

CAPÍTULO 7: EIGENVALORES Y EIGENVECTORES

[Fundamentos de
Álgebra Lineal
Larson-Falvo]

Sección 7.1: Resolución de la ejercitación (Prof. GRACIELA DENTI)

3) λ es eigenvalor de A y $\bar{x}$ es un eigenvector de A correspondiente a λ si

$$\underline{A\bar{x} = \lambda\bar{x}} \quad (\bar{x} \neq 0)$$

• Para $\lambda_1 = 0$ y $\bar{x}_1 = (1, -1)$: $A\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\lambda_1 \bar{x}_1 = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
entonces $A\bar{x}_1 = \lambda_1 \bar{x}_1 \Rightarrow \lambda_1$ es eigenvalor de A y $\bar{x}_1$ es un eigenvector correspondiente.

• Para $\lambda_2 = 2$ y $\bar{x}_2 = (1, 1)$: $A\bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\lambda_2 \bar{x}_2 = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
entonces $A\bar{x}_2 = \lambda_2 \bar{x}_2$ ✓

9) Para A , λ_i y $\bar{x}_i$ del ej. 3)

$$\left. \begin{array}{l} a) A.(c\bar{x}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall c \in \mathbb{R} \\ \lambda_1.(c\bar{x}_1) = 0 \cdot \begin{bmatrix} c \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall c \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{A.(c\bar{x}_1) = 0.(c\bar{x}_1)} \quad \underline{\forall c \in \mathbb{R}}$$

entonces $\underline{c\bar{x}_1}$ también es eigenvector de A correspondiente a $\lambda_1 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} b) A.(c\bar{x}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c \\ 2c \end{bmatrix} \quad \forall c \in \mathbb{R} \\ \lambda_2.(c\bar{x}_2) = 2 \cdot \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c \\ 2c \end{bmatrix} \quad \forall c \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{A.(c\bar{x}_2) = 2.(c\bar{x}_2)} \quad \underline{\forall c \in \mathbb{R}}$$

entonces $\underline{c\bar{x}_2}$ también es eigenvector de A correspondiente a $\lambda_2 = 2$

$$13) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

a) $\bar{x} = (2, -4, 6)$ es eigenvector de A?

$$A \cdot \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -16 \\ 24 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \lambda \bar{x} = \begin{bmatrix} 2\lambda \\ -4\lambda \\ 6\lambda \end{bmatrix}$$

$$\therefore A \cdot \bar{x} = \lambda \bar{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda = 8 \\ -4\lambda = -16 \\ 6\lambda = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\lambda = 4} \quad \text{luego } \bar{x} \text{ es eigenvector de A} \\ \text{correspondiente a } \lambda = 4$$

b) $\bar{x} = (2, 0, 6)$ es eigenvector de A?

$$A \cdot \bar{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -16 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \lambda \bar{x} = \begin{bmatrix} 2\lambda \\ 0 \\ 6\lambda \end{bmatrix} \quad \therefore A \bar{x} = \lambda \bar{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda = 4 \\ 0 = -16 \\ 6\lambda = 12 \end{cases} \text{ absurdo!}$$

luego $\bar{x}$ no es eigenvector de A.

$$23) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

a) Ecuación característica : $\det(\lambda I_3 - A) = 0$

$$\det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{bmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ 2 & \lambda-5 & 2 \\ 6 & -6 & \lambda+3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore (\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+3) - 12(\lambda-5) + 12(\lambda-1) + 4(\lambda+3) - 48 = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 = *$$

$$= (\lambda-3)(\lambda^2-9) = \underline{(\lambda-3)^2(\lambda+3)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\lambda_1 = -3} \text{ y } \underline{\lambda_2 = 3} \text{ (con multiplicidad 2)}$$

* Como ③ es raíz del polinomio $\Rightarrow$ por Ruffini:

(por simple inspección)

$$\begin{array}{r|rrrr} ③ & 1 & -3 & -9 & 27 \\ & 1 & 0 & -9 & 0 \end{array}$$

$\therefore \lambda^2 - 9$ es el cociente de dividir el polinomio por $(\lambda-3)$

b) Los eigenvalores de A son las soluciones de la Ecuación Característica anterior : $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = 3$

• Para $\lambda_1 = -3$ el eigenvector correspondiente se obtiene de resolver el sistema homogéneo : $(\lambda_1 I - A)\bar{x} = \bar{0}$, donde la matriz de

coeficientes es : $(\lambda_1 I - A) = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 2 & -8 & 2 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -9 & 3 \\ 0 & -9 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

entonces el sist. homogéneo tiene solución :

$$x_3 = t, \quad x_2 = \frac{-x_3}{3} = \frac{1}{3}t, \quad x_1 = \frac{-x_3 + x_2}{-2} = \frac{1}{3}t \quad : \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}t \\ \frac{1}{3}t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \quad t \neq 0$$

