respuesta al inciso (b) y (d) muestre que la solución en el inciso (b) satisface la ecuación cuadrática.

79. $x^2 - 4x + 8 = 0; x = 2\sqrt{2}(\cos 45° + i \text{ sen } 45°)$
80. $x^2 + 2x + 4 = 0; x = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \text{ sen}\frac{2\pi}{3}\right)$
81. Muestre que $2\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i \text{ sen}\frac{2\pi}{5}\right)$ es una raíz quinta de 32. Después encuentre las otras raíces quintas de 32 y verifique sus resultados.
82. Muestre que $\sqrt{2}(\cos 7.5° + i \text{ sen } 7.5°)$ es una raíz cuarta de $2\sqrt{3} + 2i$. Después encuentre las otras raíces cuartas de $2\sqrt{3} + 2i$, y verifique sus resultados.

4 Resumen del capítulo

	¿Qué aprendió?	Explicación/Ejemplos	Ejercicios de repaso
Sección 4.1	Usar la unidad imaginaria i para escribir números complejos (*p. 338*).	Si a y b son números reales, el número $a + bi$ es un número complejo y se dice que está escrito en forma estándar. **Igualdad de números complejos** Los números complejos $a + bi$ y $c + di$, escritos en forma estándar, son iguales entre sí; $a + bi = c + di$, si y sólo si $a = c$ y $b = d$.	1–6, 27–30
	Sumar, restar y multiplicar números complejos (*p. 339*).	**Suma:** $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ **Resta:** $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$ Puede emplearse la propiedad distributiva para multiplicar dos números complejos.	7–16
	Usar complejos conjugados para escribir el cociente de dos números complejos en forma estándar (*p. 341*).	Los números complejos de la forma $a + bi$ y $a - bi$ son complejos conjugados. Para escribir $(a + bi)/(c + di)$ en forma estándar, multiplique el numerador y el denominador por el complejo conjugado del denominador, $c - di$.	17–22
	Encontrar las soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas (*p. 342*).	**Raíz cuadrada principal de un número negativo** Si a es un número positivo, la raíz cuadrada principal del número negativo $-a$ se define como $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$.	23–26
Sección 4.2	Determinar los números de soluciones de ecuaciones polinómicas (*p. 345*).	**Teorema fundamental del álgebra** Si $f(x)$ es un polinomio de grado n, donde $n > 0$, entonces f tiene al menos un cero en el sistema de números complejos. **Teorema de la factorización lineal** Si $f(x)$ es un polinomio de grado n, donde $n > 0$, entonces f tiene precisamente n factores lineales $f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \cdot \cdot \cdot (x - c_n)$ donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son números complejos. Toda ecuación de segundo grado, $ax^2 + bx + c = 0$, tiene precisamente dos soluciones dadas por la Fórmula cuadrática. La expresión dentro del radical de la fórmula cuadrática, $b^2 - 4ac$, es el discriminante y puede emplearse para determinar si las soluciones son reales, repetidas o complejas. **1.** $b^2 - 4ac < 0$: dos soluciones complejas **2.** $b^2 - 4ac = 0$: una solución real repetida **3.** $b^2 - 4ac > 0$: dos soluciones reales distintas	31–38
	Encontrar las soluciones de ecuaciones polinómicas (*p. 347*).	**Las soluciones complejas ocurren en pares conjugados** Si $a + bi$, $b \neq 0$, es una solución de una ecuación polinómica con coeficientes reales, el conjugado $a - bi$ también es una solución de la ecuación.	39–48
	Encontrar los ceros de funciones polinómicas y encontrar funciones polinómicas dados los ceros de las funciones (*p. 348*).	El encontrar los ceros de una función polinómica es en esencia el mismo problema que encontrar las soluciones de una ecuación polinómica.	49–72

¿Qué aprendió?	Explicación/Ejemplos	Ejercicios de repaso
Graficar números complejos en el plano complejo y encontrar los módulos de números complejos (*p. 353*).	Un número complejo $z = a + bi$ puede representarse como el punto (a, b) en el plano complejo. El eje horizontal es el eje real y el eje vertical es el eje imaginario.  El módulo de $z = a + bi$ es $\lvert a + bi \rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$.	73–78
Escribir las formas trigonométricas de números complejos (*p. 354*).	La forma trigonométrica del número complejo $z = a + bi$ es $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ donde $a = r\cos\theta$, $b = r \operatorname{sen}\theta$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, y $\tan\theta = b/a$. El número r es el **módulo** de z y a θ se le llama **argumento** de z.	79–86
Multiplicar y dividir números complejos escritos en forma trigonométrica (*p. 356*).	**Producto y cociente de dos números complejos** Sean $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$ números complejos. $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$ $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)], \quad z_2 \neq 0$	87–94
Usar el Teorema de DeMoivre para encontrar las potencias de números complejos (*p. 360*).	**Teorema de DeMoivre** Si $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ es un número complejo y n es un entero positivo, entonces $z^n = [r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$.	95–100
Encontrar las raíces n-ésimas de números complejos (*p. 361*).	**Definición de una raíz n-ésima de un número complejo** El número complejo $u = a + bi$ es una raíz n-ésima del número complejo z si $z = u^n = (a + bi)^n$. **Obtención de las raíces n-ésimas de un número complejo** Para un entero positivo n, el número complejo $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ tiene exactamente n raíces n-ésimas distintas dadas por $\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\theta + 2\pi k}{n} + i \operatorname{sen}\dfrac{\theta + 2\pi k}{n}\right)$ donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.	101–108

Sección 4.3

Sección 4.4

4 EJERCICIOS DE REPASO

Visite www.CalcChat.com para las soluciones a los ejercicios impares.

4.1 En los Ejercicios 1-6, escriba el número complejo en forma estándar.

1. $6 + \sqrt{-4}$
2. $3 - \sqrt{-25}$
3. $\sqrt{-48}$
4. 27
5. $i^2 + 3i$
6. $-5i + i^2$

En los Ejercicios 7-16, desarrolle la operación y escriba el resultado en forma estándar.

7. $(7 + 5i) + (-4 + 2i)$
8. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$
9. $14 + (-3 + 11i) + 33i$
10. $-\left(\frac{1}{4} + \frac{7}{4}i\right) + \left(\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i\right)$
11. $5i(13 - 8i)$
12. $(1 + 6i)(5 - 2i)$
13. $(10 - 8i)(2 - 3i)$
14. $i(6 + i)(3 - 2i)$
15. $(2 + 7i)^2$
16. $(3 + 6i)^2 + (3 - 6i)^2$

En los Ejercicios 17-20, escriba el cociente en forma estándar.

17. $-\frac{10}{3i}$
18. $\frac{8}{12 - i}$
19. $\frac{6 + i}{4 - i}$
20. $\frac{3 + 2i}{5 + i}$

En los Ejercicios 21 y 22, desarrolle la operación y escriba el resultado en forma estándar.

21. $\frac{4}{2 - 3i} + \frac{2}{1 + i}$
22. $\frac{1}{2 + i} - \frac{5}{1 + 4i}$

En los Ejercicios 23-26, encuentre todas las soluciones de la ecuación.

23. $3x^2 + 1 = 0$
24. $2 + 8x^2 = 0$
25. $x^2 - 2x + 10 = 0$
26. $6x^2 + 3x + 27 = 0$

En los Ejercicios 27-30, simplifique el número complejo y escriba el resultado en forma estándar.

27. $10i^2 - i^3$
28. $-8i^6 + i^2$
29. $\frac{1}{i^7}$
30. $\frac{1}{(4i)^3}$

4.2 En los Ejercicios 31-34, determine el número de soluciones de la ecuación en el sistema de números complejos.

31. $x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 5 = 0$
32. $-2x^6 + 7x^3 + x^2 + 4x - 19 = 0$
33. $\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{3}{10} = 0$
34. $\frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 0$

En los Ejercicios 35-38, use el discriminante para determinar el número de soluciones reales de la ecuación cuadrática.

35. $6x^2 + x - 2 = 0$
36. $9x^2 - 12x + 4 = 0$
37. $0.13x^2 - 0.45x + 0.65 = 0$
38. $4x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{9} = 0$

En los Ejercicios 39-46, resuelva la ecuación. Escriba las soluciones complejas en forma estándar.

39. $x^2 - 2x = 0$
40. $6x - x^2 = 0$
41. $x^2 - 3x + 5 = 0$
42. $x^2 - 4x + 9 = 0$
43. $x^2 + 8x + 10 = 0$
44. $3 + 4x - x^2 = 0$
45. $2x^2 + 3x + 6 = 0$
46. $4x^2 - x + 10 = 0$

47. **BENEFICIO** La ecuación de la demanda para un reproductor de DVD está dada por $p = 140 - 0.0001x$, donde p es el precio unitario (en dólares) del reproductor de DVD y x es el número de unidades producidas y vendidas. La ecuación del costo para el reproductor de DVD es $C = 75x + 100{,}000$, donde C es el costo total (en dólares) y x es el número de unidades producidas. El beneficio total P obtenido por producir y vender x unidades es

   $P = xp - C.$

   Está trabajando en el departamento de mercadotecnia de la compañía que produce el reproductor de DVD y se le pide que determine el precio p que daría un beneficio de 9 millones de dólares. ¿Es esto posible? Explique.

