FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS INGENIERÍA Y AGRIMENSURA. ESCUELA DE FORMACIÓN BÁSICA

ALGEBRA Y GEOMETRÍA II Año 2013 2º semestre

Guía de Estudio y Ejercitación propuesta

Esta selección de Temas y Ejercicios está extraída del texto "FUNDAMENTOS DE ALGEBRA LINEAL" de R. Larson y D. Falvo.

Se ha agregado en esta guía un listado de los errores que se han detectado en el libro, en las secciones que se desarrollan en la materia. Éstos son tanto errores de edición como de traducción y también algunos errores (u omisiones) puramente matemáticos.

Completan la guía comentarios respecto a la manera en que se tratan ciertos temas en el libro y algunas sugerencias tendientes a facilitarle al estudiante la comprensión de los mismos.

Gracias a todos los docentes y alumnos de la cátedra de Algebra y Geometría II que contribuyen a actualizar este trabajo con nuevas observaciones y sugerencias.

Adriana Mateu

Capítulo 1: Sistemas de Ecuaciones Lineales

1.1. Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicios propuestos: 1-2-3-4-5-6-7-9-11-13-15-16-25-27-31-33-49-51-55-57-63-65-67-69-70-71-77-79-85

1.2. Eliminación Gaussiana y eliminación de Gauss-Jordan

Ejercicios propuestos: 9-10-11-12-13-14-15-17-18-19-21-22-29-31-33-39-45-46-48-49-54-56-61.

Al final de cada capítulo hay una sección de ejercitación de repaso

OBSERVACIONES:

A partir de la pág.18 habla de: ***la*** *forma escalonada de una matriz* (aunque no hay una única) habría que cambiar por: ***una*** *forma escalonada*, y hacer ver con un ejemplo (cuando sea oportuno).

Capítulo 2: Matrices

2.1. Operaciones con matrices

Ejercicios propuestos: 5-7-9-11-13-14-17-35-37- 41-43-45-47-49-62-63-65-67-73-75.

OBSERVACIONES:

Pág.48. En el último párrafo, "*Podemos…el* ***producto escalar*** (-1)A". Reemplazar por: *…el* ***producto por escalar***: (-1)A.

Pág.53.Al final, están los corchetes de las matrices corridos hacia abajo.

Pág.55. En A**x**=**b**…comienza una línea con una mayúscula, debe ser minúscula porque es la continuación de un párrafo anterior; debe decir: "***se*** *llama* ***combinación lineal*** *de*…". En el párrafo siguiente, al final, hay una omisión; dice: "***b*** *puede ser expresada como una combinación lineal,* (agregar) ***de las columnas de A***".

Pág.60. Ejercicio 67 (b) dice: "***b** puede ser expresado como una combinación lineal* (agregar) ***de las columnas de A*** *donde los…*"

Ejercicio 68(b): dice: "… ***x*** y **b** son ***las*** matrices columna…" (tachar ***las***).

2.2. Propiedades de las operaciones con matrices

Ejercicios propuestos: 5-7-13-15-17-19-21-29-31-37-39-55.

OBSERVACIONES:

Pág. 61. Teorema 2.1. 6). En el 2º miembro de la igualdad hay una **B** que debe reemplazarse por **A**

Pág.63.Teorema 2.3. En la propiedad 2, reemplazar el comentario a la derecha por : *Propiedad distributiva por izquierda* , y en la propiedad 3, por: *Propiedad distributiva por derecha*.

Pág. 67. En la demostración del Teorema 2.5, en la 6ª línea, dice: "*Esto implica que la* ***columna de la matriz*** *distinta de cero*, $\mathbf{x}_h = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$…", debe decir: "*Esto implica que la* ***matriz columna*** *distinta de cero*, $\mathbf{x}_h = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$…".

2.3. Inversa de una matriz

Ejercicios propuestos: 4-9-11-27-29-33-37-41-45-48-49-51-53-55-56-57-61-62

OBSERVACIONES:

Pág.76. En el algoritmo para el cálculo de la inversa:

En el Paso 2 dice:" *El resultado puede ser la matriz* $[\mathbf{A}: \mathbf{I}^{-1}]$…", debe reemplazarse $[\mathbf{A}: \mathbf{I}^{-1}]$ por $[\mathbf{I}: \mathbf{A}^{-1}]$.

En el Paso 3 dice:"…*multiplicando* por $\mathbf{AA}^{-1}$ y $\mathbf{A}^{-1}$ …",debe decir:"*multiplicando* **A** por $\mathbf{A}^{-1}$ y $\mathbf{A}^{-1}$ por **A**

Pág.78. Al final del ejemplo 4, dice: "… *no es posible reescribir la… en la forma* $[\mathbf{A}: \mathbf{I}^{-1}]$…", debe reemplazarse $[\mathbf{A}: \mathbf{I}^{-1}]$ por $[\mathbf{I}: \mathbf{A}^{-1}]$

Pág.82. Al comienzo de la página, la matriz que nombra A, es la matriz A^{-1}

2.4 y 2.5. Estas secciones no se desarrollan

.

