

ALGEBRA II**Sección 6.4: Matrices de Transición y Semejanza**

Lo que sigue son las resoluciones de algunos ejercicios de la Sección 6.4 del libro “Fundamentos de Algebra Lineal”; Larson | Falvo. Abundan los comentarios recordatorios de ciertos conceptos, teoremas, etc, que se han aplicado para resolver estos ejercicios.

Adriana Mateu -- Cirene Prado

EJERCICIOS

. En los ejercicios 2 y 5, (a) Encuentre la matriz A' para la transformación T con respecto a la base B' y (b) demuestre que A' es semejante a A , la matriz estándar de T .

Ej.2.- $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x + y, x - 2y)$, $B' = \{(1, 2), (0, 4)\}$

(a) La matriz A' es la única matriz tal que $[T(\mathbf{v})]_{B'} = A'[\mathbf{v}]_{B'} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ (pág.394), esta matriz tiene como 1ª columna al vector $[T(\mathbf{v}_1)]_{B'}$ y como 2ª columna al vector $[T(\mathbf{v}_2)]_{B'}$, donde $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son los vectores de la base ordenada B' . Entonces deben calcularse primero $T(\mathbf{v}_1)$ y $T(\mathbf{v}_2)$, y luego los coeficientes (coordenadas) que permiten escribir a $T(\mathbf{v}_1)$ y $T(\mathbf{v}_2)$ como combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

Aplicando la ley de T se obtienen $T(\mathbf{v}_1)$ y $T(\mathbf{v}_2)$:

$$T(\mathbf{v}_1) = T(1, 2) = (2(1) + 2, 1 - 2(2)) = (4, -3) \quad \text{y} \quad T(\mathbf{v}_2) = T(0, 4) = (2(0) + 4, 0 - 2(4)) = (4, -8)$$

Deben resolverse luego las dos siguientes ecuaciones vectoriales:

$$(4, -3) = \alpha_1 (1, 2) + \beta_1 (0, 4) \quad \text{y} \quad (4, -8) = \alpha_2 (1, 2) + \beta_2 (0, 4)$$

que conducen a los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 4 \\ 2\alpha_1 + 4\beta_1 = -3 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \alpha_2 = 4 \\ 2\alpha_2 + 4\beta_2 = -8 \end{cases}, \quad \text{Se obtienen, casi directamente}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 4 \\ \beta_1 = -11/4 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \alpha_2 = 4 \\ \beta_2 = -4 \end{cases}. \quad \text{Así: } [T(\mathbf{v}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 4 \\ -11/4 \end{bmatrix}, \quad [T(\mathbf{v}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{y}$$

por lo tanto,
$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -11/4 & -4 \end{bmatrix}$$

(b) La base estándar de $\mathbb{R}^2$, es $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ donde $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ La matriz estándar A , de la transformación T (pág.388) tiene como columnas a los transformados de los vectores de la base estándar, $T(\mathbf{e}_1)$ y $T(\mathbf{e}_2)$ (en notación vector columna).

Aplicando la ley de T : $T(1, 0) = (2(1) + 0, 1 - 2(0)) = (2, 1)$ y $T(0, 1) = (2(0) + 1, 0 - 2(1)) = (1, -2)$

Luego
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Observación: Como B es la base estándar entonces $[T(\mathbf{e}_1)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $[T(\mathbf{e}_2)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ (comprobarlo)

por lo tanto A, la matriz estándar de T, es la matriz de T con respecto a la base estándar (pág.396)

Otra manera de obtener la matriz A

Teniendo en cuenta que la matriz estándar A, es la única matriz tal que, considerando los vectores de $\mathbb{R}^2$ como vectores columna, resulta $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, también se la puede hallar de otro modo

Tomando los vectores de $\mathbb{R}^2$ como vectores columna y reescribiendo la ley de T en consecuencia, se

tiene: $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x+y \\ x-2y \end{bmatrix}$ y A es la única matriz tal que $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Observar:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x+y \\ x-2y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

luego la matriz estándar es $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Nota: Directamente se puede obtener A, la matriz estándar de la transformación lineal T, observando que A tiene como primer renglón a los coeficientes de $2x + y$ y como segundo renglón a los coeficientes de $x - 2y$.