48. **PERCEPCIÓN DEL CONSUMIDOR** La factura mensual promedio b (en dólares) de un teléfono celular en Estados Unidos de 1998 al 2007 puede modelarse por medio de

   $b = -0.24t^2 + 7.2t - 3, \quad 8 \le t \le 17$

   donde t representa el año, con $t = 8$ correspondiendo a 1998. De acuerdo con este modelo, ¿la factura mensual promedio para un teléfono celular subirá a \$52? Explique su razonamiento. (Fuente: CTIA-The Wireless Association)

En los Ejercicios 49-54, encuentre todos los ceros de la función y escriba el polinomio como un producto de factores lineales.

49. $r(x) = 2x^2 + 2x + 3$

50. $s(x) = 2x^2 + 5x + 4$

51. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 50x - 75$

52. $f(x) = 4x^3 - x^2 + 128x - 32$

53. $f(x) = 4x^4 + 3x^2 - 10$

54. $f(x) = 5x^4 + 126x^2 + 25$

En los Ejercicios 55-62, use el cero dado para encontrar todos los ceros de la función. Escriba el polinomio como un producto de factores lineales.

	Función	*Cero*
55.	$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 28$	2
56.	$f(x) = 10x^3 + 21x^2 - x - 6$	-2
57.	$f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 25$	-5
58.	$g(x) = x^3 - 8x^2 + 29x - 52$	4
59.	$h(x) = 2x^3 - 19x^2 + 58x + 34$	$5 + 3i$
60.	$f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 20x - 16$	$2i$
61.	$f(x) = x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 50x - 84$	$-3 + \sqrt{5}i$
62.	$g(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 26x + 21$	$2 + \sqrt{3}i$

En los Ejercicios 63-70, encuentre una función polinómica con coeficientes reales que tenga los ceros dados. (Existen varias respuestas correctas.)

63. $1, 1, \frac{1}{4}, -\frac{2}{3}$

64. $-2, 2, 3, 3$

65. $3, 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}$

66. $5, 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}$

67. $\frac{2}{3}, 4, \sqrt{3}i, -\sqrt{3}i$

68. $2, -3, 1 - 2i, 1 + 2i$

69. $-\sqrt{2}i, \sqrt{2}i, -5i, 5i$

70. $-2i, 2i, -4i, 4i$

En los Ejercicios 71 y 72, encuentre una función polinómica cúbica f con coeficientes reales que tengan los ceros dados y el valor de la función dado.

	Ceros	*Valor de la función*
71.	$5, 1 - i$	$f(1) = -8$
72.	$2, 4 + i$	$f(3) = 4$

En los Ejercicios 73-78, grafique el número complejo y encuentre su módulo.

73. $8i$

74. $-6i$

75. -5

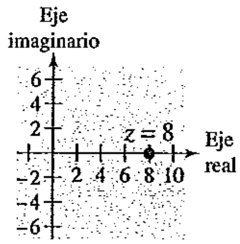
76. $-\sqrt{6}$

77. $5 + 3i$

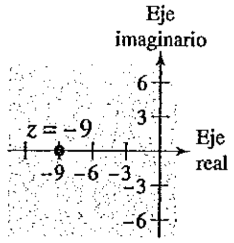
78. $-10 - 4i$

En los Ejercicios 79-86, escriba el número complejo en forma trigonométrica.

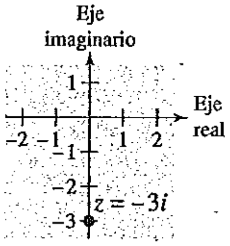
79.



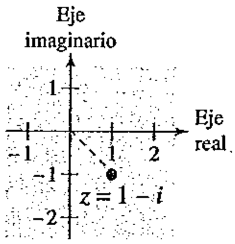
80.



81.



82.



83. $5 - 5i$

84. $5 + 12i$

85. $-3\sqrt{3} + 3i$

86. $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

En los Ejercicios 87-90, desarrolle la operación y deje el resultado en forma trigonométrica.

87. $\left[7\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)\right]\left[4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\right]$

88. $[1.5(\cos 25° + i \operatorname{sen} 25°)][5.5(\cos 34° + i \operatorname{sen} 34°)]$

89. $\dfrac{3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)}{6\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)}$

90. $\dfrac{8(\cos 50° + i \operatorname{sen} 50°)}{2(\cos 105° + i \operatorname{sen} 105°)}$

En los Ejercicios 91-94, (a) escriba los dos números complejos en forma trigonométrica y (b) use la forma trigonométrica para encontrar z_1z_2 y z_1/z_2, $z_2 \neq 0$.

91. $z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 1 - i$

92. $z_1 = 4 + 4i, \quad z_2 = -5 - 5i$

93. $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i, \quad z_2 = -10i$

94. $z_1 = -3(1 + i), \quad z_2 = 2(\sqrt{3} + i)$

En los Ejercicios 95-100, use el Teorema de DeMoivre para encontrar la potencia indicada del número complejo. Escriba el resultado en forma estándar.

95. $\left[5\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}\right)\right]^4$

96. $\left[2\left(\cos\frac{4\pi}{15} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{15}\right)\right]^5$

97. $(2 + 3i)^6$

98. $(1 - i)^8$

99. $(-1 + i)^7$

100. $(\sqrt{3} - i)^4$

En los Ejercicios 101-104, (a) use el teorema en la página 362 para encontrar las raíces indicadas del número complejo, (b) represente cada una de las raíces de manera gráfica y (c) escriba cada una de las raíces en forma estándar.

101. Raíces sextas de $-729i$

102. Raíces cuartas de 256

103. Raíces cuartas de -16

104. Raíces quintas de -1

En los Ejercicios 105-108, use el teorema en la página 362 para encontrar todas las soluciones de la ecuación y represente las soluciones de manera gráfica.

105. $x^4 + 81 = 0$

106. $x^5 - 243 = 0$

107. $x^3 + 8i = 0$

108. $(x^3 - 1)(x^2 + 1) = 0$

EXPLORACIÓN

¿FALSO O VERDADERO? En los Ejercicios 109-111, determine si el enunciado es falso o verdadero. Justifique su respuesta.

109. $\sqrt{-18}\sqrt{-2} = \sqrt{(-18)(-2)}$

110. La ecuación $325x^2 - 717x + 398 = 0$ no tiene solución.

111. Un polinomio de cuarto grado con coeficientes reales puede tener a -5, $128i$, $4i$ y 5 como sus ceros.

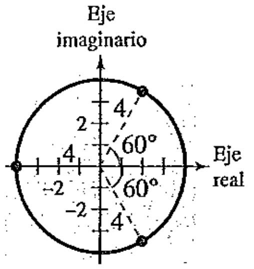
112. Escriba ecuaciones cuadráticas que tengan (a) dos soluciones reales distintas, (b) dos soluciones complejas y (c) ninguna solución real.

RAZONAMIENTO GRÁFICO En los Ejercicios 113 y 114, use la gráfica de las raíces de un número complejo.

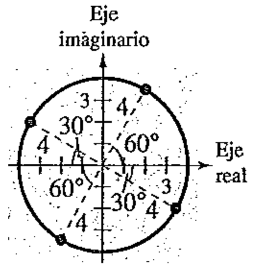
(a) Escriba cada una de las raíces en forma trigonométrica.

(b) Identifique el número complejo cuyas raíces se dan. Use una utilería de graficación para verificar sus resultados.

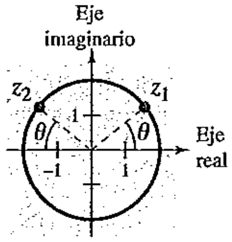
113.



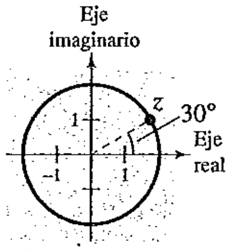
114.



115. La figura muestra z_1 y z_2. Describa z_1z_2 y z_1/z_2.



116. En la figura se muestra una de las raíces cuartas de un número complejo z.



(a) ¿Cuántas raíces no se muestran?

(b) Describa las demás raíces.

4 EXAMEN DEL CAPÍTULO

Visite www.CalcChat.com para las soluciones a los ejercicios impares.

Tome este examen como tomaría un examen en el salón de clases. Cuando termine, compruebe sus respuestas con las respuestas dadas al final del libro.