Capítulo 3: Determinantes

3.1. Determinante de una matriz

Ejercicios propuestos: 1-2-3-10-11-13-15-17-19-21-25-27-29-40-43-45-51-57-61-**71** (Determinante de Vandermonde)-**73**

OBSERVACIONES:

Pág.128. Matrices triangulares. En la definición dice: " *Una matriz … es triangular superior si todos los elementos* ***sobre*** *la diagonal…".* Reemplazar ***sobre*** por ***debajo de***. Similarmente en la definición de triangular inferior reemplazar ***debajo de*** por ***sobre***.

3.2. Evaluación de un determinante

Ejercicios propuestos: Impares del 1 al 51.

Pág.132. Al final, "Evaluación de un determinante…". Está mal la notación: escribe $|A|$ y exhibe a la matriz A, similarmente , escribe $|B|$ y exhibe la matriz B. Deben cambiarse los corchetes de las matrices por barras.

Pág. 134. En el COMENTARIO sobre dividir un renglón entre un factor común (usa notación de matrices y deben ser determinantes). Reemplazar por: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Pág.135. En el desarrollo del ejemplo 2, el elemento en la posición 3,2 de la segunda matriz, debe ser 1 (hay un 0).

3.3. Propiedades de los determinantes

Ejercicios propuestos: 3-9-11-15-21-23-25-27-29-37-41-44-45-47-49-50-51-57-59-63-66

OBSERVACIONES:

Pág.137. Luego del ejemplo 4, penúltimo párrafo, dice:"*Esto en general es cierto,…una matriz cuadrada tiene un determinante cero sí y solo* ***si uno de estos renglones (o columnas) son equivalentes*** *a una matriz que tiene al menos un renglón (o columna) formado completamente por ceros*".

El comentario debe reemplazarse por: *Esto en general es cierto,…una matriz cuadrada tiene un determinante cero sí y solo* ***es equivalente por renglones (o columnas)*** *a una matriz…*".

Pág.145. Teorema 3.7. En la demostración, (9º-10º renglón) dice : ***puede implicar*** , debe decir: ***implica*** .

Pág.151. En el ejercicio 53, dice: "…***suman mas de*** cero…", debe decir:"…***suman*** cero…"

3.4. Introducción a los eigenvalores. Este tema se desarrollará en la sección 7.1.

OBSERVACIÓN: En el encabezado de las páginas 153, 155 y 157 dice "***Inducción de*** *eigenvalores*", debe decir: "***Introducción a los*** *eigenvalores*".

3.5. Aplicaciones de los determinantes

Ejercicios propuestos: 1-2-5-9-10-11-17-19-27-43

OBSERVACIONES:

Pág.158. En la definición de matriz adjunta de A hay un error: la matriz que exhibe como Adj(A) no es la transpuesta de la matriz de cofactores de A.

Pág.159. En la demostración del Teorema 3.10 se hace uso (sin haberse tratado anteriormente) del siguiente resultado: "La suma de los productos de los elementos de una fila por los cofactores correspondientes a otra fila, es cero".

Pág.168. Ejercicio 9, dice: "*Demuestre que si* $|A|=1$ *y…, todos los elementos de* $|\mathbf{A}^{-1}|$ *deben ser enteros*". Claramente no es $|A^{-1}|$, sino $\mathbf{A}^{-1}$.

Capítulo 4: Espacios vectoriales

4.1. Vectores en R^n

Ejercicios propuestos: 39-42-43-45-49-50-51-69

OBSERVACIONES:

Pág.179.En el primer renglón, en el comienzo del capítulo dice: "*En… un vector es caracterizado por dos cantidades* (*longitud y* ***sentido***)…" (En lugar de ***sentido*** luego usa la palabra ***dirección***.)

4.2. Espacios vectoriales

<u>Ejercicios propuestos</u> Del 1 al 12 (todos) 14-15-17-18- 23-24-26-29(a)-29(b)- 30(c)-38-40

<u>OBSERVACIONES</u>:

<u>Pág.191</u>. Espacios vectoriales .En el tercer renglón dice: …*muchas otras **<u>cantidades</u>** matemáticas (como las matrices*, *polinomios y las funciones)*…". La palabra *cantidades* no es adecuada, se sugiere cambiarla por ***<u>entidades</u>*** o, "*muchos otros **<u>entes</u>** (u **<u>objeto</u>**s) matemáticos…*".

<u>Pág.195</u>. Ejemplo 6. El título es: *El conjunto de los enteros no es espacio vectorial.* Un título mejor sería: *El conjunto de los números enteros,* ***con las operaciones estándar****, no es un espacio vectorial*. Similar observación cabría para los ejemplos 7 y 8.

4.3. Subespacios de espacios vectoriales

<u>Ejercicios propuestos</u>:1-2-4-(**6)**-7-(**9)**-(**12)-**15-16-(**21-23)-**25-27-29-31-32-35-37-41-42-45

Los ejercicios **6**-**9**-**12**-**21**-**23** requieren conocimiento de Cálculo.