Para demostrar la parte (b) se verificará que A' es igual a $P^{-1}AP$, (pág.400) siendo A la matriz estándar de T (o matriz de T con respecto a la base estándar) y P la matriz de transición de la base B' a la base estándar. Esto probará que A' es semejante a A. La matriz A ya se calculó, hay que obtener P y P^{-1} .

La matriz P, de transición de la base B' a la base estándar B, es la matriz que tiene como primera y segunda columnas a los vectores de coordenadas $[\mathbf{v}_1]_B$ y $[\mathbf{v}_2]_B$ respectivamente. Esta matriz es muy fácil de obtener ya que el vector de coordenadas de cualquier vector de $\mathbb{R}^n$ con respecto a la base estándar,

es el mismo vector escrito como vector columna (comprobarlo), así $[\mathbf{v}_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $[\mathbf{v}_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, por lo tanto

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

y recordando la "fórmula" para la inversa de una matriz invertible de orden dos, (pág.78) se obtiene ,

$$P^{-1} = 1/4 \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3/4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -11/4 & -4 \end{bmatrix}$$

que es la matriz A' obtenida en (a).

Así $A' = P^{-1}AP$ y, de acuerdo a la definición de semejanza de matrices, A' es semejante a A .

Ej.5.- $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, y, z)$ $B' = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$

Esta función lineal T es la función identidad sobre $\mathbb{R}^3$, ya que aplicada a un vector de $\mathbb{R}^3$, devuelve el

mismo vector. Considerando a los vectores como vectores columna, si $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ resulta

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} = I\mathbf{x}, \text{ luego, } A, \text{ la matriz estándar de } T, \text{ es la matriz identidad } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Veremos que la matriz A' , de la transformación T (identidad) con respecto a la base B' es también la matriz identidad I . En efecto: A' es la matriz de 3×3 que tiene como primera, segunda y tercera columnas a los vectores $[T(\mathbf{v}_1)]_{B'}$, $[T(\mathbf{v}_2)]_{B'}$ y $[T(\mathbf{v}_3)]_{B'}$, respectivamente, donde $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ son los vectores de la base B' .

Siendo $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 = 0\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3$ y $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_3 = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 1\mathbf{v}_3$

$$\text{es } [T(\mathbf{v}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [T(\mathbf{v}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } [T(\mathbf{v}_3)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ Luego } A' = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Así $A' = A$ y por lo tanto son semejantes (Propiedades de las matrices semejantes, pág.402), ya que siendo $I^{-1} = I$ se tiene $A' = A = I^{-1}AI$.

Ej.9.- Sean $B = \{(1,3), (-2,-2)\}$ y $B' = \{(-12,0), (-4,4)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ y $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ la matriz de $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con respecto a B (pág. 401).

a) Determine la matriz de transición P de B' a B .

b) Aplique las matrices A y P para encontrar $[\mathbf{v}]_B$ y $[T(\mathbf{v})]_B$ donde $[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

c) Encuentre A' , la matriz para T respecto a B' , y P^{-1} .

d) Encuentre $[T(\mathbf{v})]_{B'}$ de dos formas: primero como $P^{-1}[T(\mathbf{v})]_B$ y luego como $A'[\mathbf{v}]_{B'}$.

a) La matriz P es la matriz de orden dos que tiene como 1ª columna al vector $[(-12,0)]_B$ y como 2ª columna a $[(-4,4)]_B$, por lo tanto deben encontrarse los coeficientes (coordenadas) que permiten escribir cada elemento de B' como combinación lineal de elementos de B . Deben resolverse entonces las dos siguientes ecuaciones vectoriales:

$$(-12, 0) = \alpha_1(1, 3) + \beta_1(-2, -2) \quad \text{y} \quad (-4, 4) = \alpha_2(1, 3) + \beta_2(-2, -2),$$

que conducen a los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\beta_1 = -12 \\ 3\alpha_1 - 2\beta_1 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \alpha_2 - 2\beta_2 = -4 \\ 3\alpha_2 - 2\beta_2 = 4 \end{cases}$$

Como ambos sistemas tienen la misma matriz de coeficientes pueden resolverse en forma simultánea

utilizando la matriz ampliada: $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -12 & -4 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \end{array} \right]$

