ÁLGEBRA LINEAL
Capítulo 1 - Sistemas de ecuaciones Lineales

1) Determine para qué valores de λ y μ el sistema dado es incompatible, indeterminado o tiene solución única:

$$\begin{cases} 2x - \lambda y + \mu z = 4 \\ x + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} Sol\ única: \mu \neq 2\ \forall \lambda \\ Infinitas\ soluciones: \mu = 2\ \forall \lambda \\ (nunca\ es\ incompatible) \end{cases}$

2) Determine para qué valores de α el sistema dado es incompatible, indeterminado o tiene solución única.

$$\begin{cases} v - x = 1 \\ 2u + v + \alpha x = 0 \\ -u + 3w + 1 = 0 \\ u + v + 3w + x = -3 \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} Incompatible \Leftrightarrow \alpha = 1 \\ Sol.única \Leftrightarrow \alpha \neq 1 \end{cases}$

3) Halle los valores de α para los cuáles un sistema como el siguiente admite solución única, infinitas soluciones o ninguna solución. Si existe un único valor de α para el cuál el sistema tiene solución única, resuelva el sistema para dicho valor de α. Ídem en el caso de infinitas soluciones

$$\begin{cases} x + 3y + z = \alpha \\ -x + y + \alpha z = -1 \\ 2x + \alpha y - z = \alpha + 1 \end{cases}.$$

Solución: $\begin{cases} Infinitas\ soluciones\ si\ \alpha = 2 \\ Sol.única\ si\ \alpha \neq 2\ y\ \alpha \neq 3 \\ Sist.\ incompatible\ si\ \alpha = 3 \end{cases}$

4) Analice la compatibilidad del sistema según los valores de α y β

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ x + y + z = \alpha \\ 2x + 3y + \beta z = -1 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} Incompatible\ si\ \beta = 2, \alpha \neq 0 \\ Infinitas\ soluciones\ si\ \beta = 2, \alpha = 0 \\ Solución\ única\ \beta \neq 2, \forall\ \alpha \end{cases}$$

5) Pruebe que el siguiente sistema es compatible para un único valor de α. Determine dicho valor y halle el conjunto solución:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + y - 5z = 2 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ -4x + y + 3z = \alpha \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} Compatible \Leftrightarrow \alpha = -4 \\ S = \left\{\left(\frac{9}{8}, -\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)\right\} \end{cases}$

6) Pruebe que el siguiente sistema es compatible para un único valor de α. Determine dicho valor y halle el conjunto solución:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ -x + 2y - z = -2 \\ 4x - 3y + 3z = 3\alpha \\ 2x + y + z = -1 \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} Compatible \Leftrightarrow \alpha = 1 \\ S = \left\{\left(-\frac{3}{5}z, -1 + \frac{1}{5}z, z\right) / z \in \mathbb{R} \right\} \end{cases}$

7) Dado el sistema (S), determine:

a) $A = \{\ \alpha \in R\ /\ \text{(S) es compatible}\}$

b) Resuelva el sistema (S) para el menor entero positivo del conjunto A

$$(s)\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 3\alpha z = 3 \\ x + 2y + 3(\alpha-1)z = 2 \\ 4x + 8y + 9z = 5\alpha \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} A = \left\{\frac{9}{5}, 1\right\} \\ \left\{(-2y+2\ ,\ y\ ,\ -\frac{1}{3}\ )\ /\ y \in R\right\} \end{cases}$.

8) Halle condiciones para los números $x,\ y,\ z$ de modo que el siguiente sistema en las incógnitas α, β y γ resulte compatible

$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta + \gamma = x \\ 4\beta + 4\gamma = y \\ \alpha - 2\beta = z \end{cases}$$

Solución: $y - 4x - 4z = 0$

9) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones a coeficientes complejos:

a) $\begin{cases} (1+i)x + (2-i)y = 7 \\ (2+i)x - (1-i)y = 1+i \end{cases}$

Solución: $\left\{\left(\frac{10}{7} - \frac{6}{7}i\ ,\ \frac{14}{7} + \frac{5}{7}i\right)\right\}$

b) $\begin{cases} x + i\,y = 1-i \\ i\,x + y = -2i \end{cases}$

Solución: $S = \left\{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\ ,\ -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)\right\}$

10) Calcule el valor de β para que el siguiente sistema homogéneo tenga otras soluciones además de la trivial y para dicho valor de β halle el conjunto solución:

$$\begin{cases} 2x + \beta y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + 7y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} \beta = 4 \\ S = \left\{\left(\frac{7}{2}z\ ,\ -\frac{3}{2}z\ ,\ z\right)\ /\ z \in R\right\} \end{cases}$.

11) En cada uno de los siguientes casos A es la matriz de los coeficientes y $\mathbf{b}$ es el vector de los términos independientes de un sistema de ecuaciones $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Escriba en forma explícita el sistema de ecuaciones y determine el conjunto solución:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$S = \{(0, x_2\ ,\ 0)\ /\ x_2 \in R\}$

b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

$S = \{(0, 2,\ x_3\ , -3)\ /\ x_3 \in R\}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$

Solución: $S = \{(-2x_2\ , x_2\ ,\ x_3\ , 2)\ /\ x_2\ ,\ x_3 \in R\}$

d) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Solución: $S = \varnothing$