Álgebra y Geometría II

Sección 6.2

Ejercicio 5. Encuentre el kernel de la transformación lineal: $T : P_3 \to \mathbb{R} \,/\, T\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\right) = a_0$

$T\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\right) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$, por lo tanto, $\ker(T) = \left\{ p(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 / a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$

Ejercicio 8. Encuentre el kernel de la transformación lineal:

$T : P_3 \to P_2 \,/\, T\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\right) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$

$T\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\right) = 0 \Rightarrow a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 = 0$, por lo tanto, $a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0$.

Luego, $\ker(T) = \left\{ p(x) = a_0 / a_0 \in \mathbb{R} \right\}$, es decir, es el conjunto de los polinomios constantes.

En los ejercicios 11 a 18, la transformación lineal T está definida por $T(v) = Av$. Encuentre una base para (a) el kernel de T y (b) el rango de T .

Ejercicio 18. Sea $T(v) = Av$ donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Encuentre una base para (a) el kernel de T

Debemos hallar los $v = \left(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\right)^T$ tales que $T(v) = 0$, o sea, tales que $Av = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 9 & 9 & 2 & 8 \\ 0 & 7 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 9 & 9 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{13}{9} & \frac{16}{9} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 9 & 9 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -9 & 13 & 16 \end{pmatrix} \textbf{(*)}$$

El sistema equivalente resulta, $\begin{cases} -v_1+3v_2+2v_3+v_4+4v_5=0 \\ 9v_2+9v_3+2v_4+8v_5=0 \\ -9v_3+13v_4+16v_5=0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} v_1=3v_2+2v_3+v_4+4v_5=3\left(-\frac{15}{9}s-\frac{24}{9}r\right)+2\left(\frac{13}{9}s+\frac{16}{9}r\right)+s+r=-\frac{10}{9}s-\frac{31}{9}r \\ v_2=-v_3-\frac{2}{9}v_4-\frac{8}{9}v_5=-\left(\frac{13}{9}s+\frac{16}{9}r\right)-\frac{2}{9}s-\frac{8}{9}r=-\frac{15}{9}s-\frac{24}{9}r \\ v_3=\frac{13}{9}s+\frac{16}{9}r \\ v_4=s \\ v_5=r \end{cases}$$

Entonces, $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{10}{9}s-\frac{31}{9}r \\ -\frac{15}{9}s-\frac{24}{9}r \\ \frac{13}{9}s+\frac{16}{9}r \\ s \\ r \end{bmatrix}=s\begin{bmatrix} -\frac{10}{9} \\ -\frac{15}{9} \\ \frac{13}{9} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+r\begin{bmatrix} -\frac{31}{9} \\ -\frac{24}{9} \\ \frac{16}{9} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, y una base de $\ker(T)$, es $B=\left\{\begin{bmatrix} -\frac{10}{9} \\ -\frac{15}{9} \\ \frac{13}{9} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -\frac{31}{9} \\ -\frac{24}{9} \\ \frac{16}{9} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

b) el recorrido de T

$$\mathrm{R}(T)=Col(A)=Gen\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

Por (*), se tiene que las tres primeras columnas de A son l.i, por lo tanto una base para $\mathrm{R}(T)$ es

$B'=\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$, y resulta entonces $\mathrm{R}(T)=\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 28. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\ker(T)$

Debemos hallar los $v=(v_1,v_2,v_3)^T$ tales que $T(v)=0$, o sea, tales que $Av=0$.

Es decir, debemos considerar el sistema $\begin{cases} v_1 + 0v_2 + 0v_3 = 0 \\ 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 = 0 \\ 0v_1 + 0v_2 + 1v_3 = 0 \end{cases}$, cuya solución es $\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = \alpha \\ v_3 = 0 \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, por lo tanto $\ker(T) = \{(0,\alpha,0)/\alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(0,1,0)/\alpha \in \mathbb{R}\} = Gen\{(0,1,0)\}$.

b) nulidad(T)

Por a), una base de $\ker(T)$ es $B = \{(0,1,0)\}$. Luego $nulidad(T) = 1$.

c) $\mathrm{R}(T)$

Debemos hallar el $R(T) = \{T(v)/v \in V\}$ que es el espacio generado por las columnas de A , es decir

$$R(T) = Gen\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} / \ x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

d) $rango(T)$

Sabemos que $rango(T) + nulidad(T) = \dim(\mathbb{R}^3)$, y por b) tenemos que $nulidad(T) = 1$, por lo tanto, $rango(T) = 2$

Ejercicio 32. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $rango(T) = 1 \Rightarrow R(T)$ es una recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen.

$1 + nulidad(T) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3 \Rightarrow nulidad(T) = 2 \Rightarrow \ker(T)$ es un plano que pasa por el origen.

Ejercicio 34. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $rango(T) = 3 \Rightarrow R(T)$ es todo $\mathbb{R}^3$

$3 + nulidad(T) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3 \Rightarrow nulidad(T) = 0 \Rightarrow \ker(T)$ es el origen en $\mathbb{R}^3$

Ejercicio 40. $T:\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ y $rango(T) = 2$

$2 + nulidad(T) = \dim(\mathbb{R}^5) = 5 \Rightarrow nulidad(T) = 3$

Ejercicio 47. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la transformación lineal que proyecta u sobre $v = (2,-1,1)$

a) Determine el rango y la nulidad de T .