1. Escriba el número complejo $-5 + \sqrt{-100}$ en forma estándar.

En los Ejercicios 2-4, desarrolle las operaciones y escriba el resultado en forma estándar.

2. $10i - (3 + \sqrt{-25})$
3. $(4 + 9i)^2$
4. $(6 + \sqrt{7}i)(6 - \sqrt{7}i)$

5. Escriba el cociente en forma estándar: $\dfrac{4}{8 - 3i}$.
6. Use la Fórmula cuadrática para resolver la ecuación $2x^2 - 2x + 3 = 0$.

En los Ejercicios 7 y 8, determine el número de soluciones de la ecuación en el sistema de números complejos.

7. $x^5 + x^3 - x + 1 = 0$
8. $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x - 5 = 0$

En los Ejercicios 9 y 10, encuentre todos los ceros de la función.

9. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x - 30$
10. $f(x) = x^4 - 2x^2 - 24$

En los Ejercicios 11 y 12, use el (los) cero(s) dado(s) para encontrar todos los ceros de la función. Escriba el polinomio como un producto de factores lineales.

	Función	*Cero(s)*
11.	$h(x) = x^4 - 2x^2 - 8$	$-2, 2$
12.	$g(v) = 2v^3 - 11v^2 + 22v - 15$	$3/2$

En los Ejercicios 13 y 14, encuentre una función polinómica con los coeficientes reales que tengan los ceros dados. (Existen varias respuestas correctas.)

13. $0, 7, 4 + i, 4 - i$
14. $1 + \sqrt{6}i, 1 - \sqrt{6}i, 3, 3$

15. ¿Es posible que una función polinómica con coeficientes enteros tenga exactamente un cero complejo? Explique.
16. Escriba el número complejo $z = 5 - 5i$ en forma trigonométrica.
17. Escriba el número complejo $z = 6(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$ en forma estándar.

En los Ejercicios 18 y 19, use el Teorema de DeMoivre para encontrar la potencia indicada del número complejo. Escriba el resultado en forma estándar.

18. $\left[3\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{6}\right)\right]^8$
19. $(3 - 3i)^6$

20. Encuentre las raíces cuartas de $256(1 + \sqrt{3}i)$.
21. Encuentre todas las soluciones de la ecuación $x^3 - 27i = 0$ y represente las soluciones de manera gráfica.
22. Un proyectil es disparado hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 88 pies por segundo. La altura h (en pies) del proyectil está dada por

    $h = -16t^2 + 88t, \quad 0 \le t \le 5.5$

    donde t es el tiempo (en segundos). Se le dice que el proyectil alcanza una altura de 125 pies. ¿Es esto posible? Explique.

DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS

El Teorema de la factorización lineal está estrechamente relacionado con el Teorema fundamental del álgebra. El Teorema fundamental del álgebra tiene una historia larga e interesante. En los primeros trabajos con ecuaciones polinómicas, el Teorema fundamental del álgebra se pensó que no era verdadero, debido a que no se consideraron las soluciones imaginarias. De hecho, en los primeros trabajos por matemáticos como Abul al-Khwarizmi (alrededor de 800 D. C.) tampoco se consideraban las soluciones negativas.

Una vez que se aceptaron los números imaginarios, varios matemáticos intentaron dar una comprobación general del Teorema fundamental del álgebra. Estos matemáticos incluían a Gottfried von Leibniz (1702), Jean D'Alembert (1746), Leonhard Euler (1749), Joseph Louis Lagrange (1722) y Pierre Simon Laplace (1795). Al matemático que por lo regular se le acredita con la primera comprobación correcta del Teorema fundamental del álgebra es Carl Friedrich Gauss, quien publicó la comprobación en su tesis doctoral en 1799.

Teorema de la factorización lineal (*p. 345*)

Si $f(x)$ es un polinomio de grado n, donde $n > 0$, entonces f tiene precisamente n factores lineales

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \cdot \cdot \cdot (x - c_n)$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son números complejos.

Demostración

Utilizando el Teorema fundamental del álgebra, conoce que f debe tener al menos un cero, c_1. En consecuencia $(x - c_1)$ es un factor de $f(x)$ y tiene

$$f(x) = (x - c_1)f_1(x).$$

Si el grado de $f_1(x)$ es mayor a cero, de nuevo aplique el Teorema fundamental del álgebra para concluir que f_1 debe tener un cero c_2, lo cual implica que

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)f_2(x).$$

Está claro que el grado de $f_1(x)$ es $n - 1$, que el grado de $f_2(x)$ es $n - 2$ y que puede aplicar repetidamente el Teorema fundamental del álgebra n veces hasta que obtenga

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \cdot \cdot \cdot (x - c_n)$$

donde a_n es el coeficiente mayor del polinomio $f(x)$.

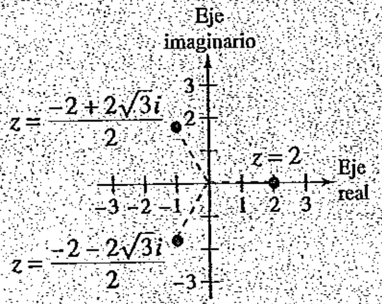
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Esta colección de ejercicios desafiantes y que incitan a pensar exploran y expanden los conceptos aprendidos en este capítulo.

1. (a) Los números complejos

$$z = 2, z = \frac{-2 + 2\sqrt{3}i}{2}, \text{ y } z = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{2}$$

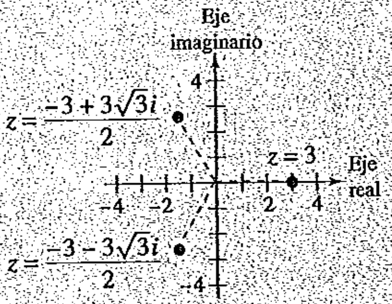
se representan de manera gráfica (vea la figura). Evalúe la expresión x^3 para cada número complejo. ¿Qué observa?



(b) Los números complejos

$$z = 3, z = \frac{-3 + 3\sqrt{3}i}{2}, \text{ y } z = \frac{-3 - 3\sqrt{3}i}{2}$$

se representan de manera gráfica (vea la figura). Evalúe la expresión x^3 para cada número complejo. ¿Qué observa?



(c) Use sus resultados de los incisos (a) y (b) para generalizar sus resultados.

2. El inverso multiplicativo de z es un número complejo z_m tal que $z \cdot z_m = 1$. Encuentre el inverso multiplicativo de cada número complejo.

(a) $z = 1 + i$

(b) $z = 3 - i$

(c) $z = -2 + 8i$

3. Muestre que el producto de un número complejo $a + bi$ y su conjugado es un número real.

4. Sean

$$z = a + bi, \bar{z} = a - bi, w = c + di, \text{ y } \bar{w} = c - di.$$

Compruebe cada enunciado.

(a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

(b) $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$

(c) $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

(d) $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$

(e) $(\bar{z})^2 = \overline{z^2}$

(f) $\bar{\bar{z}} = z$

(g) $\bar{z} = z$ si z es real

5. Encuentre los valores de k tales que la ecuación

$$x^2 - 2kx + k = 0$$

tenga (a) dos soluciones reales y (b) dos soluciones complejas.

6. Use una utilería de graficación para graficar la función dada por

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + k$$

para diferentes valores de k. Encuentre los valores de k tales que los ceros de f satisfagan las características especificadas. (Algunos incisos no tienen respuestas únicas.)

(a) Cuatro ceros reales

(b) Dos ceros reales y dos ceros complejos

(c) Cuatro ceros complejos

7. ¿Las respuestas al Ejercicio 6 cambiarán para la función g?

(a) $g(x) = f(x - 2)$

(b) $g(x) = f(2x)$

8. Una función polinómica de tercer grado f tiene los ceros reales $-2, \frac{1}{2}$ y 3, y su coeficiente mayor es negativo.

(a) Escriba una ecuación para f.

(b) Dibuje la gráfica de f.

(c) ¿Cuántas funciones polinómicas distintas son posibles para f?

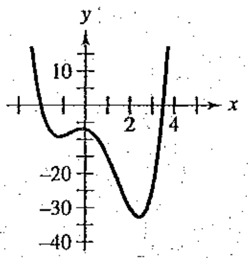
9. Abajo se muestra la gráfica de una de las siguientes funciones. Identifique la función mostrada en la gráfica. Explique por qué cada una de las demás no es la función correcta. Use una utilería de graficación para verificar su resultado.

(a) $f(x) = x^2(x + 2)(x - 3.5)$

(b) $g(x) = (x + 2)(x - 3.5)$

(c) $h(x) = (x + 2)(x - 3.5)(x^2 + 1)$

(d) $k(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 3.5)$



10. Use la información en la tabla para responder cada pregunta.

Intervalo	Valor de $f(x)$
$(-\infty, -2)$	Positivo
$(-2, 1)$	Negativo
$(1, 4)$	Negativo
$(4, \infty)$	Positivo

(a) ¿Cuáles son los tres ceros reales de la función polinómica f?