<u>OBSERVACIONES</u>:

<u>Pág.186</u>.Teorema 4.3.En 3), 4) y 5) el vector cero no está en negritas. Cambiar 0 por **0** cuando corresponda.

<u>Pág.200</u>. Ejemplo 2.El título es: ***<u>El</u>*** *subespacio de M_{23}*. Debe cambiarse por: ***<u>Un</u>*** *subespacio de M_{23}*.

<u>Pág.206.</u> Ej. 40. Al final dice:"*Este subespacio se denomina **<u>generador de</u>*** {**x**, **y**, **z**}". Debe cambiarse ***<u>generador de</u>*** por ***<u>generado por</u>***.

<u>Pág.206</u>. Ej.42. Dice: "*Sea A una matriz **<u>ajustada</u>** de*…". Debe suprimirse la palabra **ajustada**.

4.4. Conjuntos generadores e independencia lineal

<u>Ejercicios propuestos</u>:1-5-9-11-15-17-19-21-24**-**25-27-29-31-32-35-37-39-41-42-43-46-47-49-53-54-**57-58-**59-60-61-62-63-64-65.

<u>OBSERVACIONES</u>:

<u>Pág.211</u>. Aquí se define subespacio generado por un conjunto, S, de vectores. Toda vez que esté escrito "***<u>generador de</u>*** *S* " debe cambiarse por "***<u>generado por</u>*** *S* ".
Antes del teorema 4.7, un párrafo: "*El siguiente teorema establece que **<u>la generación</u>***…" Debe decir: "*El siguiente teorema establece que **<u>el generado por</u>*** …"

<u>Pág 217</u>. Teorema 4.8. "*Un conjunto* **S=**($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_k$)**…"** Debe ser: **S=**{$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_k$}**….**Usó paréntesis en lugar de llaves .
Además, en el penúltimo renglón de la demostración: " *entonces la ecuación* $-\mathbf{v}_1= c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 +\ldots+c_k\mathbf{v}_k =\mathbf{0}$…", el primer signo igual (=) debe ser reemplazado por +

<u>Pág.220</u>. El <u>ejercicio 58</u>: "*Demuestre …del conjunto finito **<u>de</u>** S_2 y S_1 es…*".Debe omitirse la preposición ***<u>de</u>***.
El <u>ejercicio 60</u> dice: "***<u>Dado que</u>****…es un conjunto…*" Debe decir: ***<u>Si</u>****…es un conjunto…*"

4.5. Base y Dimensión

Ejercicios propuestos: Del 1 al 6 todos-7-9-13-15-17-20-21-23-25-27-29 al 34 todos-35-37-39-43-45-47-50-51-del 55 al 62 todos-64-65-66-68-69-71-72-77-78-79-(80-81-82 -84 y 85).

OBSERVACIONES:

Pág.226.Teorema 4.11. En la demostración, $S_1 = \{v_1, v_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$, S_1 debe tener n vectores, debe reemplazarse $\mathbf{v}_m$ por $\mathbf{v}_n$.

Pág.231. En el ejercicio 71, el conjunto es: W = {(2*t, t, –t*) / *t* es un número real}

En el ejercicio 72, el conjunto es: W = {(2*t*– *s, s, t*) / *s* y *t* son números reales}

Pág.232. En el primer renglón dice: "*En…(a) una base* ***para omitir*** *y (b)…*". Debe suprimirse la expresión ***para omitir***.

Pág.232 Ejercicio 83(a).Dice:"*Sean* **S_1=*gen*{1,0,0,1,1,0}** y **S_2 = *gen* {0,0,1,0,1,0}** *subespacios de R^3*." Debe ser: "*Sean* **S_1=*gen*{(1,0,0), (1,1,0)} y S_2 = *gen* {(0,0,1), (0,1,0) }** *subespacios de R^3* ".

4.6. Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicios propuestos:1-3-5-7-9-11-13-15-17-19-21-23-25-27-33-37-41-43-47-48-57-61-65-66-67-68.

OBSERVACIONES:

Pág.232. Al final de la página escribe: "*Vectores* ***columna*** *de A*". Debe ser: "*Vectores* ***renglón*** *de A*".

Pág.235. Ejemplo3.Dice:"*Determinación de* ***la*** *base…*".*Debe decir*:"*Determinación de* ***una*** *base…*".

También comienza con: "*Encuentre* ***la*** *base del subespacio…*" y debe ser: "***una*** *base*". Similar error en el ejemplo 4, pág. 236.

Pág. 237. Segundo renglón: "…*forman* ***la*** *base del espacio columna…*" Debe decir: "…*forman* ***una*** *base del espacio columna…*"

Pág.240. En la demostración del Teorema 4.16, 6º renglón: $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_1$. Error en un subíndice. Debe ser: $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2$

Pág.241. En el Ejemplo 6, hay errores en los comentarios y las conclusiones, luego de haberse obtenido el conjunto solución.

