



Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Formación Básica
Taller de Álgebra Lineal para alumnos en condición intermedia
GUÍA 4: ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

1. Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Escriba las definiciones de norma o módulo del vector $\mathbf{u}$; distancia entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$; ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ y proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$.
2. Defina producto punto. Enuncie las propiedades del producto punto y demuéstrelas.
3. Enuncie y demuestre:
 - (a) la desigualdad de Cauchy-Schwarz.
 - (b) la desigualdad triangular.
 - (c) el teorema de Pitágoras.
4. Enuncie el teorema de la mejor aproximación.
5. Escriba las definiciones de conjuntos ortogonales, conjuntos ortonormales, base ortogonal y base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Dé un ejemplo de cada uno.
6. Demuestre que si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no cero de un subespacio V de $\mathbb{R}^n$, entonces S es li.
7. Enuncie el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt. Obtenga una base ortonormal para el espacio solución de la ecuación $x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$.
8. Defina subespacios ortogonales de $\mathbb{R}^n$.
9. Escriba la definición de complemento ortogonal de un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Obtenga el complemento ortogonal del subespacio $S = \{(x, y, z) : 2x - y + 3z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$ e interprete geométricamente.
10. Dada una base ortonormal del subespacio S de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{v}$ un vector de $\mathbb{R}^n$. ¿Cómo se calcula la proyección de $\mathbf{v}$ sobre el subespacio S ? ¿Cómo nos permite este resultado escribir un vector $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$?