Sistemas y Señales I

Señales y Sistemas

Temario: Cap. 1: Items 1.1, 1.3.2, 1.3.3

Definiciones de Sistemas y Señales

- **Sistema:** conjunto de componentes interactuantes.
- **Señal:** es una función, típicamente del tiempo, y posiblemente de alguna otra variable (como ser coordenadas espaciales) que representa alguna magnitud de interés asociada con el sistema.

Ejemplos:

1. Señales de Voz (variable independiente: tiempo).

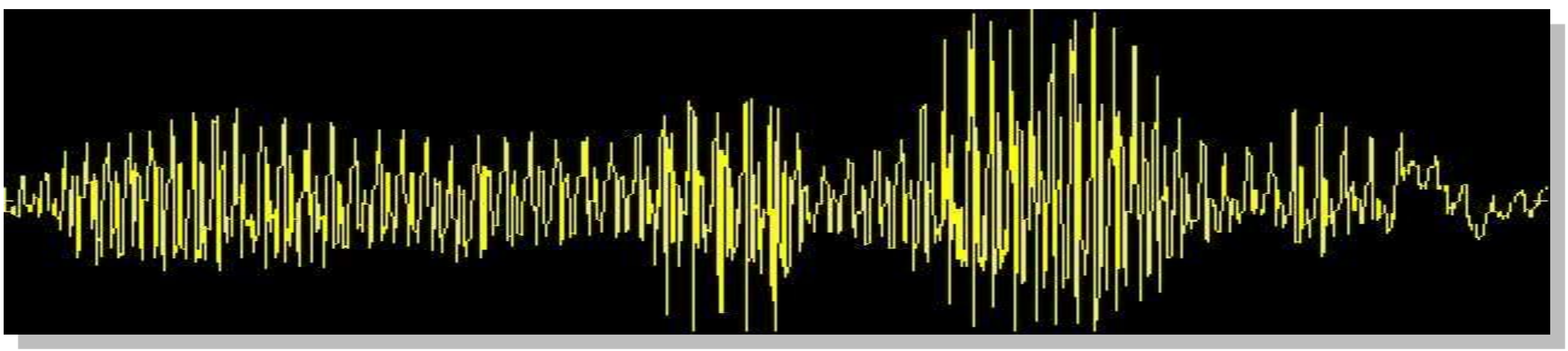


Fig. 1: Señal de Voz (oscilograma)