Aplicando a dicha matriz la eliminación de Gauss –Jordan:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -12 & -4 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -12 & -4 \\ 0 & 4 & 36 & 16 \end{array} \right] \xrightarrow{1/4 R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -12 & -4 \\ 0 & 1 & 9 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 + 2R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 4 \end{array} \right]$$

Se obtiene entonces $\begin{cases} \alpha_1 = 6 \\ \beta_1 = 9 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \alpha_2 = 4 \\ \beta_2 = 4 \end{cases}$

Así, $[(-12, 0)]_B = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$ y $[(-4, 4)]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$, en consecuencia, $P = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$

b) Dado que $[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y que $P = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$ es la matriz de transición de B' a B , entonces:

$$[\mathbf{v}]_B = P[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dado que $[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y que $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ es la matriz de T con respecto a la base B , entonces:

$$[T(\mathbf{v})]_B = A[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

c) Encuentre A' , la matriz para T respecto a B' , y P^{-1} .

Como $P = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$, se obtiene, directamente, $P^{-1} = -\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 3/4 & -1/2 \end{bmatrix}$.

Ya que se conoce la matriz A , de la transformación T con respecto a la base B , y la matriz, P , de transición de B' a B , entonces la matriz A' , de T con respecto a la base B' , se obtiene usando la fórmula que muestra la relación entre A' y A , ésta es: $A' = P^{-1} A P$.

Así:
$$A' = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 3/4 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 3/4 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36 & 20 \\ 36 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4/3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

d) Encuentre $[T(\mathbf{v})]_{B'}$ de dos formas: primero como $P^{-1}[T(\mathbf{v})]_B$ y luego como $A'[\mathbf{v}]_{B'}$.

1º) Dado que P^{-1} es la matriz de transición de B a B' y que $[T(\mathbf{v})]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$, entonces:

$$[T(\mathbf{v})]_{B'} = P^{-1}[T(\mathbf{v})]_B = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 3/4 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8/3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2º) Dado que $A' = \begin{bmatrix} 0 & -4/3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$ es la matriz de T con respecto a la base B' y que $[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ entonces

$$[T(\mathbf{v})]_{B'} = A'[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 & -4/3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8/3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ej.15.- Demuestre que si A y B son semejantes entonces $|A| = |B|$ ¿Es cierto lo inverso?

Dem) Es claro que ambas matrices son cuadradas del mismo orden. Debe además tenerse en cuenta que la expresión “ A y B son semejantes”, equivale a cualquiera de las dos siguientes “ A semejante a B ” o “ B semejante a A ” (Matrices semejantes. Pág.402)

1º) Se demostrará la siguiente: A y B semejantes $\Rightarrow |A| = |B|$.

En efecto:

$$A \text{ semejante a } B \Rightarrow \exists P \text{ invertible} / A = P^{-1}BP \Rightarrow |A| = |P^{-1}BP| = |P^{-1}| |B| |P| = \frac{1}{|P|} |B| |P| = |B| \Rightarrow |A| = |B|$$

2º) ¿Es cierto la recíproca?, es decir, $|A| = |B| \Rightarrow A$ semejante a B ?

La cuestión es: las matrices (de igual orden) que tienen el mismo determinante, ¿son semejantes? Uno podría comenzar preguntándose si las matrices de determinante cero, por ejemplo, son semejantes. Si este fuera el caso, todas las matrices de determinante cero serían semejantes a la matriz cero, O , ya que $|O| = 0$. Es fácil ver que esto no es cierto, comprobando que la única matriz semejante a la matriz cero es ella misma.

En efecto:

$$A \text{ semejante a } O \Rightarrow \exists P \text{ invertible} / A = P^{-1}OP = OP = O \Rightarrow A = O$$

Así, cualquier matriz $A \neq O$ tal que $|A| = 0$ junto con la matriz O , constituyen un ejemplo de dos matrices con el mismo determinante que no son semejantes. . Esto prueba que no es cierta la recíproca, es decir: $|A| = |B|$ no implica A semejante a B .

Por ejemplo: Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ y $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, es claro que $|A| = 0 = |O|$ pero A no es semejante a la matriz cero, ya que no existe una matriz P invertible tal que $P^{-1}O P = A$.