Luego, para $\lambda_1 = -3$ un eigenvector correspondiente es $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$

• Para $\lambda_2 = 3$, resolvemos el sist. homogéneo : $(\lambda_2 I - A)\bar{x} = \bar{0}$

donde : $(\lambda_2 I - A) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore x_3 = t, \quad x_2 = s, \quad x_1 = x_2 - x_3 = s - t$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Luego, para $\lambda = 3$ obtendremos 2 eigenvectores correspondientes:

$\underline{(1, 1, 0)}$ y $\underline{(-1, 0, 1)}$

41) Teorema de Cayley-Hamilton : "Una matriz satisface su Ecuación Característica"

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Ec. Característica : $\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 0 \\ 3 & \lambda - 2 \end{bmatrix} =$

$$= (\lambda - 4) \cdot (\lambda - 2) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

∴ A satisface su Ecuación Característica: $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow$

$$\underline{A^2 - 6A + 8I = 0}$$

$$D/ \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ -18 & 4 \end{bmatrix} \end{array} = A^2$$

$$6A = \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ -18 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2 - 6A + 8I = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ -18 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ -18 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16-24+8 & 0 \\ -18+18+0 & 4-12+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A satisface su EC característica.

52) $\lambda=0$ es un eigenvalor de A $\Leftrightarrow$ A es singular

$$D/ \underline{\lambda=0 \text{ es un eigenvalor de } A_{n \times n}} \Leftrightarrow \det(0 \cdot I_n - A) = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot I_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \det(-A) = \underbrace{(-1)^n}_{\neq 0} \det(A) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow \underline{A \text{ es singular}}$$

54) A y A^T tienen los mismos eigenvalores

D/ Sea λ un eigenvalor de A, entonces $\det(\lambda I - A) = 0$ (Hipótesis)

Queremos ver que λ es también eigenvalor de A^T , o sea: $\det(\lambda I - A^T) = 0$

Como $\lambda I = (\lambda I)^T$ (por ser diagonal) entonces la matriz:

$$\underline{\lambda I - A^T} = (\lambda I)^T - A^T = \underbrace{(\lambda I - A)^T}_{\substack{\uparrow \\ \text{por propied.} \\ \text{de transpuestas}}} \quad \text{la igualdad de matrices}$$

implica la igualdad de determinantes: $\det(\lambda I - A^T) = \det(\lambda I - A)^T =$

$$\begin{array}{l} \uparrow \\ \text{por propied.} \\ \text{de det.} \end{array} = \det(\lambda I - A) \quad \text{entonces } \det(\lambda I - A^T) = \underline{\det(\lambda I - A) = 0} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{por hipótesis} \end{array}$$

Logo λ es eigenvalor de A^T

Si bien los eigenvalores de A y A^T son los mismos, los eigenespacios son distintos pues los sistemas homogéneos:

$(\lambda I - A)\bar{x} = \vec{0}$ y $(\lambda I - A^T)\bar{x} = \vec{0}$ tienen en general distinto conjunto solución (al tener distintas matrices de coeficientes)

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A^T) = \lambda \cdot (\lambda - 7) \Rightarrow A$ y A^T tienen eigenvalores $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 7$

• Para $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} \lambda I - A = -A &= \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{x_2}{2} = \frac{1}{2}t \\ x_2 &= t \end{aligned} \quad \text{o.o. } \bar{x} = t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda I - A^T &= -A^T = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}t \\ x_2 &= t \end{aligned} \quad \text{o.o. } \bar{x} = t \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$t \neq 0$

O sea, el eigenespacio correspondiente a $\lambda = 0$ para A es: $\text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

y el " " " " " " A^T es: $\text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Geométricamente, los eigenespacios son 2 rectas distintas.

• De igual manera para $\lambda = 7$ se puede ver que los eigenespacios correspondientes para A y A^T son distintos.

56) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ / $T(\vec{v}) = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$ donde $\vec{u}$: recta fija de $\mathbb{R}^2$

o.o. A (matriz estándar de T) tiene eigenvalores 0 y 1.