Pág.242. En la demostración del Teorema 4.17, primer renglón, dice:"…*a la matriz B* ***de la forma*** *reducida escalonada por renglones con los* ***renglones r*** *diferentes de cero*".

Cambiar por:"…*a la matriz B* ***en forma*** *reducida escalonada por renglones con los* ***primeros r renglones*** *diferentes de cero*."

Pág.245. En el penúltimo renglón de la demostración del teorema 4.9, dice: "…*el sistema es consistente si y sólo si* ***b*** ***es un*** *subespacio…*". Cambiar por :"…*el sistema es consistente si y sólo si* ***b*** ***está en el*** *subespacio…*"

Pág.247. Cada vez que esté escrito "*encuentre* ***la*** *base*", reemplazar por: "*encuentre* ***una*** *base*".

Pág.247. El espacio nulo de las matrices de los ejercicios 21 y 31 es el subespacio cero. Se pide una base , y la dimensión, del espacio nulo de A (o espacio solución de A**x**=**0**). En la respuesta está bien la dimensión, dim=0, pero parece responder que {(0,0)} y {(0,0,0,0)}son bases de los espacios nulos de la matrices correspondientes. Esto no debe ser entendido así, no se definió base del espacio V={**0**}, sólo quedó establecido que dim({**0**})=0. Por lo tanto la respuesta correcta del ej. 21 es: " {(0,0)} es el espacio solución, no se ha definido base para el espacio{**0**} ". Similar respuesta para el ejercicio 31.
(En cualquier espacio vectorial, el conjunto unitario {**0**} es l.d y por lo tanto no puede ser una base.)

Pág.248. Ejercicio 63 (a), segundo renglón, dice:"…*el espacio renglón de A es* ***equivalente*** *al espacio renglón de B*". Debe reemplazarse por: "…*el espacio renglón de A es* ***igual*** *al espacio renglón de B*".

4.7. Coordenadas y cambio de base

Ejercicios propuestos: 2-5-7-9-13-15-25-31-35-37-39-43-48

OBSERVACIONES:

Pág.252. Problemas en el uso de "primas". Al final de la página, hay "primas" (o marcas) que no corresponden.

Corresponde: $\mathrm{P}[\mathbf{x}]_{B'} = [\mathbf{x}]_B$ (Cambio de base de B' a B),

y en el último renglón, reemplazar por:

$[\mathbf{x}]_{B'} = \mathrm{P}^{-1}[\mathbf{x}]_B$ (Cambio de base de B a B')

Pág 253. En la mitad de la página dice:"…*entonces la matriz de transición P, de B' a B es la matriz P tal que*: (hay una marca y "una prima"). Debe cambiarse por:

$$[\mathbf{x}]_B = \mathrm{P}[\mathbf{x}]_{B'}$$

En el párrafo siguiente dice: "*El siguiente teorema…. Es decir*:…" (la igualdad en el renglón de abajo debe cambiarse por:

$$[\mathbf{x}]_{B'} = \mathrm{P}^{-1}[\mathbf{x}]_B$$

Pág.253. Enunciado del teorema 4.20. "…*Si P es la matriz de transición de una base B' a una base* (**B**) *en* R^n*…*". Omite la **B**, hay que agregarla.

Pág.255. Demostración del Teorema 4.20 (al principio). Dice: "*A partir del lema anterior, sea Q la matriz de transición de B a B'. Por tanto*:…". El renglón siguiente debe ser cambiado por:

$[\mathbf{v}]_B = \mathrm{P}[\mathbf{v}]_{B'}$ y $[\mathbf{v}]_{B'} = Q[\mathbf{v}]_B$ (ya que hay confusión con "las primas")

Luego dice:

"*lo cual implica que*: (la igualdad que sigue debe ser) $[\mathbf{v}]_B = \mathrm{PQ}[\mathbf{v}]_B$ *para todo vector en* R^n"

Por último: "*De aquí se concluye que* PQ =**I**". (Concluye "muy rápido").

Pág 255. En el teorema 4.21, y en lo sucesivo, usa la misma letra tanto para denotar a una base (ordenada) de R^n como para la matriz que tiene como columnas a los vectores de dicha base (en el mismo orden

Pág. 255. Teorema 4.21. En el enunciado, 4º renglón, escribe [B **:** B'] → [I **:** P^{-1}].

Debe ser: [B'**:** B] → [I **:** P^{-1}].

Pág.260. Ejercicios. Dice: "*En los ejercicios del* 1 *al* 6 *se proporciona … una base (no estándar)* ***de*** *B*". Hay que suprimir ***de***.

Pág.261. Ejercicio 43 (a) "*Si P es la…de* ***una base de*** *B a B'*…".(Suprimir ***una base de***)

Pág.262 Ejercicio 43 (b) .Notar aquí la identificación de una matriz de transición con una base.

Capítulo 5: Espacios con producto interno

5.1. Longitud y producto punto en R^n

En esta sección se extienden al espacio R^n, los conceptos de longitud de un vector, ángulo y distancia entre vectores, proyección de un vector sobre otro, etc.