Similarmente, podría haberse comenzado preguntándose si las matrices de determinante uno son semejantes. Es también muy sencillo comprobar que la única matriz semejante a la matriz identidad es ella misma, y por lo tanto cualquier matriz $A \neq I$ tal que $|A| = 1$, junto con la matriz I, será un ejemplo de dos matrices con el mismo determinante que no son semejantes.

Ej.16.- Ilustre el ej. 15 por medio de las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 11 & 7 & 10 \\ 10 & 8 & 10 \\ -18 & -12 & -17 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

donde $B = P^{-1}AP$.(*)

Puede comprobarse la igualdad (*) (aunque es un dato)...

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & -4 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 7 & 10 \\ 10 & 8 & 10 \\ -18 & -12 & -17 \end{bmatrix} = B$$

Verificamos que se cumple (*), luego B y A son semejantes.

.Ahora se verifica la igualdad de los determinantes:

$$|B| = \begin{vmatrix} 11 & 7 & 10 \\ 10 & 8 & 10 \\ -18 & -12 & -17 \end{vmatrix} = 11(8)(-17) + 10(-12)(10) + 7(10)(-18) - (-18(8)(10) + 10(7)(-17) + (-12)(10)(1)) = -6$$

(aplicando la regla de sarrus)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1(-2)(3) = -6 \quad (A \text{ es diagonal, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal})$$

Luego $|A| = |B|$.

Ej.17.- Sean A y B matrices semejantes

a) Demuestre que A^T y B^T son semejantes.

b) Demuestre que si A es no singular, entonces B es no singular y A^{-1} y B^{-1} son semejantes.

c) Demuestre que existe una matriz P / $B^K = P^{-1}A^K P$

a) Demostración

Por hipótesis A es semejante a B , luego $A = P^{-1}BP$, para alguna matriz P invertible. Aplicando la operación de transposición a ambos miembros de la igualdad y dado que P invertible implica P^T invertible y $(P^T)^{-1} = (P^{-1})^T$ se tiene:

$$A^T = (P^{-1}BP)^T = P^T B^T (P^{-1})^T = P^T B^T (P^T)^{-1}$$

Si a $(P^T)^{-1}$ se la denota con R , entonces R es invertible y $R^{-1} = P^T$, por lo tanto

$$A^T = R^{-1} B^T R, \quad \text{lo que prueba que } A^T \text{ es semejante a } B^T. \text{ (que es la tesis)}$$

b) Demostración

Por hipótesis A es semejante a B , luego $A = P^{-1}BP$, para alguna matriz P invertible. Premultiplicando por P y postmultiplicando por P^{-1} ambos miembros de la igualdad (hacerlo), se tiene:

$$B = PAP^{-1}$$

Por ser A no singular la matriz B es producto de matrices invertibles, luego B es invertible y

$$B^{-1} = (P^{-1})^{-1} A^{-1} P^{-1}$$

Si se denota con S a P^{-1} , entonces S es invertible y $S^{-1} = (P^{-1})^{-1}$, por lo tanto:

$$B^{-1} = S^{-1} A^{-1} S$$

lo que prueba que B^{-1} es semejante a A^{-1} (A^{-1} y B^{-1} son semejantes).

c) Hay que demostrar la siguiente proposición:

"Si A y B son semejantes entonces existe una matriz P , invertible, tal que $B^K = P^{-1} A^K P$ para todo k en $\mathbf{N}$ "

Se demostrará por inducción:

1º) La proposición vale para $K=1$:

En efecto: Por definición, $A^1 = A$ y $B^1 = B$, entonces:

$$B \text{ semejante a } A \Rightarrow \exists P \text{ invertible} / B = P^{-1} A P \Rightarrow \exists P \text{ invertible} / B^1 = P^{-1} A^1 P.$$

Como la matriz P es la misma para todo $K \in \mathbf{N}$, ésta debe ser la matriz P tal que $B = P^{-1} A P$

2º) Debe probarse que si A y B son semejantes con $B = P^{-1} A P$ entonces:

$$B^H = P^{-1} A^H P \Rightarrow B^{H+1} = P^{-1} A^{H+1} P \quad \forall H \in \mathbf{N}$$