D/ $T(\vec{v}) = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$ donde $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\|\vec{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2$

$B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ Base estándar de $\mathbb{R}^2$

6

$$\underline{T(1,0)} = \text{proy}_{\vec{u}}(1,0) = \frac{(\mu_1, \mu_2) \cdot (1,0)}{\|\vec{u}\|^2} (\mu_1, \mu_2) = \frac{\mu_1}{\|\vec{u}\|^2} (\mu_1, \mu_2) = \left(\frac{\mu_1^2}{\|\vec{u}\|^2}, \frac{\mu_1 \mu_2}{\|\vec{u}\|^2} \right)$$

$$\underline{T(0,1)} = \text{proy}_{\vec{u}}(0,1) = \frac{(\mu_1, \mu_2) \cdot (0,1)}{\|\vec{u}\|^2} (\mu_1, \mu_2) = \frac{\mu_2}{\|\vec{u}\|^2} (\mu_1, \mu_2) = \left(\frac{\mu_1 \mu_2}{\|\vec{u}\|^2}, \frac{\mu_2^2}{\|\vec{u}\|^2} \right)$$

o.o la matriz estándar de T tiene como columnas a los transformados de los vectores de la Base estándar:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{\mu_1^2}{\|\vec{u}\|^2} & \frac{\mu_1 \mu_2}{\|\vec{u}\|^2} \\ \frac{\mu_1 \mu_2}{\|\vec{u}\|^2} & \frac{\mu_2^2}{\|\vec{u}\|^2} \end{bmatrix}$$

Para hallar los eigenvalores de A,
resolvemos la Ecuación Característica:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - \frac{\mu_1^2}{\|\vec{u}\|^2} & -\frac{\mu_1 \mu_2}{\|\vec{u}\|^2} \\ -\frac{\mu_1 \mu_2}{\|\vec{u}\|^2} & \lambda - \frac{\mu_2^2}{\|\vec{u}\|^2} \end{pmatrix} = \left(\lambda - \frac{\mu_1^2}{\|\vec{u}\|^2} \right) \cdot \left(\lambda - \frac{\mu_2^2}{\|\vec{u}\|^2} \right) - \frac{\mu_1^2 \mu_2^2}{\|\vec{u}\|^4} = \\ &= \lambda^2 - \lambda \frac{\mu_1^2}{\|\vec{u}\|^2} - \lambda \frac{\mu_2^2}{\|\vec{u}\|^2} + \frac{\mu_1^2 \mu_2^2}{\|\vec{u}\|^4} - \frac{\mu_1^2 \mu_2^2}{\|\vec{u}\|^4} = \lambda^2 - \lambda \frac{(\mu_1^2 + \mu_2^2)}{\|\vec{u}\|^2} = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0 \end{aligned}$$

Entonces $\lambda=0$ y $\lambda=1$ son los eigenvalores de A.

59) ¿a y d? / los eigenvalores de $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ son $\lambda_1=0$ y $\lambda_2=1$

Como $\lambda_1=0$ y $\lambda_2=1$ son los eigenvalores de A, verifican la Ecuación

$$\text{Características: } \begin{cases} \det(0I - A) = \det \begin{bmatrix} -a & -b \\ 0 & -d \end{bmatrix} = \underline{ad=0} \Rightarrow \underline{a=0} \vee \underline{d=0} \quad (1) \\ \det(1I - A) = \det \begin{bmatrix} 1-a & -b \\ 0 & 1-d \end{bmatrix} = \underline{ad - a - d + 1 = 0} \Rightarrow \underline{a=1-d} \quad (2) \end{cases}$$

o.o de (1) y (2): $\underline{a=0, d=1}$ o $\underline{d=0, a=1}$

60) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ no tiene eigenvalores.

D/ $\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

o.o. $\nexists \lambda \in \mathbb{R}$ que verifique la Ec. Característica de $A \Rightarrow$
 A no tiene Eigenvalores (reales)

¿ V o F ?

61) a) F. Debe decir $\bar{x} \neq \vec{0}$ (ver definición de eigenvalor)

b) V. Por teorema 7.1 (ver Ej. 9)

c) V. Por teorema 7.2 (ver recuadro de determinación de eigenvalores y eigenvectores)

62) a) $\bar{x} \cdot A \neq A \cdot \bar{x}$. Para que sea Verdadero debe decir:

"... multiplicar A por el vector $\bar{x}$ genera un vector $\lambda \bar{x} \parallel \bar{x}$."

b) F. $A_{n \times n}$ puede tener a lo sumo n eigenvalores (reales)
 (ver ejemplos de toda la sección)

c) F. Para obtener un subespacio de $\mathbb{R}^n$, debo agregar el vector nulo al conjunto de todos los eigenvectores de A para λ .