Ejercicios propuestos:15-19-23-27-39-41-61-71-73-76-78-79-85-88-93-94-95-97-98-105-107-109-113-119-120-121

OBSERVACIONES:

Algunos ejercicios están propuestos con el objetivo de "refrescar" conocimientos

Pág 240. Ejercicio 41. Dice: "*Encuentre… dado que* **u.v =**4…". Reemplazar **u.v** por **u.u**.

Pág.282.-En la definición del producto punto en R^n , el vector **v** tiene como n-ésima componente a u_n , y debe ser v_n.

Pág.284.- Ejemplo 6. En la Solución, 2º renglón , 4to término falta el punto en lugar de (2**v**)**v** debe ser(2**v**)**.v** al final

Pág.286.-Definición de ángulo entre dos vectores en R^n. Dice "**En** ángulo θ entre…".Debe decir "**El** ángulo θ …

Pág.291. En los ejercicios del 74 al 80: "*Encuentre los vectores* **v** *que son ortogonales al vector* **u** *dado*", a los vectores dados los simboliza con **v** y deben ser nombrados **u**.

Pág.291. Tanto en el ejercicios 97 b) como en el 98 b) hay un signo = que no debe estar.

5.2. Espacios con producto interno

Abundan los ejemplos que requieren del Cálculo, es apropiado trabajar algún ejemplo y/o dejar sugerido algunos ejercicios de este tipo (que podrán intentar resolver aquellos alumnos que tengan los conocimientos suficientes de Cálculo

Ejercicios propuestos: 6-7-(11)-17-21-27-29-33-35-39-(45)-51-65-67-(71)-79-81-84-85-86

OBSERVACIONES:

Los ejercicios entre paréntesis requieren cálculo. Los ejercicios 85 y 86 pueden ser mencionados luego de la definición de Producto interno. El ejercicio 84 debería enunciarse (también puede demostrarse) en "la teoría" luego de la definición de proyección ortogonal (pág.301).

En el ejercicio 87 se dá la definición de complemento ortogonal de un subespacio (en un espacio V, producto interno) y se pide probar que es un subespacio. Este mismo ejercicio se repite (para el espacio euclídeo R^n) en las dos secciones siguientes; es el ejercicio 68 (sección 5.3), y el ejercicio 46 (sección 5.4).

Pág.293. En el 5º renglón hay una omisión. "…*para que una función pueda calificarse como un* ***producto***… Debe decir: ***producto interno***.

Pág.304. Ejercicio 27. Dice:"…*como se muestra en los ejercicios* **17 y 18**". En lugar de **17 y 18** debe decir ***17 al 20***. Similarmente en el ejercicio 28 debe decir " …*en los ejercicios* ***21 al 24*** ".

Pág.304. Ejercicio 29. En la respuesta dice: "*Falla el axioma 4* ", y da un ejemplo … (pero mal) el ejemplo debe ser: $<(0,1),(0,1)>=0 \quad y \quad (0,1)\neq(0,0)$.

Pág.305. En los ejercicios 63 al 70 no define el producto interno, debe entenderse que el producto interno es el producto interno euclidiano (producto punto) en $\mathbf{R}^n$.

5.3. Bases ortonormales proceso de Gram_Schmidt

Si no se indica otro producto interno, se asumirá que el espacio $\mathbf{R}^n$ es el espacio vectorial con el producto interno euclidiano.

Ejercicios propuestos: 1-3-13-17-19-21-24-27-35-39-(43 al 46)-47-49-53-57-61-64

OBSERVACIONES:

Los ejercicios 68 y 69 no están en el listado anterior porque se vuelven a considerar en la sección siguiente

El ejercicio 46 de la sección **5.4** es el ej. 68, que es también una versión del 87 de la sección 5.2. El ejercicio 64 es una generalización del 113 de la sección 5.1..

Pág.306. Definición de conjuntos ortogonales. Dice:" *Un conjunto S de vectores en…se llama ortogonal si todo par de vectores* ***en S*** *es ortogonal* ". Debe decir:"…*todo par de vectores* ***distintos en S*** *es ortogonal* ".

Pág.308. Ejemplo 2. En lugar de $\mathbf{P^3}$ debe escribirse $\mathbf{P_3}$.

Pág.309.Teorema 5.10. En el séptimo renglón de la demostración dice: "*Así, como* ***cada*** *S es ortogonal,…*"Debe suprimirse la palabra ***cada***.

Pág. 309.Teorema 5.10. Tanto en el 6º como en el 8º renglón debe reemplazarse el producto $\langle \mathbf{v_i}, \mathbf{v_j} \rangle$ por $\langle \mathbf{v_i}, \mathbf{v_i} \rangle$.

Pág.312. Teorema 5.2 (G-S).Terminando el proceso de ortogonalización dice: "*Entonces B' es una base* ***ortonormal*** *para V* ". En lugar de ***ortonormal*** debe decir ***ortogonal*** .