(b) ¿Qué puede decir acerca del comportamiento de la gráfica de f en $x = 1$?

(c) ¿Cuál es el menor grado posible de f? Explique. ¿El grado de f puede ser siempre impar? Explique.

(d) ¿El coeficiente mayor de f es positivo o negativo? Explique.

(e) Escriba una ecuación para f.

(f) Dibuje una gráfica de la función escrita en el inciso (e).

11. Un **fractal** es una figura geométrica que consiste en un patrón que se repite de manera infinita a una escala cada vez menor. Al fractal más famoso se le llama **Conjunto de Mandelbrot,** en honor al matemático polaco Benoit Mandelbrot. Para dibujar el Conjunto de Mandelbrot, considere la siguiente sucesión de números.

$c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, [(c^2 + c)^2 + c]^2 + c, . . .$

El comportamiento de esta secuencia depende del valor del número complejo c. Si la secuencia se limita (el módulo de cada número en la sucesión, $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$, es menor a algún número fijo N), el número complejo c está en el Conjunto de Mandelbrot, y si la sucesión no se limita (el módulo de los términos de la sucesión se vuelve infinitamente grande), el número complejo c no está en el Conjunto de Mandelbrot. Determine si el número complejo c está en el Conjunto de Mandelbrot.

(a) $c = i$ (b) $c = 1 + i$ (c) $c = -2$

12. (a) Complete la tabla.

Función	Ceros	Suma de ceros	Producto de ceros
$f_1(x) = x^2 - 5x + 6$			
$f_2(x) = x^3 - 7x + 6$			
$f_3(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12$			
$f_4(x) = x^5 - 3x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 6x$			

(b) Use la tabla para hacer una conjetura que relacione la suma de los ceros de una función polinómica con los coeficientes de la función polinómica.

(c) Use la tabla para hacer una conjetura que relacione el producto de los ceros de una función polinómica con los coeficientes de la función polinómica.

13. Use la Fórmula cuadrática y, si es necesario, el Teorema de DeMoivre para resolver cada ecuación con coeficientes complejos.

(a) $x^2 - (4 + 2i)x + 2 + 4i = 0$

(b) $x^2 - (3 + 2i)x + 5 + i = 0$

(c) $2x^2 + (5 - 8i)x - 13 - i = 0$

(d) $3x^2 - (11 + 14i)x + 1 - 9i = 0$

14. Muestre que las soluciones para

$|z - 1| \cdot |\bar{z} - 1| = 1$

son los puntos (x, y) en el plano complejo tales que $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Identifique la gráfica del conjunto solución. $\bar{z}$ es el conjugado de z. (*Sugerencia*: Sea $z = x + yi$.)

15. Sea $z = a + bi$ y $\bar{z} = a - bi$, donde $a \neq 0$. Muestre que la ecuación

$z^2 - \bar{z}^2 = 0$

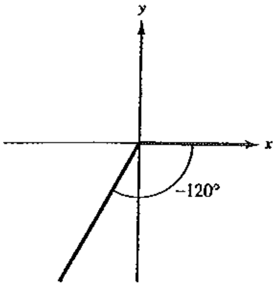
sólo tiene soluciones reales, mientras que la ecuación

$z^2 + \bar{z}^2 = 0$

tiene soluciones complejas.

Examen acumulativo para los capítulos 1-3 *(página 329)*

1. (a)



(b) 240°

(c) $-\dfrac{2\pi}{3}$

(d) 60°

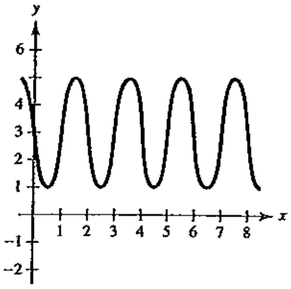
(e) $\operatorname{sen}(-120°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\csc(-120°) = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\cos(-120°) = -\dfrac{1}{2}$ $\quad\sec(-120°) = -2$

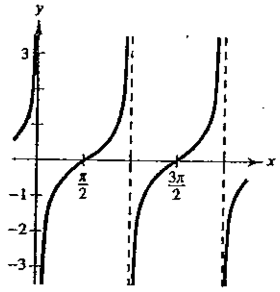
$\tan(-120°) = \sqrt{3}$ $\quad\cot(-120°) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2. −83.1° **3.** $\frac{20}{29}$

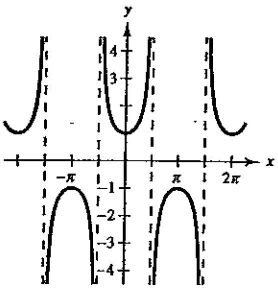
4.



5.

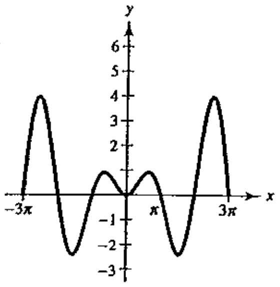


6.



7. $a = -3, b = \pi, c = 0$

8.



9. 4.9 **10.** $\frac{3}{4}$ **11.** $\sqrt{1-4x^2}$ **12.** 1 **13.** $2\tan\theta$

14–16. Las respuestas variarán. **17.** $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{3}$

18. $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}$ **19.** $\dfrac{3\pi}{2}$ **20.** $\dfrac{16}{63}$ **21.** $\dfrac{4}{3}$

22. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ **23.** $\dfrac{5}{2}\left(\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{2} - \operatorname{sen}\pi\right)$

24. $-2\operatorname{sen}8x\operatorname{sen}x$ **25.** $B \approx 26.39°, C \approx 123.61°, c \approx 14.99$

26. $B \approx 52.48°, C \approx 97.52°, a \approx 5.04$

27. $B = 60°, a \approx 5.77, c \approx 11.55$

28. $A \approx 26.28°, B \approx 49.74°, C \approx 103.98°$

29. Ley de los senos: $C = 109°, a \approx 14.96, b \approx 9.27$

30. Ley de los cosenos: $A \approx 6.75°, B \approx 93.25°, c \approx 9.86$

31. 41.48 pulg.^{2} **32.** 599.09 m^2 **33.** $7\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

34. $\left\langle\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$ **35.** −5 **36.** $-\dfrac{1}{13}\langle 1, 5\rangle; \dfrac{21}{13}\langle 5, -1\rangle$

37. Alrededor de 395.8 rad/min; alrededor de 8312.7 pulg./min

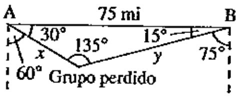
38. $42\pi\,\text{yd}^2 \approx 131.95\,\text{yd}^2$ **39.** 5 pies **40.** 22.6°

41. $d = 4\cos\dfrac{\pi}{4}t$ **42.** 32.6°; 543.9 km/h **43.** 425 pies-lb

Resolución de problemas *(página 335)*

1. 2.01 pies

3. (a)



(b) Estación A: 27.45 mi; Estación B: 53.03 mi

(c) 11.03 mi; S 21.7° E

5. (a) (i) $\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{5}$ (iii) 1
(iv) 1 (v) 1 (vi) 1

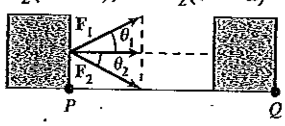
(b) (i) 1 (ii) $3\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{13}$
(iv) 1 (v) 1 (vi) 1

(c) (i) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (ii) $\sqrt{13}$ (iii) $\dfrac{\sqrt{85}}{2}$
(iv) 1 (v) 1 (vi) 1

(d) (i) $2\sqrt{5}$ (ii) $5\sqrt{2}$ (iii) $5\sqrt{2}$
(iv) 1 (v) 1 (vi) 1

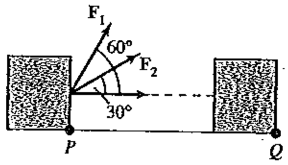
7. $\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v}); \mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} - \mathbf{u})$

9. (a)



La cantidad de trabajo realizado por $\mathbf{F}_1$ es igual a la cantidad del trabajo realizado por $\mathbf{F}_2$.

(b)



La cantidad de trabajo realizado por $\mathbf{F}_2$ es $\sqrt{3}$ veces mayor que la cantidad de trabajo realizado por $\mathbf{F}_1$.

