Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Formación Básica
Taller de Álgebra Lineal - Condiciones intermedias

GUÍA 3: ESPACIOS VECTORIALES

---

1. Escriba las definiciones de vector de n componentes, de conjunto $\mathbb{R}^n$ y de suma de vectores y producto de un escalar por un vector de $\mathbb{R}^n$. Enuncie las propiedades de la suma de vectores de $\mathbb{R}^n$ y del producto de un escalar por un vector de $\mathbb{R}^n$.

2. Defina espacio vectorial (real).

3. Indique cuáles son las "operaciones habituales (estándar) de suma y producto por escalar", el "elemento nulo " y el "elemento opuesto" en cada uno de los siguientes conjuntos:

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \text{ es un vector de } n \text{ componentes reales}\}$$

$$\mathbb{M}_{m\times n} = \{A : A \text{ es una matriz } m \times n\}$$

$$\mathbb{M}_n = \{A : A \text{ es una matriz cuadrada de orden } n\}$$

$$\mathbb{P} = \{p : p = p(x) \text{ es un polinomio en la variable } x\}$$

$$\mathbb{P}_n = \{p : p = p(x) \text{ es una polinomio de grado menor o igual a } n\} \cup \{0\}$$

$$\mathbb{F}(\mathbb{R}) = \{f : f \text{ es una función de } \mathbb{R} \text{ en } \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{C}[a,b] = \{f : f \text{ es una función continua en } [a,b]\}$$

> **Recuerde:** $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{M}_{m\times n}$, $\mathbb{M}_n$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}_n$, $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{C}[a,b]$ con las operaciones habituales (estándar) de suma y producto por escalar definidos en cada uno, son ejemplos de espacios vectoriales.

4. En el conjunto $\mathbb{R}^2$ considere la suma habitual y el producto por escalar siguiente:

$$c(u_1, u_2) = (cu_1, 0),$$

donde c es una constante real y (u_1, u_2) un vector de $\mathbb{R}^2$. ¿Es este conjunto con esas operaciones un espacio vectorial?, justifique.

5. Escriba la definición de subespacio. Enuncie el teorema de caracterización de un subespacio.

6. ¿A qué se llaman subespacios triviales y subespacios propios? Dé un ejemplo de un subespacio propio de $\mathbb{P}_2$.

7. Determine la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta:

   (a) Si U y W son subespacios de $\mathbb{V}$ entonces $U \cap W$ es subespacio de $\mathbb{V}$.

   (b) Sean U y W subconjuntos del espacio vectorial $\mathbb{V}$. Si $U \cap W$ es subespacio de $\mathbb{V}$ entonces U y W son subespacios de $\mathbb{V}$.

   (c) Si U y W son subespacios de $\mathbb{V}$ entonces $U \cup W$ es subespacio de $\mathbb{V}$.

8. Defina combinación lineal, conjunto generado y conjunto generador. ¿El conjunto $\{1 + x, -x + x^2\}$ genera a $\mathbb{P}_2$?, justifique.

9. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k\}$ un subconjunto de $\mathbb{V}$. Demuestre los siguientes teoremas:

   (a) gen(S) es subespacio de $\mathbb{V}$.

   (b) Si $\mathbb{V}$ está generado por S y uno de los vectores de S se puede escribir como combinación lineal de los restantes vectores de S, entonces si se elimina dicho vector los $k-1$ vectores restantes siguen generando a $\mathbb{V}$.

10. Defina conjuntos li y ld. Dé un ejemplo de un conjunto li y otro ld del espacio $\mathbb{M}_{2\times 3}$.

11. Demuestre:

    (a) Un subconjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k\}$ del espacio vectorial $\mathbb{V}$ es ld si y sólo si al menos un vector de S es combinación lineal de los restantes vectores de S.

    (b) El subconjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ del espacio vectorial V es ld si y sólo si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$.

    (c) Si S es un subconjunto del espacio vectorial $\mathbb{V}$ que contiene al vector cero, entonces S es ld.

12. Escriba la definición de base de un espacio vectorial. Indique cuáles son las bases estándar de los espacios vectoriales finito dimensionales dados en (3).

13. Demuestre el siguiente teorema: Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ un subconjunto del espacio vectorial $\mathbb{V}$. Entonces S es una base de $\mathbb{V}$ si y sólo si todo vector de $\mathbb{V}$ se escribe de manera única como combinación lineal de los vectores de S.

14. Defina dimensión de un espacio vectorial. Indique las dimensiones de los espacios vectoriales finito dimensionales dados en (3). Obtenga la dimensión del subespacio $V = \{p = p(x) \in \mathbb{P}_2 : p(0) = p(1)\}$ de $\mathbb{P}_2$.

15. Sea S un subconjunto de n vectores de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión n. Demuestre que:

    (a) Si S es li entonces S es una base de $\mathbb{V}$.

    (b) Si S genera a $\mathbb{V}$ entonces S es una base de $\mathbb{V}$.

16. Sea $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ un conjunto generador del espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión 3. Demuestre que el conjunto $\{2\mathbf{u}, 2\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} + 2\mathbf{v} - 3\mathbf{w}\}$ es una base de $\mathbb{V}$.

17. Defina los tres espacios fundamentales de una matriz $m \times n$. ¿De qué espacios son subespacios cada uno de ellos?, justifique su respuesta.

18. Defina rango y nulidad de una matriz. Enuncie el teorema del rango y ejemplifíquelo.

19. Demuestre:

    (a) Si $\mathbf{x}_p$ es una solución particular del sistema lineal no homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, entonces toda solución de ese sistema puede escribirse como $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$ donde $\mathbf{x}_h$ es una solución del sistema homogéneo asociado $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

    (b) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente si y sólo si $\mathbf{b}$ es un vector del espacio de columnas de A.

    (c) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente si y sólo si el rango de A y el de $[A : \mathbf{b}]$ son iguales.

20. Defina vector de coordenadas y matriz de cambio de base en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que si P es la matriz de transición (cambio de base) de la base B' a la base B en $\mathbb{R}^n$, entonces P es invertible y la matriz de transición de B a B' es P^{-1}.