Sistemas y Señales I

Implementación de Sistemas en TD
Solución de Ecuaciones en Diferencias

Temario: Cap. 4

Sistemas IIR y FIR

FIR (Finite Impulse Response): Respuesta al Impulso (de longitud) Finita

IIR (Infinite Impulse Response): Respuesta al Impulso (de longitud) Infinita

- **FIR causal:**

$$h(n) = 0 \;\; ; n < 0 \;\; \text{y} \;\; n \geq N$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(n) \cdot u(n-k)$$

Implementable Prácticamente

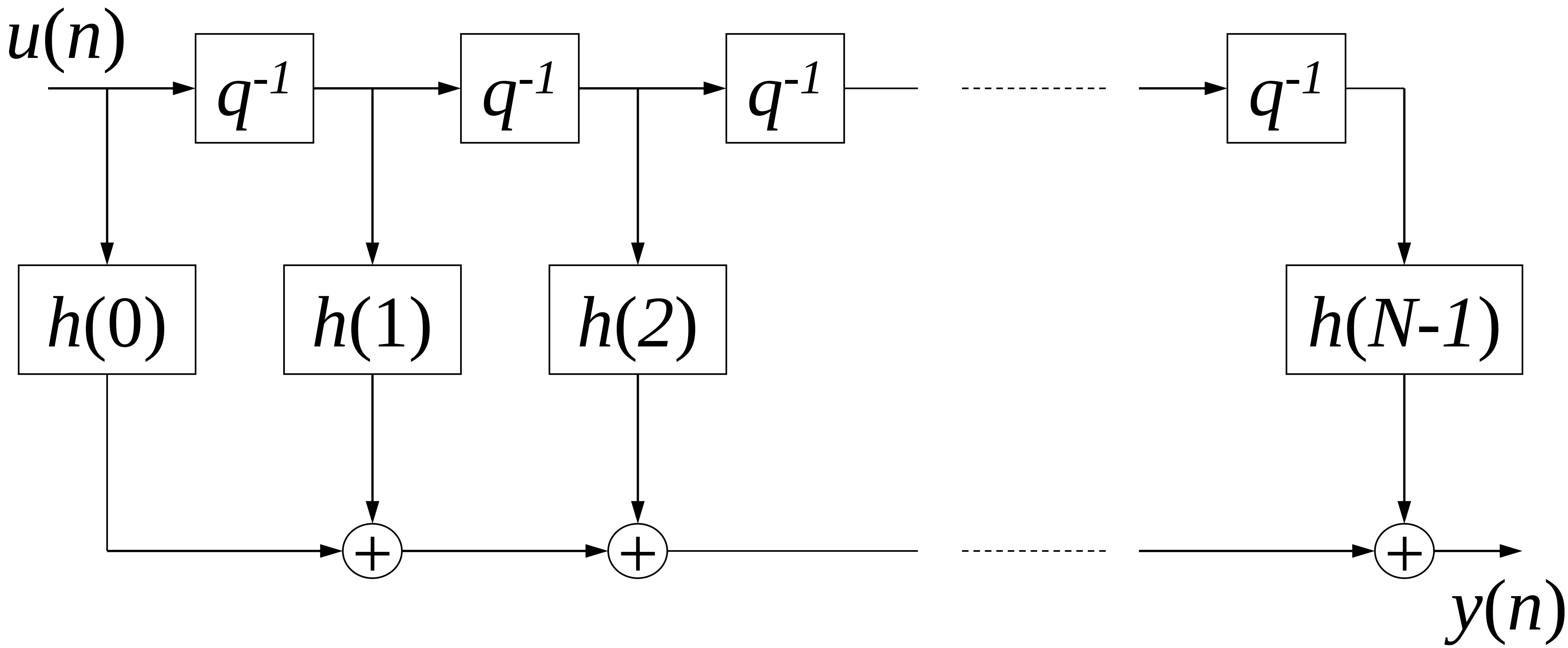

Fig. 1: Implementación **FIR no recursiva**

q: Operador desplazamiento directo

q^{-1}: Operador desplazamiento inverso (retardo unitario)

$$q\,x(n) = x(n+1)$$ → **NO CAUSAL**

$$q^{-1}x(n) = x(n-1)$$

- **IIR causal:** → La mayoría de los sistemas físicos

$$h(n) = 0 \quad ; n < 0$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \cdot u(n-k)$$ ← NO Implementable Prácticamente