Capítulo 4

Sección 4.1 *(página 343)*

1. (a) iii (b) i (c) ii **3.** cuadrada principal

5. $a = -12, b = 7$ **7.** $a = 6, b = 5$ **9.** $8 + 5i$

11. $2 - 3\sqrt{3}i$ **13.** $4\sqrt{5}i$ **15.** 14 **17.** $-1 - 10i$

19. $0.3i$ **21.** $10 - 3i$ **23.** 1 **25.** $3 - 3\sqrt{2}i$

27. $-14 + 20i$ **29.** $\frac{1}{6} + \frac{7}{6}i$ **31.** $5 + i$ **33.** $108 + 12i$

35. 24 **37.** $-13 + 84i$ **39.** −10 **41.** $9 - 2i$, 85

43. $-1 + \sqrt{5}i$, 6 **45.** $-2\sqrt{5}i$, 20 **47.** $\sqrt{6}$, 6

49. $-3i$ **51.** $\frac{8}{41} + \frac{10}{41}i$ **53.** $\frac{12}{13} + \frac{5}{13}i$ **55.** $-4 - 9i$

57. $-\frac{120}{1681} - \frac{27}{1681}i$ **59.** $-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$ **61.** $\frac{62}{949} + \frac{297}{949}i$

63. $-2\sqrt{3}$ **65.** −15

67. $\left(21 + 5\sqrt{2}\right) + \left(7\sqrt{5} - 3\sqrt{10}\right)i$

69. $1 \pm i$ **71.** $-2 \pm \frac{1}{2}i$ **73.** $-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$ **75.** $2 \pm \sqrt{2}i$

77. $\frac{5}{7} \pm \frac{5\sqrt{15}}{7}$ **79.** $-1 + 6i$ **81.** $-14i$

83. $-432\sqrt{2}i$ **85.** i **87.** 81

89. (a) $z_1 = 9 + 16i, z_2 = 20 - 10i$ (b) $z = \frac{11,240}{877} + \frac{4630}{877}i$

91. (a) 16 (b) 16 (c) 16 (d) 16

93. Falso. Si el número complejo es real, el número es igual a su conjugado.

95. Falso.
$i^{44} + i^{150} - i^{74} - i^{109} + i^{61} = 1 - 1 + 1 - i + i = 1$

97. $i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1$; El patrón repite los primeros cuatro resultados. Divida el exponente entre 4
Si el residuo es 1, el resultado es i.
Si el residuo es 2, el resultado es -1.
Si el residuo es 3, el resultado es $-i$.
Si el residuo es 0, el resultado es 1.

99. $\sqrt{-6}\sqrt{-6} = \sqrt{6}i\sqrt{6}i = 6i^2 = -6$ **101.** Demostración

Sección 4.2 *(página 350)*

1. Teorema fundamental; álgebra **3.** conjugados

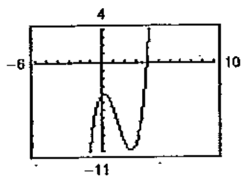
5. Tres soluciones **7.** Cuatro soluciones

9. Sin soluciones reales **11.** Dos soluciones reales

13. Dos soluciones reales **15.** Sin soluciones reales **17.** $\pm\sqrt{5}$

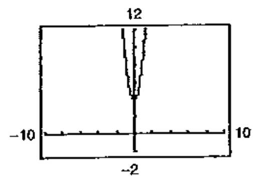
19. $-5 \pm \sqrt{6}$ **21.** 4 **23.** $-1 \pm 2i$ **25.** $\frac{1}{2} \pm i$

27. $20 \pm 2\sqrt{215}$ **29.** $-3 \pm 2\sqrt{2}i$

31. (a)


(b) $4, \pm i$

(c) El número de ceros reales y el número de intersecciones en x es el mismo.

33. (a)


(b) $\pm\sqrt{2}i$

(c) El número de ceros reales y el número de intersecciones en x es el mismo.

35. $\pm 6i$; $(x + 6i)(x - 6i)$

37. $1 \pm 4i$; $(x - 1 - 4i)(x - 1 + 4i)$

39. $\pm 3, \pm 3i$; $(x + 3)(x - 3)(x + 3i)(x - 3i)$

41. $1 \pm i$; $(z - 1 + i)(z - 1 - i)$

43. $-3, \pm\sqrt{3}$; $(x + 3)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

45. $4, \pm 4i$; $(x - 4)(x + 4i)(x - 4i)$

47. $\frac{1}{2}, \pm 3\sqrt{2}i$; $(2x - 1)(x + 3\sqrt{2}i)(x - 3\sqrt{2}i)$

49. $0, 6, \pm 4i$; $x(x - 6)(x + 4i)(x - 4i)$

51. $\pm i, \pm 3i$; $(x + i)(x - i)(x + 3i)(x - 3i)$

53. $-\frac{3}{2}, \pm 5i$ **55.** $\pm 2i, 1, -\frac{1}{2}$ **57.** $-3 \pm i, \frac{1}{4}$

59. $-4, 3 \pm i$ **61.** $2, -3 \pm \sqrt{2}i, 1$

63. $f(x) = x^3 - x^2 + 25x - 25$

65. $f(x) = x^3 - 12x^2 + 46x - 52$

67. $f(x) = 3x^4 - 17x^3 + 25x^2 + 23x - 22$

69. $f(x) = -x^3 + x^2 - 4x + 4$

71. $f(x) = -3x^3 + 9x^2 - 3x - 15$

73. $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 10x + 4$

75. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x + 40$

77. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 10$

79. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 16$

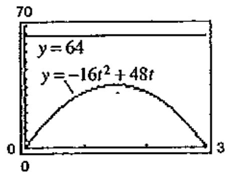
81. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + x - 6$

83. (a)

t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
h	0	20	32	36	32	20	0

(b) No

(c) Cuando iguala $h = 64$, la ecuación resultante da raíces imaginarias. Por lo que el proyectil no alcanzará una altura de 64 pies.

(d)


Las gráficas no se intersectan, por lo que el proyectil no alcanza los 64 pies.

(e) Los resultados muestran que no es posible que el proyectil alcance una altura de 64 pies.

85. (a) $P = -0.0001x^2 + 60x - 150,000$
(b) \$8,600,000 (c) \$115
(d) No es posible tener un beneficio de 10 millones de dólares.

87. Falso. A lo más puede tener dos ceros complejos y el Teorema de la factorización lineal garantiza que hay tres factores lineales, por lo que un cero debe ser real.

89. (a) positivo; 4 (b) cero; 0 (c) negativo; -4
Sin soluciones reales; dos soluciones reales.

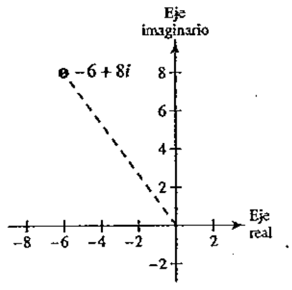
91. r_1, r_2, r_3 **93.** $5 + r_1, 5 + r_2, 5 + r_3$

95. Los ceros no pueden determinarse. **97.** $x^2 + b$

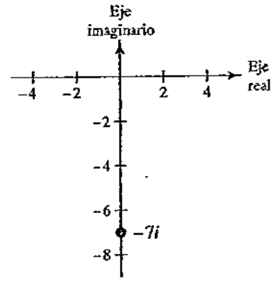
Sección 4.3 *(página 358)*

1. real; imaginario

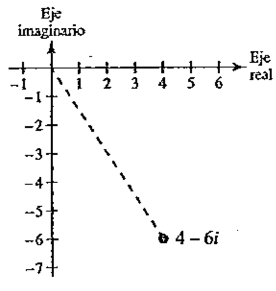
3. forma trigonométrica; módulo; argumento

5.


10

7.


7

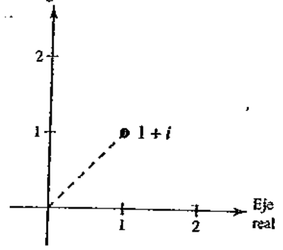
9.


$2\sqrt{13}$

11. $3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

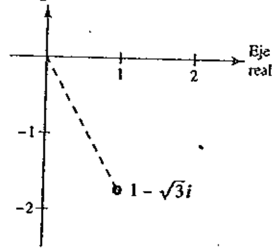
13. $3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{4}\right)$

15.



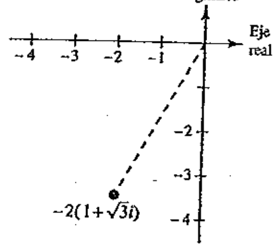
$\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$

17.



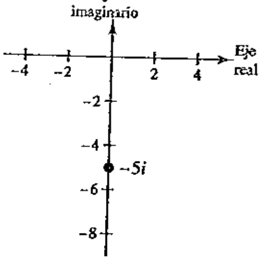
$2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{3}\right)$

19.



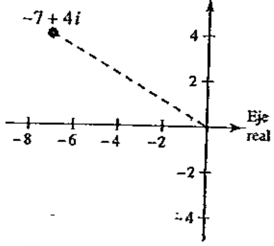
$4\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{4\pi}{3}\right)$

21.



