



Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Formación Básica
Álgebra Lineal - Condiciones intermedias
GUÍA 2: MATRICES y DETERMINANTES

MATRICES

1. Escriba la definición de matriz. Explique cuándo dos matrices son iguales.
2. Escriba las definiciones de: suma de matrices, producto de un escalar por una matriz y producto de matrices.
3. Defina el producto Ax . Expresar matricialmente un sistema de ecuaciones lineales indicando sus elementos más importantes.
4. Enuncie las propiedades que verifican las operaciones de suma de matrices y producto de un escalar por una matriz. Ejemplifique.
5. Enuncie las propiedades que verifica el producto de matrices. Ejemplifique.
6. Indique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones. Justifique.
 - (a) Sean A una matriz $m \times n$ y c un número real. Entonces si $cA = \mathbf{0}$ entonces $c = 0$ o $A = \mathbf{0}$.
 - (b) Sean A y B matrices cuadradas de orden n . Entonces $AB = BA$.
 - (c) Si $AC = BC$ entonces $A = B$.
 - (d) Si $AB = \mathbf{0}$ entonces $A = \mathbf{0}$ o $B = \mathbf{0}$.
7. Sea A una matriz $n \times n$ y $k \in \mathbb{N}_0$, ¿cuál es el significado de A^k ? ¿Es posible definir la potencia de una matriz si ésta no es cuadrada?
8. Escriba la definición de transpuesta de una matriz. ¿Cuándo una matriz se dice simétrica? Enuncie las propiedades de la transpuesta de una matriz.
9. Escriba la definición de matriz invertible o no singular. Si una matriz es invertible ¿es su inversa única?, justifique.
10. Enuncie y demuestre las propiedades de la inversa de una matriz.
11. Indique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones. Justifique.
 - (a) Si C es invertible y $AC = BC$ entonces $A = B$.
 - (b) Si A es una matriz invertible entonces el sistema de ecuaciones lineales de expresión matricial $Ax = b$ tiene única solución dada por $A^{-1}b$.
 - (c) Sean A y B matrices tales que las siguientes operaciones están bien definidas y $3A - 2I$ una matriz invertible tal que $3AX - B^t = (2X^t)^t$, entonces $X = (3A - 2I)^{-1} B^t$.
 - (d) Sea A una matriz cuadrada de orden n . Entonces $3AA^t$ es simétrica.

DETERMINANTES

1. Escriba las definiciones de menor y cofactor de un elemento de una matriz cuadrada. Ejemplifique.
2. ¿Qué es el determinante de una matriz cuadrada? Escriba la definición de determinante de una matriz $n \times n$.

3. Escriba las definiciones de matrices triangular superior, inferior y diagonal. Dé un ejemplo de cada una.
4. Enuncie **todas** las propiedades de determinantes. Ejemplifique cada una.
5. Demuestre que: A es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$. Además, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
6. Indique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones. Justifique.
- (a) Si A y B son matrices $n \times n$ entonces $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
 - (b) A es una matriz invertible si y sólo si el sistema de ecuaciones lineales de expresión matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admite únicamente la solución trivial.
 - (c) Si A y B son matrices invertibles $n \times n$ entonces $\det(-AB) = (-1)^n \det(B) \det(A)$.
 - (d) Si A , B y C son matrices 3×3 tal que $\det(C) = 0$ entonces $\det(AC + BC) = 0$.
 - (e) Si A y B son matrices cuadradas de orden 3, $\det(-3A^t B) = 3$ y $\det(A) = -1$, entonces B es invertible.
7. Enuncie la regla de Cramer. ¿Qué tipos de sistemas lineales se pueden resolver aplicando esta regla?
8. Escriba la definición de matriz adjunta. Teniendo en cuenta que $A \operatorname{Adj}(A) = \operatorname{Adj}(A)A = \det(A)I$, demuestre:

$$A \text{ es invertible} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{Adj}(A).$$