2. Señales en un electrocardiógrafo, o electroencefalógrafo (variable independiente tiempo).

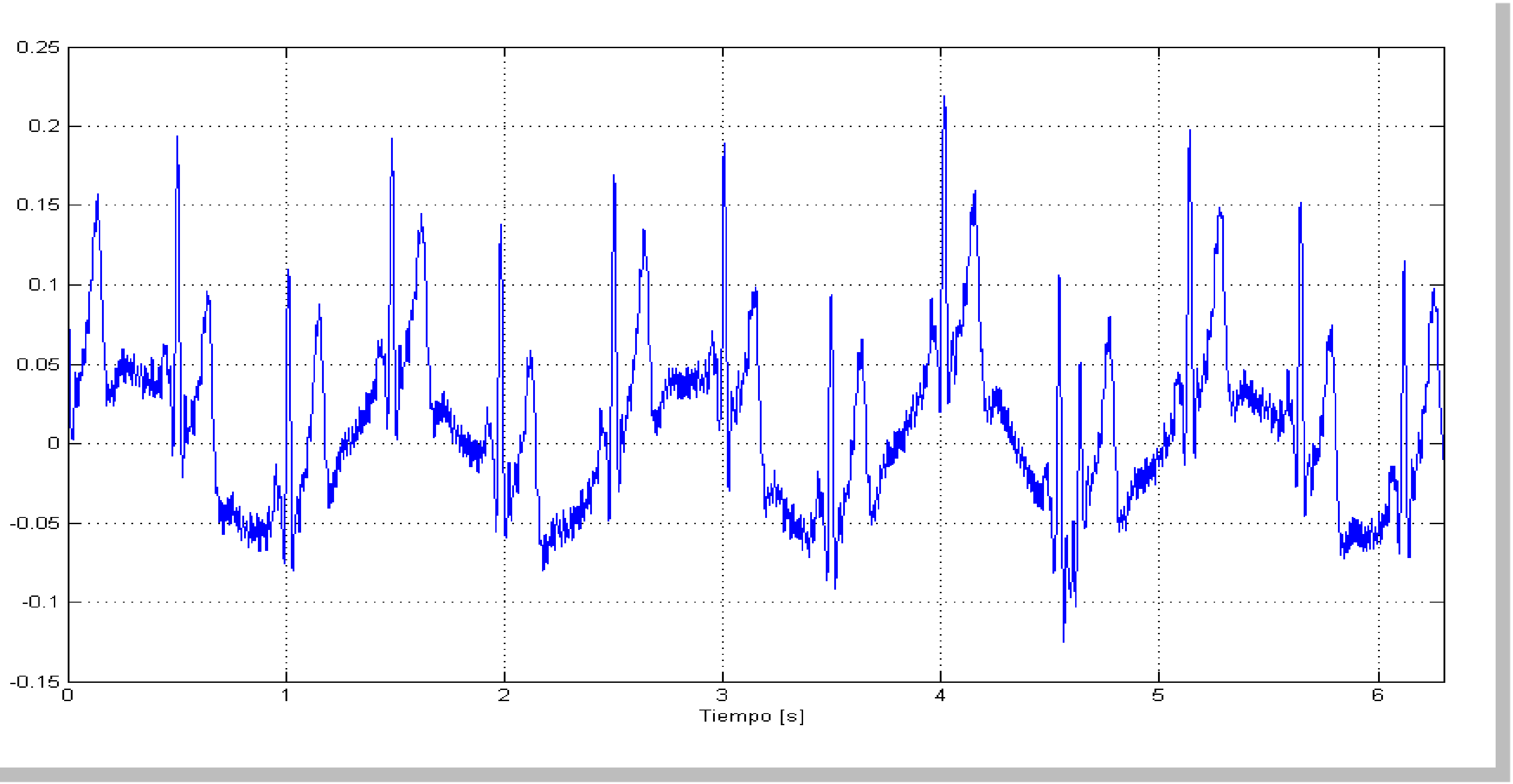


Fig. 2: Señal de Electrocardiograma

3. Imagen digital (dos variables independientes: coordenadas espaciales del pixel)

Fig. 3: Imagen Digital

(256 x 256) pixels

- La interacción de los componentes en el sistema genera señales observables.
- Las señales observables que son de nuestro interés son usualmente denominadas **salidas** del sistema y las denotaremos con *y*.
- El sistema está también afectado por estímulos externos. Las señales externas que pueden ser manipuladas son usualmente llamadas **entradas**, que denotamos con u, mientras que las que no pueden ser manipuladas son llamadas **perturbaciones**. Las perturbaciones suelen dividirse en aquellas que pueden medirse directamente y aquellas que se ponen en evidencia sólo a través de su influencia en las salidas.