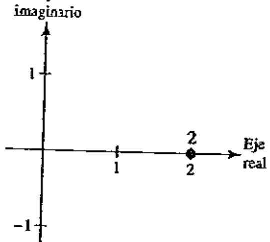
$5\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{2}\right)$

23.



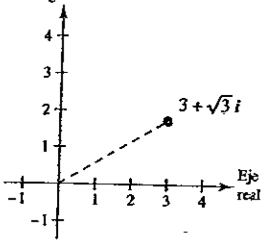
$\sqrt{65}(\cos 2.62 + i\,\text{sen}\,2.62)$

25.



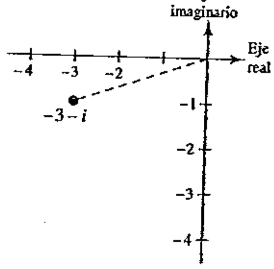
$2(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0)$

27.



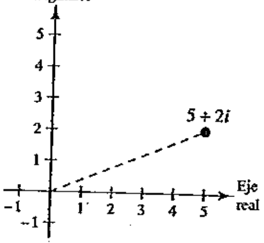
$2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right)$

29.



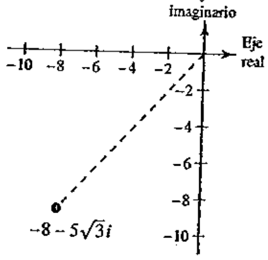
$\sqrt{10}(\cos 3.46 + i\,\text{sen}\,3.46)$

31.



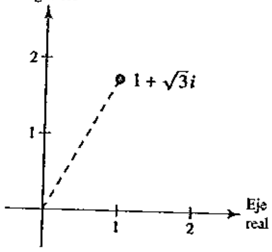
$\sqrt{29}(\cos 0.38 + i\,\text{sen}\,0.38)$

33.

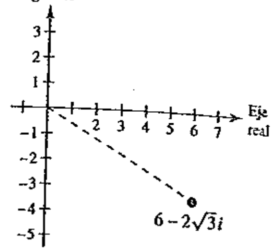


$\sqrt{139}(\cos 3.97 + i\,\text{sen}\,3.97)$

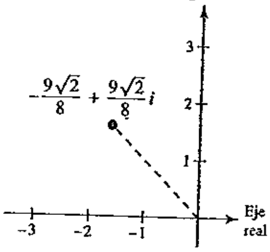
35. $1 + \sqrt{3}i$



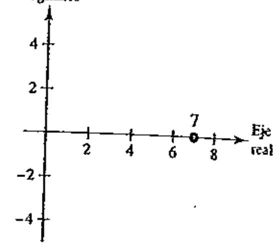
37. $6 - 2\sqrt{3}i$



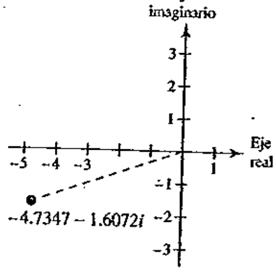
39. $-\dfrac{9\sqrt{2}}{8} + \dfrac{9\sqrt{2}}{8}i$



41. 7



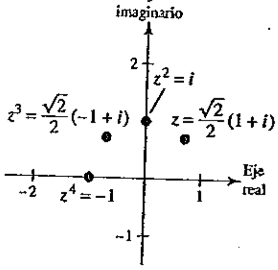
43. $-4.7347 - 1.6072i$



45. $4.6985 + 1.7101i$

47. $-1.8126 + 0.8452i$

49.



El valor absoluto de cada una es 1 y las potencias consecutivas de z están cada una a 45°.

51. $12\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{3}\right)$ **53.** $\dfrac{10}{9}(\cos 150° + i\,\text{sen}\,150°)$

55. $\cos 50° + i\,\text{sen}\,50°$ **57.** $\frac{1}{3}(\cos 30° + i\,\text{sen}\,30°)$

59. $\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{2\pi}{3}$ **61.** $6(\cos 330° + i\,\text{sen}\,330°)$

63. (a) $\left[2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)\right]\left[\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\dfrac{7\pi}{4}\right)\right]$

(b) $4(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0) = 4$ (c) 4

65. (a) $\left[2\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{2}\right)\right]\left[\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

(b) $2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\dfrac{7\pi}{4}\right) = 2 - 2i$

(c) $-2i - 2i^2 = -2i + 2 = 2 - 2i$

67. (a) $[5(\cos 0.93 + i \operatorname{sen} 0.93)] \div \left[2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3}\right)\right]$

(b) $\frac{5}{2}(\cos 1.97 + i \operatorname{sen} 1.97) \approx -0.982 + 2.299i$

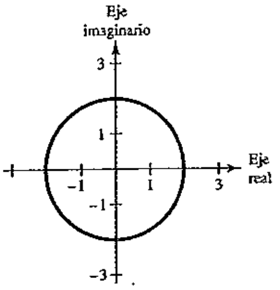
(c) Sobre $-0.982 + 2.299i$

69. (a) $[5(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)] \div \left[\sqrt{13}(\cos 0.98 + i \operatorname{sen} 0.98)\right]$

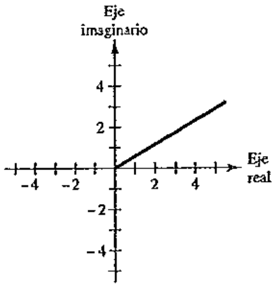
(b) $\frac{5}{\sqrt{13}}(\cos 5.30 + i \operatorname{sen} 5.30) \approx 0.769 - 1.154i$

(c) $\frac{10}{13} - \frac{15}{13}i \approx 0.769 - 1.154i$

71.



73.



75. $34 + 38i$ **77.** $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$ **79.** $\frac{39}{34} + \frac{3}{34}i$

81. Verdadero, por la definición del valor absoluto de un número complejo.

83. Las respuestas variarán. **85.** (a) r^2 (b) $\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta$

Sección 4.4 *(página 364)*

1. DeMoivre **3.** $\sqrt[n]{r}\left(\cos \frac{\theta + 2\pi k}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)$

5. $-4 - 4i$ **7.** $8i$ **9.** $1024 - 1024\sqrt{3}i$

11. $\frac{125}{2} + \frac{125\sqrt{3}}{2}i$ **13.** -1 **15.** $608.0204 + 144.6936i$

17. $-597 - 122i$ **19.** $-43\sqrt{5} + 4i$ **21.** $\frac{81}{2} + \frac{81\sqrt{3}}{2}i$

23. $32.3524 - 120.7407i$ **25.** $32i$ **27.** 27

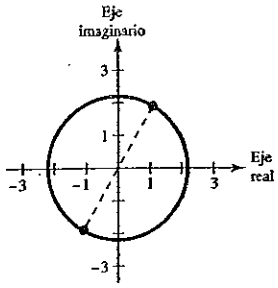
29. $1 + i, -1 - i$ **31.** $-\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i, \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$

33. $-1.5538 + 0.6436i, 1.5538 - 0.6436i$

35. $\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

37. (a) $\sqrt{5}(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$
$\sqrt{5}(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°)$

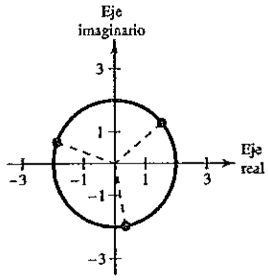
(b)



(c) $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i, -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i$

39. (a) $2\left(\cos \frac{2\pi}{9} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{9}\right)$
$2\left(\cos \frac{8\pi}{9} + i \operatorname{sen} \frac{8\pi}{9}\right)$
$2\left(\cos \frac{14\pi}{9} + i \operatorname{sen} \frac{14\pi}{9}\right)$

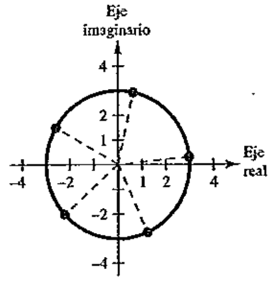
(b)



(c) $1.5321 + 1.2856i, -1.8794 + 0.6840i,$
$0.3473 - 1.9696i$

41. (a) $3\left(\cos \frac{\pi}{30} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{30}\right)$
$3\left(\cos \frac{13\pi}{30} + i \operatorname{sen} \frac{13\pi}{30}\right)$
$3\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right)$
$3\left(\cos \frac{37\pi}{30} + i \operatorname{sen} \frac{37\pi}{30}\right)$
$3\left(\cos \frac{49\pi}{30} + i \operatorname{sen} \frac{49\pi}{30}\right)$

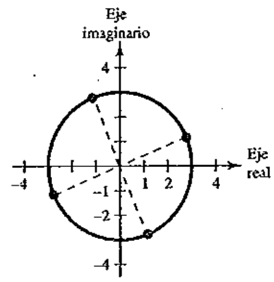
(b)



