



GUÍA 6: AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

1. Defina eigenvalor (autovalor o valor propio) y eigenvector (autovector o vector propio) de una matriz cuadrada A de orden n . Demuestre que el conjunto $E_\lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$ (eigenespacio o espacio característico de λ) es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
2. Sea A una matriz de $n \times n$. Demuestre:
 - (a) Un eigenvalor de A es un escalar λ tal que $\det(\lambda I - A) = 0$.
 - (b) Los eigenvectores de A correspondientes al eigenvalor λ son las soluciones no triviales de $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. Defina ecuación característica y polinomio característico de una matriz A . Halle el polinomio característico, la ecuación característica, los eigenvalores y eigenvectores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

4. Defina multiplicidad algebraica y geométrica de un eigenvalor. ¿Qué relación se verifica entre ellas?
5. Pruebe que si A es una matriz triangular entonces sus eigenvalores son sus elementos en la diagonal principal.
6. ¿Cuándo una matriz es diagonalizable?, dé un ejemplo de una matriz diagonalizable de orden 3.
7. Demuestre que si A y B son matrices semejantes entonces tienen los mismos eigenvalores.
8. Responda verdadero o falso. Justifique su respuesta:
 - (a) Si A es una matriz diagonalizable entonces tiene todos sus eigenvalores distintos.
 - (b) Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A y A^t tienen los mismos eigenvalores.
 - (c) $\lambda = 0$ es un eigenvalor de A si y sólo si A es no invertible.
 - (d) Sea λ un eigenvalor de A con eigenvector correspondiente $\mathbf{x}$ entonces $c\mathbf{x}$ con $c \neq 0$ es también un eigenvector de A correspondiente al eigenvalor λ .
 - (e) Si A es una matriz $n \times n$ con eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ entonces los eigenvalores de cA son $c\lambda_1, c\lambda_2, \dots, c\lambda_n$.