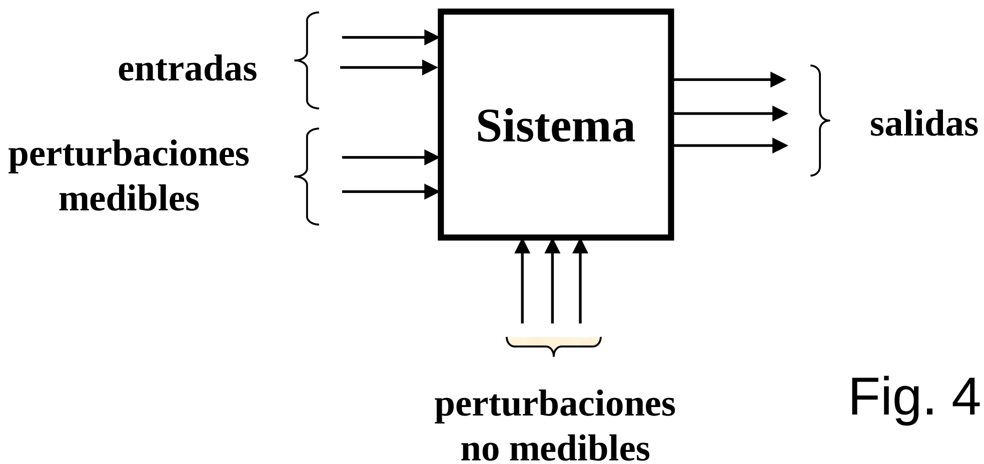


Fig. 4: Sistema Dinámico

- Sistemas con una sola entrada y una sola salida se denominan **SISO** (Single-Input/Single-Output), o escalares, o monovariables.

- Sistemas con varias entradas y varias salidas se denominan **MIMO** (Multiple-Input/Multiple-Output), o multivariables.

- Los sistemas no necesariamente están restringidos a sistemas físicos. Pueden ser biológicos, económicos, computacionales, informáticos, sociales, etc.

Ejemplos:

- **Sistema de Calefacción Solar**

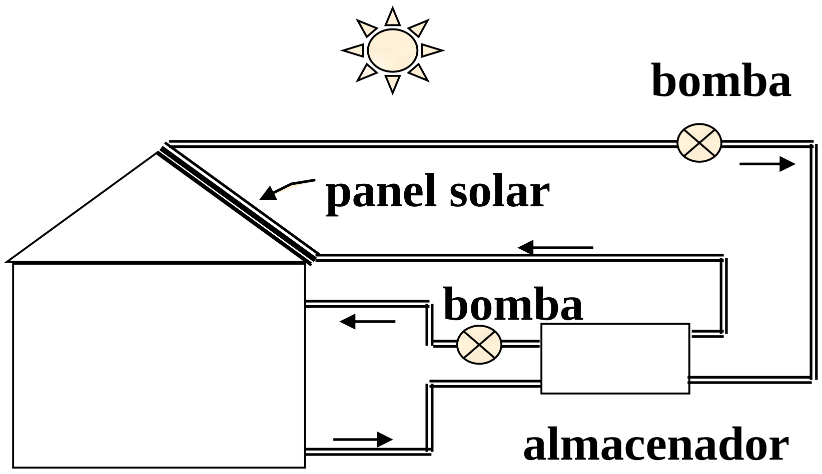


Fig. 5: Sistema de Calefacción solar

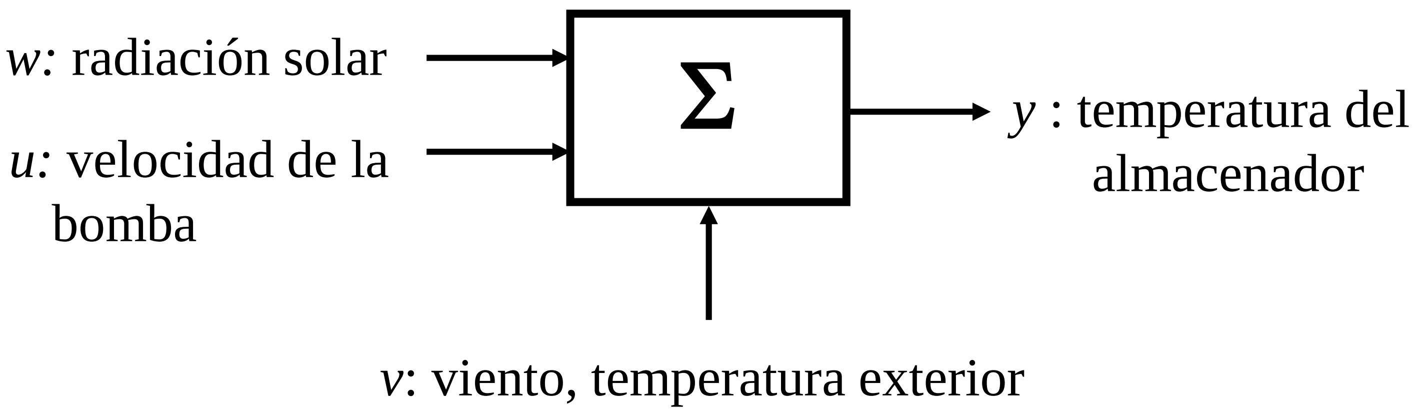


Fig. 6: Diagrama de Bloques del sistema de Fig. 5.