(c) $2.9836 + 0.3136i, 0.6237 + 2.9344i,$
$-2.5981 + 1.5i, -2.2294 - 2.0074i, 1.2202 - 2.7406i$

43. (a) $3\left(\cos \frac{\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{8}\right)$
$3\left(\cos \frac{5\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{8}\right)$
$3\left(\cos \frac{9\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{9\pi}{8}\right)$
$3\left(\cos \frac{13\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{13\pi}{8}\right)$

(b)



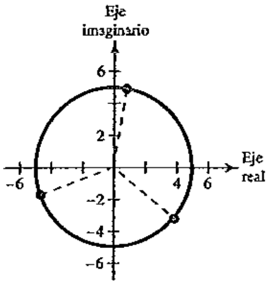
(c) $2.7716 + 1.1481i, -1.1481 + 2.7716i,$
$-2.7716 - 1.1481i, 1.1481 - 2.7716i$

45. (a) $5\left(\cos\frac{4\pi}{9} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{9}\right)$

$5\left(\cos\frac{10\pi}{9} + i\operatorname{sen}\frac{10\pi}{9}\right)$

$5\left(\cos\frac{16\pi}{9} + i\operatorname{sen}\frac{16\pi}{9}\right)$

(b)



(c) $0.8682 + 4.9240i, -4.6985 - 1.7101i,$ $3.8302 - 3.2139i$

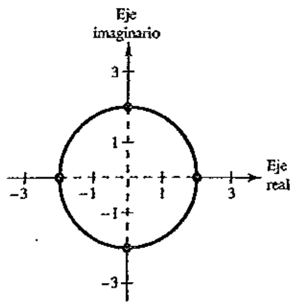
47. (a) $2(\cos 0 + i\operatorname{sen} 0)$

$2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

$2(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi)$

$2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$

(b)



(c) $2, 2i, -2, -2i$

49. (a) $\cos 0 + i\operatorname{sen} 0$

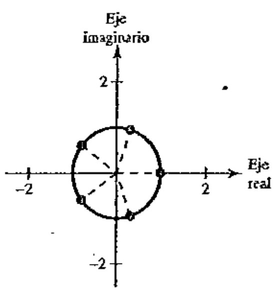
$\cos\frac{2\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}$

$\cos\frac{4\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{5}$

$\cos\frac{6\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{6\pi}{5}$

$\cos\frac{8\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{8\pi}{5}$

(b)



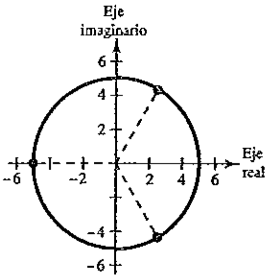
(c) $1, 0.3090 + 0.9511i, -0.8090 + 0.5878i,$ $-0.8090 - 0.5878i, 0.3090 - 0.9511i$

51. (a) $5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

$5(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi)$

$5\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$

(b)



(c) $\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i, -5, \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

53. (a) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{20} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{20}\right)$

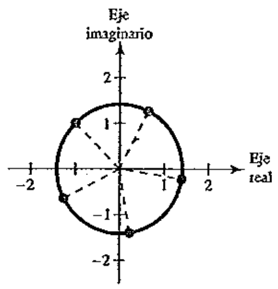
$\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$

$\sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{20} + i\operatorname{sen}\frac{23\pi}{20}\right)$

$\sqrt{2}\left(\cos\frac{31\pi}{20} + i\operatorname{sen}\frac{31\pi}{20}\right)$

$\sqrt{2}\left(\cos\frac{39\pi}{20} + i\operatorname{sen}\frac{39\pi}{20}\right)$

(b)



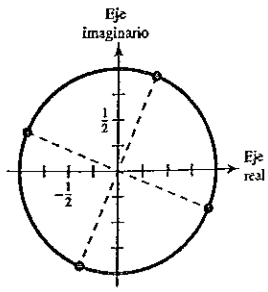
(c) $0.6420 + 1.2601i, -1 + i, -1.2601 - 0.6420i,$ $0.2212 - 1.3968i, 1.3968 - 0.2212i$

55. $\cos\frac{3\pi}{8} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{8}$

$\cos\frac{7\pi}{8} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{8}$

$\cos\frac{11\pi}{8} + i\operatorname{sen}\frac{11\pi}{8}$

$\cos\frac{15\pi}{8} + i\operatorname{sen}\frac{15\pi}{8}$



57. $\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$

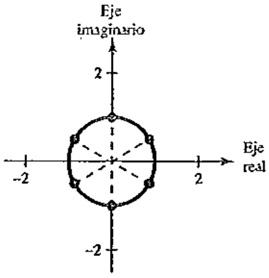
$\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$

$\cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$

$\cos\frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}$

$\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$

$\cos\frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}$



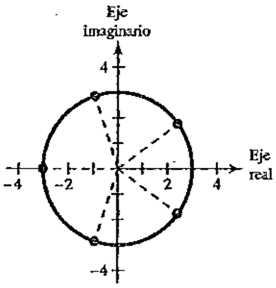
59. $3\left(\cos\frac{\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\right)$

$3\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{5}\right)$

$3(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$

$3\left(\cos\frac{7\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{5}\right)$

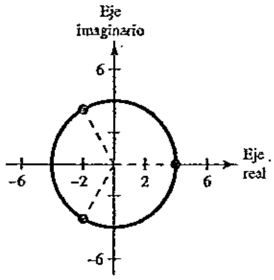
$3\left(\cos\frac{9\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{9\pi}{5}\right)$



61. $4(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$

$4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

$4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$

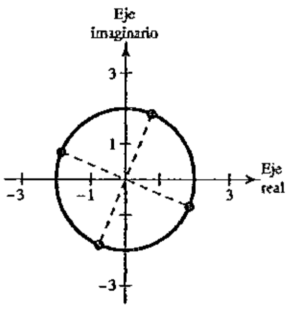


63. $2\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{8}\right)$

$2\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{8}\right)$

$2\left(\cos\frac{11\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{8}\right)$

$2\left(\cos\frac{15\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{15\pi}{8}\right)$

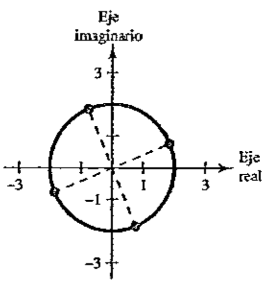


65. $2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\right)$

$2\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{8}\right)$

$2\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{9\pi}{8}\right)$

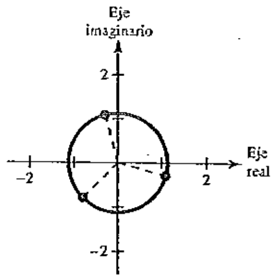
$2\left(\cos\frac{13\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{13\pi}{8}\right)$



67. $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}\right)$

$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$

$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{23\pi}{12}\right)$



69. $\sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{24} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{24}\right)$

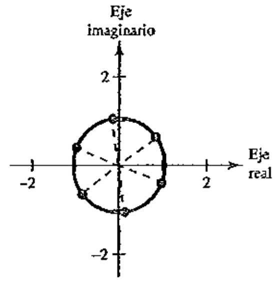
$\sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{24} + i \operatorname{sen}\frac{13\pi}{24}\right)$

$\sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{8}\right)$

$\sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{29\pi}{24} + i \operatorname{sen}\frac{29\pi}{24}\right)$

$\sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{37\pi}{24} + i \operatorname{sen}\frac{37\pi}{24}\right)$

$\sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{15\pi}{8}\right)$



71. Falso. Están igualmente espaciadas alrededor de la circunferencia centrada en el origen con radio $\sqrt[n]{r}$.

73. Falso. Las soluciones son $\pm 2(1 + i)$.

75. Las respuestas variarán

77. (a) $i, -2i$

(b) $\left(-1 \pm \sqrt{2}\right)i$

(c) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)i$

79–81. Las respuestas variarán

Ejercicios de repaso *(página 368)*

1. $6 + 2i$ **3.** $4\sqrt{3}i$ **5.** $-1 + 3i$ **7.** $3 + 7i$

9. $11 + 44i$ **11.** $40 + 65i$ **13.** $-4 - 46i$

15. $-45 + 28i$ **17.** $\frac{10}{3}i$ **19.** $\frac{23}{17} + \frac{10}{17}i$ **21.** $\frac{21}{13} - \frac{1}{13}i$

23. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}i$ **25.** $1 \pm 3i$ **27.** $-10 + i$ **29.** i

31. Cinco soluciones **33.** Cuatro soluciones

35. Dos soluciones reales **37.** Sin soluciones reales

39. $0, 2$ **41.** $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{11}i}{2}$ **43.** $-4 \pm \sqrt{6}$