Pág 315. Ejemplo 8. En la SOLUCIÖN, el primer vector $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (1,0,1)$, debe ser $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (0,1,0)$

Pág.318. Luego del ejercicio 36, dice: "*En los ejercicios 37 a 42 use el proceso de …para transformar la base dada para* $\boldsymbol{R}^n$ *en una base ortonormal para* ***el*** *subespacio*…".Debe reemplazarse $\boldsymbol{R}^n$ por ***gen(B)*** *y* ***el*** por ***dicho***.

Pág.319. Ejercicio 47(a). Dice: "…*es ortogonal si cada par de* ***vectores*** *en S es ortogonal*".Debe decir: "… *es ortogonal si cada par de* ***vectores distintos*** *en S es ortogonal*."

Pág.319. Ejercicio 47(b). "*Para probar que un conjunto* ***de vectores*** *diferentes de cero…*" Debe decir ***de n vectores*** , para que la respuesta correcta coincida con la del libro.

Pág.319. Ejercicio 64. Demostración guiada. Dice: "*Demuestre que…, entonces* ***w*** *es ortogonal* ***para*** *toda combinación lineal de vectores en S* ". Debe reemplazarse la palabra ***para*** por ***a***.

Pág.320. Ejercicio 68. Dice: "*Sea W un subespacio de* $\boldsymbol{R^n}$ *Demuestre que el conjunto siguiente es un subespacio de* $\boldsymbol{R^n}$ ***en W*** ". Omitir la expresión ***en W***. Además no define al conjunto que debe probarse es un subespacio. Éste es:

$$W^{\perp}=\{\mathbf{u}\in \boldsymbol{R^n}: \mathbf{v}.\mathbf{u} = 0 \text{ para todos los vectores } \mathbf{v} \in W \}$$

Luego del ejercicio 68 dice: "*En los ejercicios 69 a 72, encuentre* ***las bases*** *para los cuatro subespacios fundamentales* ***de la matriz A****…*". Cambiar por: *encuentre* ***bases*** *para los cuatro subespacios fundamentales* ***asociados a la matriz A***

5.4. Modelos matemáticos y análisis por mínimos cuadrados

En esta sección se trabajará sólo en el espacio vectorial $\mathbf{R}^n$ con el producto interno euclidiano. Se desarrollan aquí los conceptos de subespacios ortogonales, complemento ortogonal de un subespacio, proyección de un vector sobre un subespacio y distancia de un vector a un subespacio (siempre en el esp. euclídeo R^n)

Ejercicios propuestos: 1-2-3-4-6-7-9-12-13-15-17-19-45-(46)

Para el ejercicio 46 (el complemento ortogonal es un subespacio) debe leerse la observación correspondiente la Pág.322.

OBSERVACIONES:

Pág 321. Ejemplo 2. Dice: "*Son ortogonales debido a que el producto punto de* ***todor vector en*** $\boldsymbol{S_1}$ ***y*** $\boldsymbol{S_2}$ *es cero*". Debe decir: "... el producto punto entre **un vector en** $\boldsymbol{S_1}$ ***y uno en*** $\boldsymbol{S_2}$ ***es siempre*** *cero*". Además no demuestra la afirmación.

Pág 322. Luego de la definición de complemento ortogonal, en el cuarto renglón dice: "*En general, el complemento ortogonal de un subespacio de* $\boldsymbol{R^n}$ ***es el mismo*** *subespacio de* $\boldsymbol{R^n}$ *(véase el ejercicio 46).*". Debe reemplazarse ***el mismo*** por: ***es, él mismo, un*** *o por* ***es (también) un***. (En el ejercicio 46 (pág.334), entonces hay que modificar del mismo modo el enunciado). Puede hacerse aquí esta demostración.

Pág. 322. Antes del ejemplo 3 conviene trabajar lo siguiente*:*

" Si $S= gen\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,\dots \mathbf{v}_k\}$*, entonces :* $\mathbf{u}\in S^{\perp} \Leftrightarrow \mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}_i = 0 \quad \forall i =1,2,\dots,k$*" , es decir*

$$S^{\perp} = \{ \mathbf{u} \in R^n: \mathbf{u}\,.\mathbf{v}_i = 0 ,\ i =1,2,\dots,k\}"$$

Pág. 322. Ejemplo 3. Dice: "*Obtenga el complemento ortogonal del subespacio S* ***en*** $\boldsymbol{R^4}$ ***sobre*** *los dos vectores columna* $\boldsymbol{v_1}$*,* $\boldsymbol{v_2}$ *de la matriz A*". Debe decir: *Obtenga el complemento ortogonal del subespacio S* ***de*** $\boldsymbol{R^4}$ ***generado por*** *los dos vectores columna* $\boldsymbol{v_1}$*,* $\boldsymbol{v_2}$ *de la matriz A*".