$T(u) = \dfrac{u.v}{v.v}v \Rightarrow R(T) \subset Gen\{v\}$, es decir que $R(T)$ es un subespacio de $Gen\{v\}$, que no es el subespacio cero $(v = T(v) \in R(T))$, es de dimensión uno, por lo tanto $R(T)$ y $Gen\{v\}$ tienen la misma dimensión. Luego, $R(T) = Gen\{v\}$ es una recta por el origen en la dirección de v.

Por lo tanto, $rango(T) = 1$,

$1 + nulidad(T) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3 \Rightarrow nulidad(T) = 2$.

b) Determine una base para el kernel de T .

$T(u) = 0 \Leftrightarrow \frac{u.v}{v.v} v = 0 \Leftrightarrow u.v = 0 \Leftrightarrow (u_1, u_2, u_3).(2,-1,1) \Leftrightarrow 2u_1 - u_2 + u_3 = 0$, si $u_3 = t,\ u_2 = s$ entonces $u_1 = \frac{s-t}{2}$ y se tiene que

$$\ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{s-t}{2} \\ s \\ t \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\} = Gen \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

, una base para $\ker(T)$ es

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

. Notar que $\ker(T)$ es un plano que pasa por el origen y es perpendicular a v .

Sección 6.3.

Ejercicio 7. $T(x, y, z) = (3z - 2y, 4x + 11z)$

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (0,4) \\ T(0,1,0) &= (-2,0) \\ T(0,0,1) &= (3,11) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ La matriz estándar de T es: $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 11 \end{bmatrix}$

Ejercicio 9. $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,0,0,0)$

$$\begin{aligned} T(1,0,0,0) &= (0,0,0,0) \\ T(0,1,0,0) &= (0,0,0,0) \\ T(0,0,1,0) &= (0,0,0,0) \\ T(0,0,0,1) &= (0,0,0,0) \end{aligned}$$

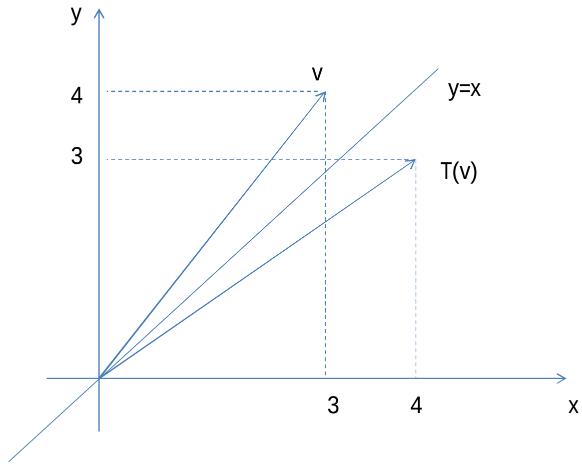
$\Rightarrow$ La matriz estándar de T es: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ejercicio 18. a) $T(x, y) = (y, x),\ v = (3,4)$

$$a)\ \begin{aligned} T(1,0) &= (0,1) \\ T(0,1) &= (1,0) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $Av = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

c)

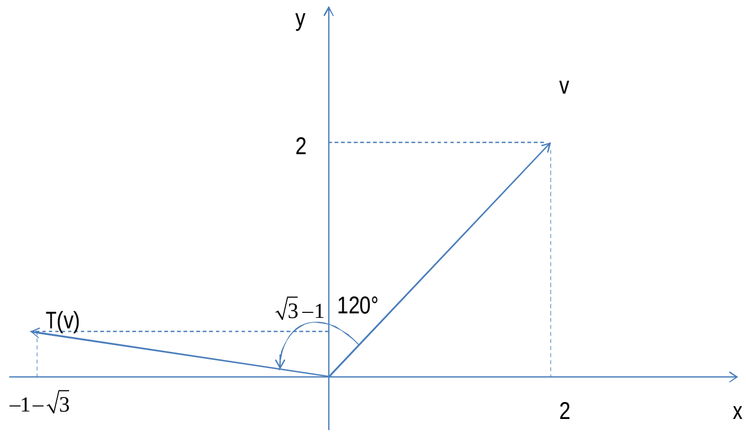


Ejercicio 22. T es la rotación de 120° en el sentido opuesto a las agujas del reloj, $v=(2,2)$.

a) Tomando el ejemplo 7 de la sección 6.1, pág 368, la matriz estándar A de la transformación T es $A=\begin{bmatrix}\cos 120° & -sen 120° \\ sen 120° & \cos 120°\end{bmatrix}$

b) $T(v)=Av=\begin{bmatrix}\cos 120° & -sen 120° \\ sen 120° & \cos 120°\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 \\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 \\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-\sqrt{3} \\ \sqrt{3}-1\end{bmatrix}$

c)