En efecto: Supóngase que $B = P^{-1} A P$ y que H es tal que $B^H = P^{-1} A^H P$, luego:

$$B^{H+1} = B^H B = (P^{-1} A^H P)(P^{-1} A P) = ((P^{-1} A^H)(P P^{-1}))(A P) = ((P^{-1} A^H)I)(A P) = (P^{-1} A^H)(A P) = P^{-1} (A^H A) P = P^{-1} A^{H+1} P$$

Por aplicación del método de inducción, de 1º) y 2º) sigue que: *Si A y B son semejantes entonces existe una matriz P invertible tal que para todo número natural K , resulta $B^K = P^{-1} A^K P$*

Ej.18.- Use el resultado del ejercicio 17 para determinar B^4 , donde $B = P^{-1} A P$, para la matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & -15 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

De acuerdo al ej.17c) y dado que $B = P^{-1}AP$ resulta $B^4 = P^{-1}A^4P$

Como A es una matriz diagonal $A^4 = \begin{bmatrix} 1^4 & 0 \\ 0 & 2^4 \end{bmatrix}$ (fácil de calcular)

$$\text{Luego } B^4 = P^{-1}A^4P = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -80 \\ -1 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -74 & -225 \\ 30 & 91 \end{bmatrix}$$

Ej.19.- Determine todas las matrices de $n \times n$ que son semejantes a I_n

Si A es una matriz de $n \times n$ e I es la matriz identidad de $n \times n$, entonces:

$$A \text{ semejante a } I \Rightarrow \exists P \text{ invertible} / A = P^{-1}IP = P^{-1}(IP) = P^{-1}P = I \Rightarrow A = I.$$

En consecuencia la única matriz que es semejante a I_n es la propia I_n

Ej.21.- Sea una matriz de $n \times n$ tal que $A^2=O$. Demuestre que si B es semejante a A, entonces $B^2=O$

Por ser B semejante a A entonces existe una matriz P invertible tal que $B = P^{-1}AP$. Así:

$$B^2 = BB = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = (P^{-1}A)(PP^{-1})(AP) = ((P^{-1}A)I)(AP) = (P^{-1}A)(AP) = P^{-1}(AA)P = P^{-1}A^2P$$

Se probó que $B^2 = P^{-1}A^2P$ y como $A^2=O$ entonces $B^2 = P^{-1}OP = O$

Claramente el resultado es una consecuencia inmediata del ej.17c). En efecto: Por ser A y B semejantes, existe una matriz P tal que, para todo K entero positivo, es $B^K = P^{-1}A^KP$. En particular (para $K=2$) se tiene, $B^2 = P^{-1}A^2P$, y dado que $A^2=O$, resulta $B^2 = P^{-1}A^2P = P^{-1}OP = O$. Pero debía tenerse demostrado el 17 c)

Ej.25.- Demuestre que si A y B son semejantes, entonces A^2 es semejante a B^2

Si A y B son semejantes entonces existe una P invertible tal que $A = P^{-1}BP$, por lo tanto:

$$A^2 = AA = (P^{-1}BP)(P^{-1}BP) = (P^{-1}B)(PP^{-1})(BP) = ((P^{-1}B)I)(BP) = (P^{-1}B)(BP) = P^{-1}(BB)P = P^{-1}B^2P$$

Luego $A^2 = P^{-1}B^2P$, lo que prueba que A^2 es semejante a B^2 .

Claramente el resultado es una consecuencia inmediata del ej.17c), pero éste debía estar demostrado

Ej. 30.- ¿ Verdadero o Falso?

a) La matriz A' , para una transformación lineal, con respecto a la base B' es igual al producto $P^{-1}AP$, donde P^{-1} es la matriz de transición de B a B' , A es la matriz de la transformación lineal T respecto de la base B y P es la matriz de transición de B' a B

b) Dos matrices que representan la misma transformación lineal $T: V \rightarrow V$ con respecto a diferentes bases no son necesariamente semejantes.

Respuesta

a) Verdadero.