▪ Sistema mecánico rotacional

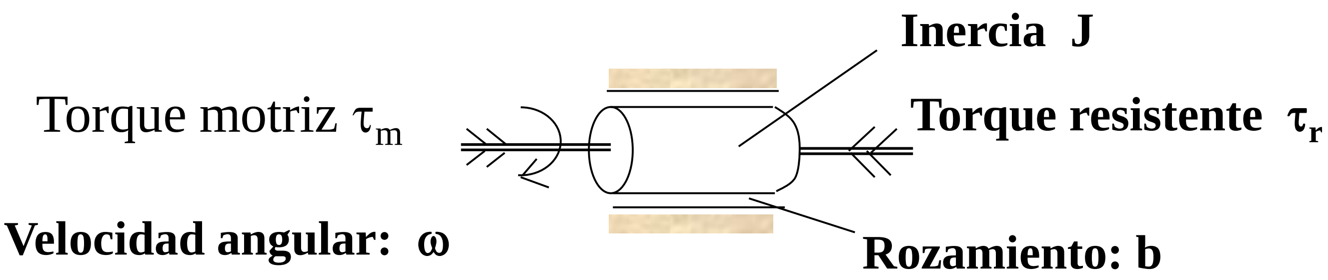


Fig. 7: Sistema Mecánico rotacional.

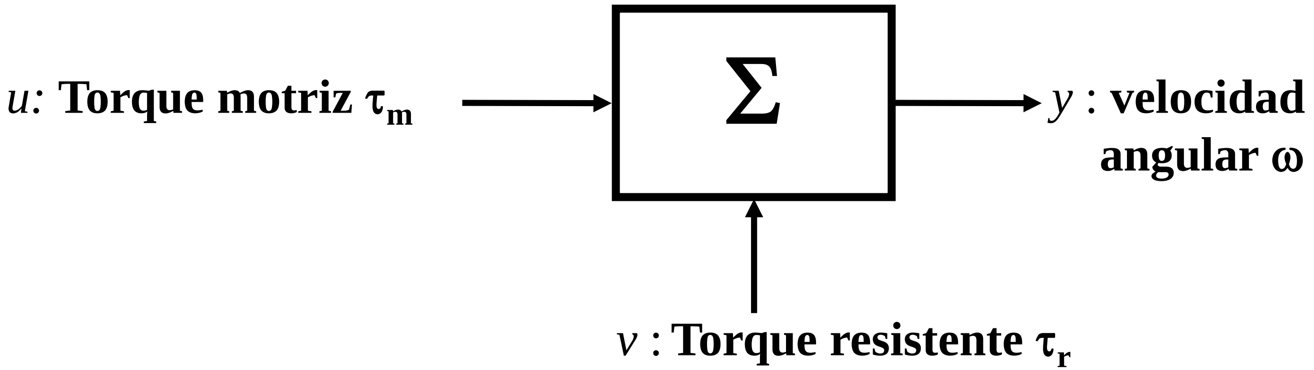


Fig. 8: Diagrama de bloques del Sistema de Fig. 7.

- **Ecosistema**

Ambiente aislado compuesto por dos clases de individuos: **presas** (P: población de presas) y **depredadores** (D: población de depredadores).

Hipótesis del modelo:

1. En ausencia de depredadores (D=0), la población de presas crece exponencialmente.

2. Los depredadores sólo se alimentan de presas, por lo que en ausencia de presas (P=0), la población de depredadores se extingue exponencialmente.