45. $-\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{39}i}{4}$

47. Sí. Un precio de \$95.41 o de \$119.59 por unidad generaría un beneficio de 9 millones de dólares

49. $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}i; \frac{1}{2}\left(2x + 1 - \sqrt{5}i\right)\left(2x + 1 + \sqrt{5}i\right)$

51. $\frac{3}{2}, \pm 5i; (2x - 3)(x + 5i)(x - 5i)$

53. $\pm\frac{\sqrt{5}}{2}, \pm\sqrt{2}i; \left(2x + \sqrt{5}\right)\left(2x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{2}i\right)\left(x - \sqrt{2}i\right)$

55. $-7, 2; (x + 7)(x - 2)^2$

57. $-5, 1 \pm 2i; (x + 5)(x - 1 - 2i)(x - 1 + 2i)$

59. $-\frac{1}{2}, 5 \pm 3i; (2x + 1)(x - 5 - 3i)(x - 5 + 3i)$

61. $-2, 3, -3 \pm \sqrt{5}i;$
$(x - 3)(x + 2)\left(x + 3 - \sqrt{5}i\right)\left(x + 3 + \sqrt{5}i\right)$

63. $f(x) = 12x^4 - 19x^3 + 9x - 2$

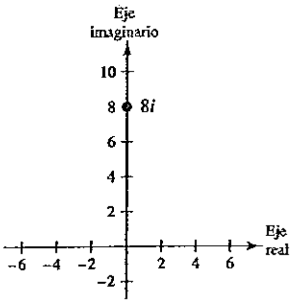
65. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 3$

67. $f(x) = 3x^4 - 14x^3 + 17x^2 - 42x + 24$

69. $f(x) = x^4 + 27x^2 + 50$

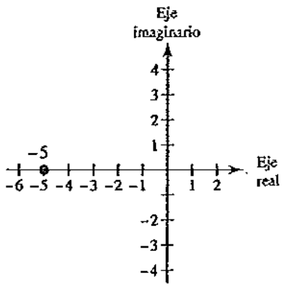
71. $f(x) = 2x^3 - 14x^2 + 24x - 20$

73.



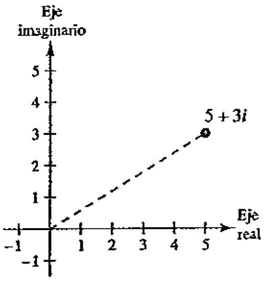
8

75.



5

77.



$\sqrt{34}$

79. $8(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$

81. $3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right)$

83. $5\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}\right)$

85. $6\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right)$

87. $28\left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{12}\right)$

89. $\frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right)$

91. (a) $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}\right)$

(b) $z_1 z_2 = 2(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$

$\frac{z_1}{z_2} = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right)$

93. (a) $z_1 = 4\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{6}\right)$

$z_2 = 10\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right)$

(b) $z_1 z_2 = 40\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}\right)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{5}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)$

95. $\frac{625}{2} + \frac{625\sqrt{3}}{2}i$

97. $2035 - 828i$

99. $-8 - 8i$

101. (a) $3\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$

$3\left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{12}\right)$

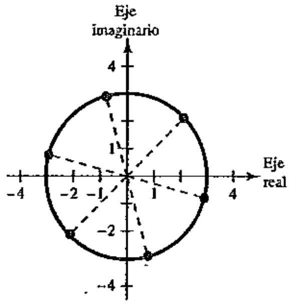
$3\left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{12}\right)$

$3\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}\right)$

$3\left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{19\pi}{12}\right)$

$3\left(\cos \frac{23\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{23\pi}{12}\right)$

(b)



(c) $2.1213 + 2.1213i$, $-0.7765 + 2.8978i$, $-2.8978 + 0.7765i$, $-2.1213 - 2.1213i$, $0.7765 - 2.8978i$, $2.8978 - 0.7765i$

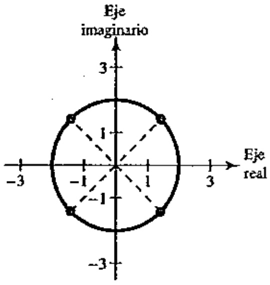
103. (a) $2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$

$2\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}\right)$

$2\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}\right)$

$2\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}\right)$

(b)



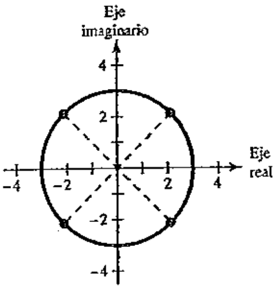
(c) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

105. $3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

$3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

$3\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

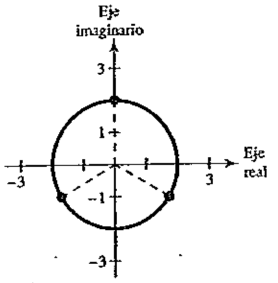
$3\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$



107. $2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 2i$

$2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i$

$2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i$



109. Falso.

$$\begin{aligned}\sqrt{-18}\sqrt{-2} &= 3\sqrt{2}i\,\sqrt{2}i \quad \text{y} \quad \sqrt{(-18)(-2)} = \sqrt{36}\\ &= 3\sqrt{4}i^2 \qquad\qquad\qquad\qquad = 6\\ &= 6i^2\\ &= -6\end{aligned}$$

111. Falso. Un polinomio de cuarto grado con coeficientes reales tiene cuatro ceros y los ceros complejos ocurren en pares conjugados.

113. (a) $4(\cos 60° + i\operatorname{sen} 60°)$ (b) -64
$4(\cos 180° + i\operatorname{sen} 180°)$
$4(\cos 300° + i\operatorname{sen} 300°)$

115. $z_1z_2 = -4, \frac{z_1}{z_2} = -\cos 2\theta - i\operatorname{sen} 2\theta$

Examen del capítulo *(página 371)*

1. $-5 + 10i$ **2.** $-3 + 5i$ **3.** $-65 + 72i$ **4.** 43
5. $\frac{32}{73} + \frac{12}{73}i$ **6.** $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}i$ **7.** Cinco soluciones
8. Cuatro soluciones **9.** $6, \pm\sqrt{5}i$ **10.** $\pm\sqrt{6}, \pm 2i$
11. $\pm 2, \pm\sqrt{2}i$; $(x + 2)(x - 2)(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$
12. $\frac{3}{2}, 2 \pm i$; $(2v - 3)(v - 2 - i)(v - 2 + i)$
13. $x^4 - 15x^3 + 73x^2 - 119x$
14. $x^4 - 8x^3 + 28x^2 - 60x + 63$
15. No. Si $a + bi, b \neq 0$, es un cero, su conjugado $a - bi$ también es un cero.

16. $5\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$ **17.** $-3 + 3\sqrt{3}i$

18. $-\frac{6561}{2} - \frac{6561\sqrt{3}}{2}i$ **19.** $5832i$

20. $4\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)$

$4\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}\right)$

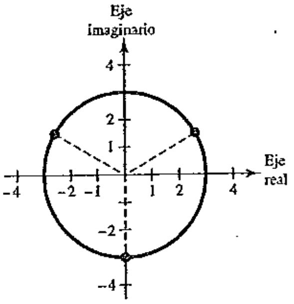
$4\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{13\pi}{12}\right)$

$4\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{19\pi}{12}\right)$

21. $3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

$3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$

$3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$



22. No. Cuando iguala $h = 125$, la ecuación resultante da raíces imaginarias. Por lo que el proyectil no alcanzará una altura de 125 pies.

Resolución de problemas *(página 373)*

1. (a) $z^3 = 8$ para los tres números complejos.
(b) $z^3 = 27$ para los tres números complejos.
(c) Las raíces cúbicas de un número real positivo "a" son:
$\sqrt[3]{a}, \frac{-\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}\sqrt{3}i}{2}$, y $\frac{-\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a}\sqrt{3}i}{2}$.

3. $(a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2$
$= a^2 + b^2$

5. (a) $k > 1$ o $k < 0$ (b) $0 < k < 1$

7. (a) No (b) Sí

9. (a) No es la correcta debido a que f tiene $(0, 0)$ como una intersección.
(b) No es la correcta debido a que la función debe ser al menos un polinomio de cuarto grado.
(c) Función correcta.
(d) No es la función correcta debido a que k tiene $(-1, 0)$ como una intersección.

11. (a) Sí (b) No (c) Sí

13. (a) $1 + i, 3 + i$ (b) $1 - i, 2 + 3i$
(c) $1 + i, -\frac{7}{2} + 3i$ (d) $4 + 5i, -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$

15. Las respuestas variarán.

Capítulo 5

Sección 5.1 *(página 384)*

1. algebraica **3.** Uno a uno **5.** $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$
7. 0.863 **9.** 0.006 **11.** 1767.767
13. d **14.** c **15.** a **16.** b