De acuerdo a lo analizado en los comentarios iniciales de la sección 6.4 (Pág.399 y 400). Las matrices, A y A' , que representan a la misma transformación lineal T en dos bases distintas, B y B' respectivamente, están vinculadas por la igualdad $A' = P^{-1}AP$, donde P es la matriz (invertible) de transición de B' a B (P^{-1} es la matriz de transición de B a B').

b) Falso.

Dos matrices, A y A' , que representan a la misma transformación lineal T en dos bases distintas, B y B' respectivamente, están vinculadas por la igualdad $A' = P^{-1}AP$, donde P es la matriz (invertible) de transición de B' a B (P^{-1} es la matriz de transición de B a B'). De acuerdo a la definición de matrices semejantes A y A' resultan *siempre* semejantes y por lo tanto la afirmación es falsa. (Esto está comentado en la pág 403 y aquí quedó formalizado)

Ej. 31.- ¿Verdadero o Falso?

a) *La matriz, A , para una transformación lineal respecto a la base B es igual al producto $PA'P^{-1}$, donde P es la matriz de transición de B' a B , A' es la matriz de la transformación lineal respecto a la base B' y P^{-1} es la matriz de transición de B a B' .*

b) *La base estándar para R^n siempre origina la matriz más sencilla posible para una transformación lineal $T: R^n \rightarrow R^n$.*

Respuesta:

a) Se sabe lo siguiente: Si A' es la matriz, para una transformación lineal T con respecto a la base B' y A es la matriz de T con respecto a la base B entonces

$A' = P^{-1}AP$, donde P es la matriz de transición de B' a B y P^{-1} es la matriz de transición de B a B' . Premultiplicando a ambos miembros por P y postmultiplicando por P^{-1} (hacerlo), se llega a la igualdad:

$$PA'P^{-1} = A, \text{ por lo tanto la afirmación es } \underline{\text{verdadera}}$$

b) Falso,

(Se entenderá que una matriz es “sencilla”, o “mas sencilla” que otras, si tiene ventajas computacionales con respecto a otras matrices. Las matrices diagonales gozan de estas ventajas. Por ejemplo: es rápido el cálculo de las potencias, es rápida la obtención del determinante y de la inversa (si la tiene) y el rango y la nulidad se obtienen por simple inspección).

La matriz de una transformación lineal $T: R^n \rightarrow R^n$ con respecto a la base estándar de R^n , no es en general una matriz diagonal. Si dicha matriz no es diagonal y si existe una base de R^n con respecto a la cual la matriz de T es diagonal, entonces esta última matriz es mas sencilla que la primera. Ver ejemplo 5 pág. 403.

Analicemos: con A' , a un vector $[\mathbf{v}]_{B'}$ lo transformamos a uno $[\mathbf{T}(\mathbf{v})]_{B'}$ en forma directa. O sea

$$A' [\mathbf{v}]_{B'} = [\mathbf{T}(\mathbf{v})]_{B'} \quad (*)$$

Ahora si la igualdad vale debo llegar a lo mismo:

Tomamos un vector $[\mathbf{v}]_{B'}$, si lo multiplico por $P^{-1}AP$ éste resultado debe darme $[\mathbf{T}(\mathbf{v})]_{B'}$.

$$P^{-1}AP [\mathbf{v}]_{B'} = P^{-1}A \underset{(1)}{(P [\mathbf{v}]_{B'})} = P^{-1} \underset{(2)}{(A [\mathbf{v}]_B)} = P^{-1} \underset{(3)}{[\mathbf{T}(\mathbf{v})]_{B'}} = [\mathbf{T}(\mathbf{v})]_{B'} \quad (**)$$

(1) $P[\mathbf{v}]_{B'} = [\mathbf{v}]_B$ ya que P es la matriz de transición de B' a B .

(2) $A[\mathbf{v}]_B = [\mathbf{T}(\mathbf{v})]_B$ ya que A es la matriz de T con respecto a la base B

(3) $P^{-1}[\mathbf{T}(\mathbf{v})]_B = [\mathbf{T}(\mathbf{v})]_{B'}$ ya que P^{-1} es la matriz de transición de B a B'

De $(**)$ y $(*)$,

$$A' [\mathbf{v}]_{B'} = P^{-1}AP [\mathbf{v}]_{B'} \quad \forall \mathbf{v}.$$