64) eigenvalor $\lambda = 3$ de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

los eigenvectores correspondientes son las soluciones del sist. homogéneo

$(3I - A)\bar{x} = \vec{0}$. La matriz de coeficientes: $(3I - A) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$x_1 = s, x_2 = 0, x_3 = t$ o.o. los eigenvectores correspondientes a $\lambda = 3$

son de la forma: $\bar{x} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{eigenvector li}} + t \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{eigenvector li}} \quad s, t \in \mathbb{R} - \{0\}$

o.o. dim eigenspace = 2

8

El eigenspacio correspondiente a $\lambda=3$ es:

$$E_{\lambda=3} = \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} / s, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

66) $\lambda=3$ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Los eigenvectores correspondientes

se obtienen de resolver el sistema homogéneo: $(3I - A)\bar{x} = \bar{0}$

donde la matriz de coeficientes $[3I - A] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \quad t \neq 0$

$\therefore \bar{x} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ eigenspacio $E_{\lambda=3} = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} / t \in \mathbb{R} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$\dim E_{\lambda=3} = 1$

63) $\lambda=3$ $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. $(3I - A) \cdot \bar{x} = \bar{0}$ donde $[3I - A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$x_1 = r, x_2 = s, x_3 = t \quad \therefore \bar{x} = \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad r, s, t \in \mathbb{R} - \{0\}$

eigenspacio $E_{\lambda=3} = \left\{ r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} / r, s, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\dim E_{\lambda=3} = 3$

$\swarrow$
l.i

Nota: En los ejercicios 63) a 66) las matrices son triangulares $\Rightarrow$ teorema 7.3
sus eigenvalores son los elementos de la diagonal principal $\Rightarrow$
las matrices tienen eigenvalor triple (o con multiplicidad 3) $\therefore \lambda=3$.

74) ¿? / $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ tiene eigenvalores reales.

Ec característica: $\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \lambda - \cos \theta \end{bmatrix} = (\lambda - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta =$
 $= \lambda^2 - 2 \cos \theta \lambda + \underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1 = \lambda^2 - 2 \cos \theta \lambda + 1 = 0$

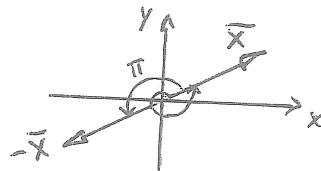
resolvente: $\lambda = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta}$

° $\lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -\sin^2\theta \geq 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

y $\lambda = \cos\theta = \cos(k\pi)$:
 $\nearrow \lambda_1 = 1$
 $\searrow \lambda_2 = -1$

Geométricamente, como A es una matriz de rotación en el plano / $A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$, el efecto de multiplicar A por un vector $\vec{x}$ del plano es una rotación del vector $\vec{x}$ en un ángulo θ múltiplo de π , es decir, se obtiene el mismo vector $\vec{x}$ ($\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$) o su opuesto: $-\vec{x}$ ($\theta = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$).

$A\vec{x} = \lambda \vec{x}$ con $\lambda \in \{1, -1\}$



Lección 7.2. FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL DE $\mathbb{R}$.

LARSON y D. FALVO.

$$5) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[P: I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/3 & 1/12 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ -1/3 & 1/12 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}A = \begin{bmatrix} 10/3 & -10/3 & 5 \\ 0 & 3/4 & 0 \\ 1/3 & -1/12 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}}$$

A es semejante a una matriz diagonal, pues $\exists P/P^{-1}AP$ es una matriz diagonal.

$\therefore$ A es diagonalizable.

$$13) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{Como A es triangular los eigenvalores son los elementos de la diagonal principal}$$

$$\lambda_1 = 1 \text{ tiene multiplicidad } 2, \quad \lambda_2 = 2$$

$$I - A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 2y - z = 0 \\ z = 0 \\ x = t \end{array} \quad t \neq 0 \quad \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La dimensión del eigenspacio es 1.

$\therefore$ La matriz A no es diagonalizable.

(La multiplicidad de un eigenvalor es mayor o igual que la dimensión de su eigenspacio. Libro pág 428)

El eigenspacio correspondiente a λ_2 tiene dimensión 1.