Representaciones Recursiva y No Recursiva

- **No recursiva:**

$$y(n) = F\left[u(n), u(n-1), \cdots, u(n-M)\right]$$

$$u(n) \longrightarrow \boxed{F\left[u(n), u(n-1), \cdots, u(n-M)\right]} \longrightarrow y(n)$$

Fig. 2: Implementación **FIR no recursiva**

Ejemplo Típico:
Suma de Convolución

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} h(k) \cdot u(n-k)$$

- **Recursiva:**

$$y(n) = F\left[y(n-1), y(n-2), \cdots, y(n-N), u(n), u(n-1), \cdots, u(n-M)\right]$$

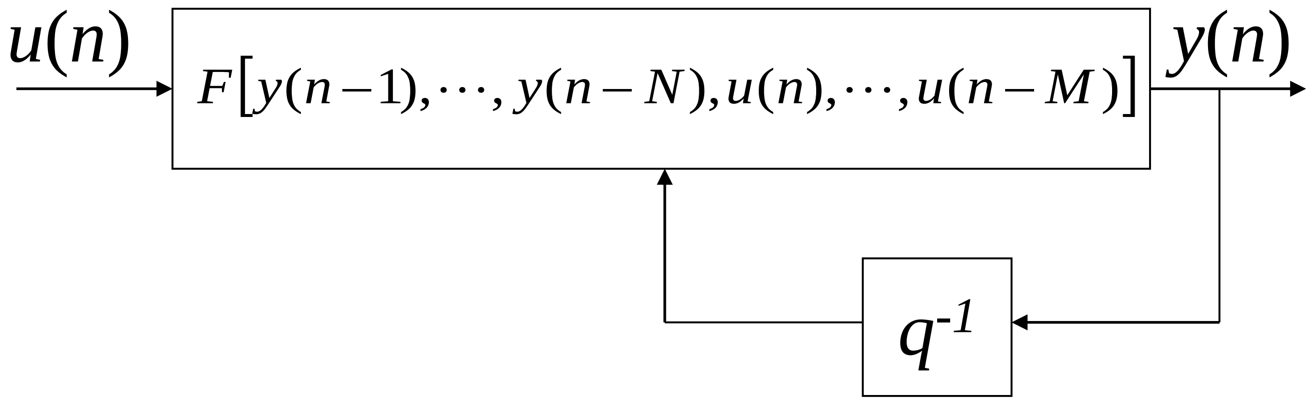

Fig. 3: Implementación **IIR recursiva**

Ejemplo Típico: **Ecuación en Diferencias (ED)**

$$y(n) = -\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot u(n-k)$$

N: Orden de la ecuación o del sistema

Solución de ED → necesitamos

- $u(n)\ ,\ n \geq 0$
- N condiciones iniciales:
  $y(-1), y(-2), \ldots, y(-N)$

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k \cdot y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot u(n-k) \qquad (1)$$

$$y(n) = y_H(n) + y_P(n) \qquad (2)$$

$y_H(n)$: Solución de la ecuación homogénea asociada → **Respuesta Libre**

$$y_H(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k \cdot y_H(n-k) \qquad (3)$$

$y_P(n)$: Solución particular de la ecuación No homogénea → **Respuesta Forzada**

- **Respuesta Libre:**

(3) puede escribirse:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot y_H(n-k) = 0 \quad ;\text{donde} \;\; a_0 = 1 \qquad (4)$$