En la SOLUCIÓN dice: "*Un vector* $\mathbf{u}\in\mathbf{R}^4$ ***será*** *el complemento…*" Debe decir: "***estará en*** *el complemento…*"

Pág.323. Luego del ejemplo 3 hace un comentario. Dice:" *Observe que… ,***S=espacio (**$\boldsymbol{v_1, v_2}$**)** y $\boldsymbol{S^{\perp}}$ ***=espacio (***$\boldsymbol{u_1, u_2}$***)***." Cambió la notación, debería ser: ***S=gen {***$\boldsymbol{v_1, v_2}$***}*** y $\boldsymbol{S^{\perp}}$ ***=gen {***$\boldsymbol{u_1, u_2}$***}***.

Pág.323. Definición de suma directa. Dice: "*Sean* S_1 *y* S_2*…. Si cada vector* $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R^4}$ *puede escribirse* ***únicamente*** *como suma…*". Debe reemplazarse $\boldsymbol{R^4}$ por $\boldsymbol{R^n}$ y ***únicamente*** por ***de una única manera***. Similar aclaración para el comentario anterior a esta definición.

Pág.324. Luego del Teorema 5.13, en la definición de Proyección de un vector sobre un subespacio, usa la palabra ***únicamente*** para indicar ***de una única manera***

Pág.326. Teorema 5.15.Los vectores involucrados son los vectores **v**, **u** y $proy_S\mathbf{v}$. Debe reemplazarse todo v_1 por v.

Pág.326. En lugar de *"Subespacios fundamentales **de** una matriz"*, mejor: *Subespacios fundamentales **asociados a** (o **determinados por**) una matriz*.

Pág.327. El espacio nulo de A es el espacio solución de A**x**=**0.** Luego dice $\boldsymbol{R(A)}$=Gen$\left(\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}\right)$. Error: en lugar de $\boldsymbol{R(A)}$ debe ser $\boldsymbol{N(A)}$.

Pág.333. Ejercicios. Dice: *"En los ejercicios del 1 al 4 determine **cuales de los siguientes conjuntos es ortogonal** "* El enunciado debe ser: "*En los ejercicios del 1 al 4 determine **si los subespacios son ortogonales***"

Pág.333. Ejercicio 17. La respuesta debe ser: Una base para R(A) es B= {(1,0), (2,1)}, por lo tanto R(A) = $\mathbf{R}^2$

Capítulo 6: Transformaciones lineales

6.1. Introducción a las transformaciones lineales

Pág.361. Es conveniente acordar con estas denominaciones: Si T es una función de V en W, V es el **dominio** de T y W el **codominio** (o conjunto de llegada) de T. Al conjunto de las imágenes, en lugar de rango de T, se lo llamará **recorrido de T** y simbolizaremos **R(T)**. Reservaremos la denominación **rango de T** (como se verá mas adelante) sólo para transformaciones lineales, para la dimensión del espacio vectorial **R(T)**.

Ejercicios propuestos:1-5-9-11-14-15-16-17-21-22-23-29-31a35 ,todos-37-39-41-55-56-57-59-61-63-(68-69)-70

OBSERVACIONES

Pág.371. Los ejercicios **13** y **20** deben descartarse. Ambas "funciones" están mal definidas.

6.2. El kernel y el recorrido de una transformación lineal

La sugerencia es **dar esta sección hasta el Teorema 6.5** (Teorema del rango, que está demostrado para una transformación matricial) **y los ejemplos correspondientes**. **No daríamos desde la página 382 hasta el final.**

Ejercicios propuestos: 1-2-3-5-7-8-10-13-15-19-23-27-31-32-33-34-37-39-40-41-42-(45)-55-56

Pág.377. Al principio de la página " ker(T) = ***espacio***{(1,-1,1)}. En lugar de esa notación usamos ***gen***{(1,-1,1)}.

Pág.377. Teorema 6.3 "*El kernel de **la** transformación lineal*…".Reemplazar ***la*** por ***una***.

Pág.377. Ejemplo 6. Debe decir: "*Determinación de una base **del** kernel*

Pág.378. Retoma el concepto de recorrido de una función, ahora para una transformación lineal. Hay que recordar que en lugar de **rango de T** al conjunto de las imágenes lo llamamos **recorrido de T** (**R(T)**). Hay que hacer ese reemplazo cuando corresponda.

Pág.380. Definición del rango y la nulidad de una transformación lineal. Aquí "aparece" otra vez la expresión **rango de T,** pero como la dimensión del (para nosotros) recorrido de T y se denotará **rango(T)**. Ésta será la acepción de rango de una transformación en la cátedra, por lo tanto **rango(T)** es un número.

Pág.380. Comentario previo al teorema 6.5."*esta relación es cierta para cualquier transformación lineal* ***de un espacio de dimensión finita*** *,…*" Debe decir:" …***de un espacio de dimensión finita V a un espacio W***,…"

Pág.385. Ejercicio 8. Dice **T: $\mathbf{R_3 \to R_2}$**. Debe ser **T: $\mathbf{P_3 \to P_2}$**.

Pág.385. Ejercicios 11 y 15 .En la respuesta persiste con el siguiente error, si el kernel es {**0**}, devuelve como base al mismo {**0**}. Ante esta situación la respuesta correcta sería: " ker(T)={**0**}, no está definido el concepto de base para el espacio cero".