11) Se obtienen 2 eigenvectores linealmente independientes y no 3.

$$17) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \quad \lambda(\lambda - 2) = 0 \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2$$

$n = 2$ A tiene 2 eigenvalores distintos. A es diagonalizable.

$$25) A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 & -3 \\ 0 & \lambda - 3 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 2) [(\lambda - 3)(\lambda - 2) - 2] = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 4)$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0 \quad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 4 \quad \lambda_3 = 1$$

3 eigenvalores distintos, A es diagonalizable.

$$2I - A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 2y - 3z = 0 \\ z = 0 \\ x = t \quad t \neq 0 \end{array} \quad \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4I - A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 2x + 2y - 3z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ z = t \quad t \neq 0, y = -2t \\ x = \frac{3}{2}t \end{array} \quad \begin{bmatrix} \frac{3}{2}t \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$I - A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} -x + 2y - 3z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ z = t \quad t \neq 0, y = t \\ x = -t \end{array} \quad \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{haciendo cálculos} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P^{-1} A P \quad (\text{la respuesta no es \u00fanica})$$

$$29) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ -4 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad | \lambda I - A | = \begin{vmatrix} \lambda & 3 & -5 \\ 4 & \lambda - 4 & 10 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 4) (\lambda (\lambda - 4) - 12)$$

$$(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda - 12) = 0 \quad \lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 6 \quad \lambda_3 = -2$$

3 eigenvalores distintos, A es diagonalizable.

$$4I - A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 4 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 4x + 3y - 5z = 0 \\ -3y + 15z = 0 \\ z = t \quad t \neq 0, y = 5t \\ x = -5/2 t \end{array} \quad \begin{bmatrix} -5/2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$6I - A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 6x + 3y - 5z = 0 \\ z = 0 \\ y = t \quad t \neq 0 \\ x = -1/2 t \end{array} \quad \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2I - A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 4 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} -2x + 3y - 5z = 0 \\ z = 0 \\ y = t \quad t \neq 0 \\ x = 3/2 t \end{array} \quad \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -5/2 & -1/2 & 3/2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 3/4 & -5 \\ 1/2 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = P^{-1} A P$$

(la \u00f3rta no es \u00fanica)

$$31) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad | \lambda I - A | = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 2) \quad 13$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad 2.

$$2I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \\ y = t \quad t \neq 0 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La dimensión del eigenspace para el eigenvalor repetido es 1. La matriz A no es diagonalizable.

$$35) T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : T(x, y) = (x + y, x + y)$$

matriz estándar de T : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

por el ejercicio 17 sabemos que A es diagonalizable y
 $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 2$

$$0I - A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x + y = 0 \\ y = t \quad t \neq 0 \\ x = -t \end{array} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2I - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x - y = 0 \\ y = t \quad t \neq 0 \\ x = t \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \{ (-1, 1), (1, 1) \}$$

46) a) V. ver teor 7.5 pág 437

b) F. ver ejemplo 6 pág 441

49) A es diagonalizable $\Rightarrow A^t$ es diagonalizable. 14

A es diagonalizable $\Rightarrow \exists P / P^{-1}AP = D$, D matriz diagonal

$$P^{-1}AP = D \Rightarrow (P^{-1}AP)^t = D^t \Rightarrow P^t A^t (P^{-1})^t = D^t \Rightarrow P^t A^t (P^t)^{-1} = D^t$$

D^t es una matriz diagonal

$\therefore \exists R / R^{-1}A^t R$ es una matriz diagonal donde $R = (P^t)^{-1}$
 A^t es diagonalizable.

51) Si A es diagonalizable con n eigenvalores reales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$\Rightarrow |A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

A es diagonalizable $\Rightarrow \exists P / P^{-1}AP = D$, D matriz diagonal

$$P^{-1}AP = D \Rightarrow AP = PD \Rightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow |A| = |PDP^{-1}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A| = |P| |D| |P^{-1}| \Rightarrow |A| = |P| |D| \frac{1}{|P|} \Rightarrow |A| = |D| \Rightarrow$$

$|P| \neq 0$ por $\exists P^{-1}$

$$\Rightarrow |A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

55) Si A es una matriz diagonalizable no singular $\Rightarrow$

A^{-1} es diagonalizable.

A es diagonalizable $\Rightarrow \exists P / P^{-1}AP = D$, D matriz diagonal

$$P^{-1}AP = D \xRightarrow{(1)} (P^{-1}AP)^{-1} = D^{-1} \Rightarrow P^{-1}A^{-1}P = D^{-1}$$

$$(1) \ A \text{ no singular} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow |D| \neq 0 \Rightarrow \exists D^{-1}.$$

D^{-1} es una matriz diagonal.

$\therefore \exists R / R^{-1}A^{-1}R$ es una matriz diagonal donde $R = P$

A^{-1} es diagonalizable.

56) $A = \begin{bmatrix} 3 & k \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad k \neq 0$

15

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -k \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2$$

$\lambda = 3$ multiplicidad 2.

$$3I - A = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k \neq 0$$

$$ky = 0$$

$$y = 0$$

$$x = t \quad t \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$n = 2$ A no tiene 2 eigenvectores li. A no es diagonalizable.