Se proponen soluciones del tipo:

$$y_H(n) = \lambda^n \qquad (5)$$

Reemplazando en (4) queda:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot \lambda^{n-k} = 0$$

O bien:

$$\lambda^{n-N} \cdot \underbrace{\left(\lambda^N + a_1 \cdot \lambda^{N-1} + a_2 \cdot \lambda^{N-2} + \cdots + a_N\right)}_{\text{Polinomio Característico}} = 0$$

Polinomio Característico → N raíces: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$

De donde resulta:

$$y_H(n) = \sum_{k=1}^{N} c_k \cdot \lambda_k^n$$

- **Respuesta Forzada:**

$y_P(n)$ de la misma forma que $u(n)$

Entrada	Solución Particular
A (constante)	k (constante)
$\mathrm{A}\,\mathrm{M}^{n}$	$\mathrm{k}\,\mathrm{M}^{n}$
$\mathrm{A}\,n^{\mathrm{M}}$	$\mathrm{k}_0\, n^{\mathrm{M}} + \mathrm{k}_1\, n^{\mathrm{M-1}} + \cdots + \mathrm{k}_{\mathrm{M}}$
$\mathrm{A}^{n}\, n^{\mathrm{M}}$	$\mathrm{A}^{n}\,(\mathrm{k}_0\, n^{\mathrm{M}} + \mathrm{k}_1\, n^{\mathrm{M-1}} + \cdots + \mathrm{k}_{\mathrm{M}})$
$\mathrm{A}\cos(\omega_0 n)$, $\mathrm{A}\sin(\omega_0 n)$	$\mathrm{k}_1\cos(\omega_0 n) + \mathrm{k}_2\sin(\omega_0 n)$

- **Nota:** Una representación recursiva en la forma de una ecuación en diferencias a coeficientes constantes corresponde a un sistema IIR.

  Lo converso no se verifica, es decir, no todo sistema lineal-estacionario IIR puede describirse por una ecuación en diferencias a coeficientes constantes.

Respuesta al impulso de un sistema lineal estacionario con una representación recursiva

Ejemplo: $$y(n) = a \cdot y(n-1) + u(n)$$

$$\Downarrow$$

$$y(n) = \underbrace{a^{n+1} \cdot y(-1)}_{\substack{y_{H(n)} \\ \textbf{Resp. Libre}}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a^{k} \cdot u(n-k)}_{\substack{y_{F(n)} \\ \textbf{Resp. Forzada}}}$$

Asumiendo condiciones iniciales nulas (i.e., $y(-1) = 0$), la respuesta del sistema al impulso es:

$$h(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k \cdot \delta(n-k)$$

$$h(n) = a^n$$

Recordando la condición necesaria y suficiente para la BIBO-estabilidad del sistema, tenemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left| a^k \right| < \infty$$

Que se cumple sólo si: $\boxed{|a| < 1}$ **BIBO-estabilidad**

El procedimiento se puede extender para el caso de un sistema descripto por una ecuación en diferencias de orden N, de la forma (1).

En este caso resulta:

$$h(n) = \sum_{k=1}^{N} c_k \cdot \lambda_k^n$$

Para BIBO-estabilidad tenemos entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{N} c_k \cdot \lambda_k^n \right| \leq \sum_{k=1}^{N} |c_k| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_k|^n \quad < \infty \quad (*)$$

BIBO-estabilidad

Por lo que deberá ser:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_k|^n < \infty \qquad \forall k$$

Es decir:

$$|\lambda_k| < 1 \qquad \forall k$$

Ya que si algún λ_k es tal que $|\lambda_k| \geq 1$, entonces (*) no se verifica.

Podemos concluir entonces:

Condición Necesaria y Suficiente para la estabilidad de un sistema causal IIR descripto por una ecuación en diferencias a coeficientes constantes es que las raíces del polinomio característico tengan módulo menor que 1.

$$\left|\lambda_k\right| < 1 \quad , \forall k$$