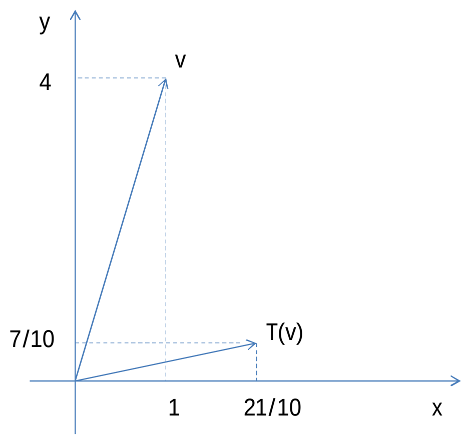


Ejercicio 31. T es la proyección sobre el vector $w=(3,1)$ en $\mathbb{R}^2$, $v=(1,4)$

$$\text{a) } T(1,0)=proy_w(1,0)=\frac{(1,0).(3,1)}{(3,1).(3,1)}(3,1)=\left(\frac{9}{10},\frac{1}{10}\right)$$
$$T(0,1)=proy_w(0,1)=\frac{(0,1).(3,1)}{(3,1).(3,1)}(3,1)=\left(\frac{3}{10},\frac{1}{10}\right)$$
$$\Rightarrow \quad A=\begin{bmatrix} 9/10 & 3/10 \\ 3/10 & 1/10 \end{bmatrix}$$

b) $T(v)=Av=\begin{bmatrix} 9/10 & 3/10 \\ 3/10 & 1/10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 21/10 \\ 7/10 \end{bmatrix}$

c)



Ejercicio 57. $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/\, T(x,y)=(x+y,x,y),\ v=(5,4)$

$B=\{(1,-1),(0,1)\}\ ,\ B'=\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$

$$a)\ \begin{array}{l} T(1,0)=(1,1,0) \\ T(0,1)=(1,0,1) \end{array} \Rightarrow \ A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(v)=Av=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b) $T(1,-1)=(0,1,-1)=c_1(1,1,0)+c_2(0,1,1)+c_3(1,0,1)$

$T(0,1)=(1,0,1)=d_1(1,1,0)+d_2(0,1,1)+d_3(1,0,1)$

Por lo tanto debemos resolver dos sistemas, que por tener la misma matriz de coeficientes pueden ser resueltos simultáneamente:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\1&1&0&1&0\\0&1&1&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&-1&1&-1\\0&1&1&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&-1&1&-1\\0&0&2&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&-1&1&-1\\0&0&1&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&-1&1\end{pmatrix}$$

Entonces, $\left[T(1,-1)\right]_{B'}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\left[T(0,1)\right]_{B'}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\Rightarrow M=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\-1&1\end{bmatrix}$

$v=(5,4)=c_1(1,-1)+c_2(0,1)\Rightarrow\begin{cases}c_1=5\\-c_1+c_2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=5\\c_2=9\end{cases}$, luego $[v]_B=\begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}$.

Por lo tanto, $[T(v)]_{B'}=M[v]_B=M=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\0\\4\end{bmatrix}$

Entonces, $T(v)=5\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\5\\4\end{bmatrix}$

Ejercicio 64. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\,/\,T(x,y)=(2x-12y,x-5y)$, $v=(10,5)$, $B=B'=\{(4,1),(3,1)\}$

a) $\begin{matrix}T(1,0)=(2,1)\\T(0,1)=(-12,-5)\end{matrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}2&-12\\1&-5\end{bmatrix}$

$T(v)=Av=A=\begin{bmatrix}2&-12\\1&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-40\\-15\end{bmatrix}$

b) $T(4,1)=(-4,-1)=c_1(4,1)+c_2(3,1)$

$T(3,1)=(-6,-2)=d_1(4,1)+d_2(3,1)$

Resolviendo ambos sistemas,

$$\begin{bmatrix}4&3&-4&-6\\1&1&-1&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-1&-2\\4&3&-4&-6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-1&-2\\0&-1&0&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&-1&0&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-2\end{bmatrix}$$

Entonces, $\left[T(4,1)\right]_{B'}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix},\left[T(3,1)\right]_{B'}=\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}\Rightarrow M=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-2\end{bmatrix}$

$v=(10,5)=c_1(4,1)+c_2(3,1)\Rightarrow\begin{cases}4c_1+3c_2=10\\c_1+c_2=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=-5\\c_2=10\end{cases}$, luego $[v]_B=\begin{bmatrix}-5\\10\end{bmatrix}$.

Por lo tanto, $[T(v)]_{B'}=M[v]_B=M=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-20\end{bmatrix}$

Entonces, $T(v)=5\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}-20\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-40\\-15\end{bmatrix}$

Ejercicio 65. $T:P_2\to P_3\,/\,T\left(p\right)=x\,p\,,\quad B=\left\{1,x,x^2\right\},\ B'=\left\{1,x,x^2,x^3\right\}$

$$\left[T(1)\right]_{B'}=\left[x\right]_{B'}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\ \left[T(x)\right]_{B'}=\left[x^2\right]_{B'}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\ \left[T(x^2)\right]_{B'}=\left[x^3\right]_{B'}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Por lo tanto $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$