

Consideraciones generales

A continuación se presentan los lineamientos principales de resolución de algunos ejercicios, de la correspondiente selección elaborada por la cátedra, del libro Fundamentos de Álgebra lineal de R. Larson y D. Falvo. Se considera pertinente que el estudiante realice la resolución completa de cada ejercicio propuesto, justificando cada paso, estas páginas sólo pretenden colaborar en el control de resultados de los mismos.

Sección 7.2

5)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[P:I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/12 & 0 \end{array} \right]$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ -1/3 & 1/12 & 0 \end{bmatrix} \quad P^{-1}A = \begin{bmatrix} 10/3 & -10/3 & 5 \\ 0 & 3/4 & 0 \\ 1/3 & -1/12 & 0 \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A es semejante a una matriz diagonal, pues $\exists P$ tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal.

$\therefore A$ es diagonalizable

13)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Como A es triangular los eigenvalores son los elementos de la diagonal principal.

$\lambda_1 = 1$ tiene multiplicidad 2, $\lambda_2 = 2$

$$I - A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 2y - z = 0 \\ z = 0 \\ x = t \quad t \neq 0 \end{array}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{eigenvector} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La dimensión del eigenspacio es 1.

$\therefore A$ no es diagonalizable

(La multiplicidad de un eigenvalor es mayor o igual que la dimensión de su eigenspacio; libro pág. 428. El eigenspacio correspondiente a λ_2 tiene dimensión 1.

Se obtienen dos eigenvectores linealmente independientes y no tres).

17)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \quad \lambda(\lambda - 2) = 0 \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2$$

$n=2$, A tiene dos eigenvalores distintos. $\therefore A$ es diagonalizable

25)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 & -3 \\ 0 & \lambda - 3 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 2)[(\lambda - 3)(\lambda - 2) - 2] = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0 \quad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 4 \quad \lambda_3 = 1$$

$n=3$, A tiene tres eigenvalores distintos. $\therefore A$ es diagonalizable

$$2I - A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} 2y - 3z &= 0 \\ z &= 0 \\ x &= t \quad t \neq 0 \end{aligned}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{eigenvector} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4I - A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} 2x + 2y - 3z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \\ z &= t \quad t \neq 0 \end{aligned}$$

$$y = -2t \quad x = \frac{7}{2}t$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2}t \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{eigenvector} \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$I - A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} -x + 2y - 3z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ z = t \quad t \neq 0 \end{array}$$

$$y = t \quad x = -t$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{eigenvector} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{2} & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{haciendo cálculos} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P^{-1}AP \quad (\text{la respuesta no es única})$$

29)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ -4 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 3 & -5 \\ 4 & \lambda - 4 & 10 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda(\lambda - 4) - 12) =$$

$$(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda - 12) = 0 \quad \lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 6 \quad \lambda_3 = -2$$

Tres eigenvalores distintos. A es diagonalizable.

$$4I - A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 4 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} -4x + 3y - 5z = 0 \\ -3y + 15z = 0 \\ z = t \quad t \neq 0 \end{array}$$

$$y = 5t \quad x = \frac{-5}{2}t \quad \text{eigenvector} \begin{bmatrix} \frac{-5}{2} \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$6I-A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 6x + 3y - 5z = 0 \\ z = 0 \\ y = t \quad t \neq 0 \end{array}$$

$$x = \frac{-1}{2}t \quad \text{eigenvector} \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2I-A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 4 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} -2x + 3y - 5z = 0 \\ z = 0 \\ y = t \quad t \neq 0 \end{array}$$

$$x = \frac{3}{2}t \quad \text{eigenvector} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -5/2 & -1/2 & 3/2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 3/4 & -5 \\ 1/2 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = P^{-1}AP$$

(la respuesta no es única)

31)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 2)$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 \quad \text{con multiplicidad } 2$$

$$2I-A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x=0 \\ z=0 \\ y=t \quad t \neq 0 \end{array} \quad \text{eigenvector} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La dimensión del eigenspacio para el eigenvalor repetido es 1. La matriz A no es diagonalizable.

35) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $T(x, y) = (x + y, x + y)$ Matriz estándar de T: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Por el ejercicio 17 sabemos que A es diagonalizable y $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 2$

$$0I-A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x+y=0 \\ y=t \quad t \neq 0 \\ x=-t \end{array} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$I-A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x-y=0 \\ y=t \quad t \neq 0 \\ x=t \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \{(-1, 1), (1, 1)\}$$

46) a) V, ver teorema 7.5 pág. 437

b) F, ver ejemplo 6 pág. 441

49) A es diagonalizable $\Rightarrow A^t$ es diagonalizable

A es diagonalizable $\Rightarrow \exists P$ tal que $P^{-1}AP = D$, D matriz diagonal

$$P^{-1}AP = D \Rightarrow (P^{-1}AP)^t = D^t \Rightarrow P^t A^t (P^{-1})^t = D^t \Rightarrow P^t A^t (P^t)^{-1} = D^t$$

D^t es una matriz diagonal

$\therefore \exists R$ tal que $R^{-1}A^t R$ es una matriz diagonal donde $R = (P^t)^{-1}$

A^t es diagonalizable

51) Si A es diagonalizable con n eigenvalores reales $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \Rightarrow |A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$

A es diagonalizable $\Rightarrow \exists P$ tal que $P^{-1}AP = D$, D matriz diagonal

$$P^{-1}AP = D \Rightarrow AP = PD \Rightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow |A| = |PDP^{-1}| \Rightarrow |A| = |P||D||P^{-1}| \Rightarrow$$

$$|A| = |P||D| \frac{1}{|P|} \Rightarrow |A| = |D| \Rightarrow |A| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$

$$|P| \neq 0 \text{ pues } \exists P^{-1}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

55) Si A es una matriz diagonalizable no singular $\Rightarrow A^{-1}$ es diagonalizable

A es diagonalizable $\Rightarrow \exists P$ tal que $P^{-1}AP = D$, D matriz diagonal

$$P^{-1}AP = D \Rightarrow (P^{-1}AP)^{-1} = D^{-1} \Rightarrow P^{-1}A^{-1}P = D^{-1}$$

$$A \text{ no es singular} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow |D| \neq 0 \Rightarrow \exists D^{-1}$$

D^{-1} es una matriz diagonal.

$\therefore \exists R$ tal que $R^{-1}A^{-1}R$ es una matriz diagonal donde $R = P$

A^{-1} es diagonalizable.

$$56) A = \begin{bmatrix} 3 & k \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad k \neq 0$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -k \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2 \quad \lambda = 3 \text{ con multiplicidad 2}$$

$$3I - A = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad k \neq 0 \quad ky = 0 \quad y = 0 \quad x = t \quad t \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

n=2. A no tiene dos eigenvectores li. A no es diagonalizable.