Pág.385. Ejercicios 11 al 18 .Pide una base para el **rango de T**, debe entenderse una base para **R(T).**

Pág.386. En los ejercicios 19 a 30. En el ítem (c) reemplazar **rango (T)** por **R(T)** (Recorrido de T).

Pág.386.En los ejercicios 31 a38. *Dé una descripción geométrica del kernel y* ***el rango de T***". Reemplazar ***el rango de T*** por ***del recorrido de T***

6.3. Matrices de transformaciones lineales

No se dá Composición de transformaciones lineales. (páginas 391, 392 y 393 no se desarrollan) y se retoma la sección en la pág.394. *Bases no estándar y espacios vectoriales en general*.

Ejercicios propuestos 1-3-7-9-11-15-17-18-19-21-30-31-35-57-59-64-65-72 (a)-74 -75.

OBSERVACIONES

Pág.396. Ejemplo 7 .Dice: "*Determine la matriz de T,* ***por medio de*** *las bases…"Reemplazar* ***por medio de*** por ***con respecto a***.

Pág.398.. Hay que hallar T(**v**) usando las matrices citadas .El resultado debe coincidir con el obtenido por aplicación directa de la ley de T.(En la respuesta no figuran las matrices)

6.4. Matrices de transición y Semejanza

Ejercicios propuestos 1-5-9-13-15-16-17-18-19-21-25-30-31

OBSERVACIONES

Pág.405. Ejercicio 9 (b) "*Aplique las matrices A y P para encontrar…*". Reemplazar $[T(\mathbf{v})]_{B'}$ por $[T(\mathbf{v})]_B$.

Pág.405. Ejercicio 11. La base B tiene dos vectores, debe tener tres (es una base de $\mathbf{R}^3$).

Pág.406. Ejercicio 31(b) "*La base estándar …la* ***matriz de coordenadas*** *mas sencilla*…". Se sugiere reemplazar *la matriz de* ***coordenadas*** por *matriz de la* ***transformación***

6.5 Esta sección no se desarrolla

Capítulo 7: Eigenvalores y eigenvectores

7.1 Eigenvalores y eigenvectores

Ejercicios propuestos:1-3-5-9-11-13-15-19-21-23-25-27-41-52-54-56-59-60-61-62-63-64-65-66-74

OBSERVACIONES

Pág.424. Eigenespacios o espacios característicos."*Aunque en los ejemplos 1 y 2 se presenta solamente **el** eigenvector de cada eigenvalor…*". Reemplazar ***el*** por ***un***.

Pág.424. *Eigenespacios o espacios característicos*. En el noveno renglón dice: "*También es cierto que si* $\mathbf{x}_1$ *y* $\mathbf{x}_2$ *son eigenvectores correspondientes al mismo eigenvalor* λ *, entonces **su suma también es un eigenvector correspondiente a** λ.*" ¡esto no siempre es cierto! ¿Puede dar un ejemplo donde la suma de autovectores correspondientes a un mismo autovalor no es un autovector?

Pág.426. En la Solución del ejemplo 4 dice:"***La ecuación característica es***": Debe decir: ***El polinomio característico es***.

Pág.428. En la Solución del ejemplo 5 dice:"***La ecuación característica es***": Debe decir: ***El polinomio característico es*** .

Pág.429. En los dos últimos renglones dice: "*la determinación de raíces en una computadora es **tardada** (¿?) y está sujeta a errores por redondeo"*. Puede reemplazarse ***tardada*** por ***aproximada***.

Pág.431.-La segunda matriz de la página es A**'** (está como A**,**)

Pág.432 .-Ejemplo 8 , base no estándar B={ }, debe ser B**'** ={ }.

Pág.433. Ejercicio 17. Problema en la respuesta.

Pág.433. Error en el enunciado común de los ejercicios 41 al 48 (figura como subíndice lo que debe ser exponente). La ecuación característica de la matriz A es $\lambda^2 - 6\lambda + 11 = 0$ y, por Cayley-Hamilton, $\mathbf{A}^2 - 6A + 11\mathbf{I} = 0$

7.2 Diagonalización

Ejercicios propuestos: 3-5-9-11-13-17-21-25-27-29-31-33-35-45-46-47-49-51-55-56

OBSERVACIONES

Pág.438. Comentario luego del teorema 7.5 "…*las columnas de P constan de (**los**) n autovectores linealmente independientes* ". Suprimir ***los***.

Pág.444. En la solución del ejemplo 8 al final ,dice: "*La matriz para T respecto a **estas bases** es*:" Debe decir *"respecto a **estas bases** "*

Pág.446. Ejercicios 56 y 57."*Demuestre que la matriz no es diagonalizable*". Pero la matriz del ej. 57 es diagonal (luego diagonalizable). Debe reemplazarse la matriz del ej.**57** por la siguiente: $\begin{bmatrix} k & c \\ 0 & k \end{bmatrix}$ $c \neq 0$.

&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&