Un posible modelo que verifica estas hipótesis es el de **Lotka-Volterra**

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = a_1\, P - a_2\, DP \\[2ex] \dfrac{dD}{dt} = a_3\, P\, D - a_4\, D \end{cases}$$

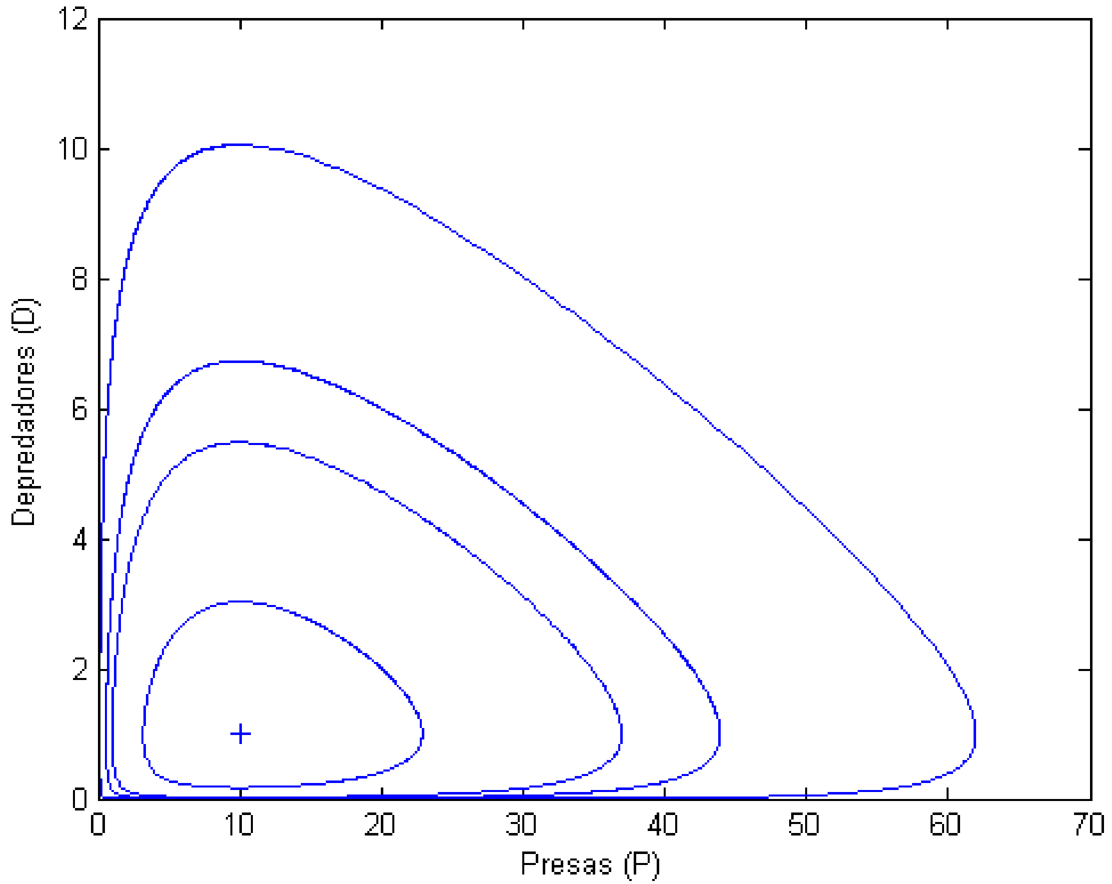


Fig. 9: Plano de Fase del modelo Lotka-Volterra.

Parámetros: $a_1 = 5 \ , \ a_2 = 5 \ , \ a_3 = 1 \ , \ a_4 = 10$

Puntos de equilibrio: (0 , 0) ; (10 , 1)

- **Algoritmo de Integración numérica**

Se quiere resolver numéricamente el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Se discretiza el tiempo, de forma que $t = kT$, con k entero y T el período de muestreo, y se aproxima la derivada por el cociente incremental

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{T} = f(x_k)$$

donde $x_k = x(t = kT)$, de modo que resulta

$$x_{k+1} = x_k + Tf\left(x_k\right)$$

que es una **ecuación en diferencias de primer orden,** que se puede implementar como un **algoritmo iterativo**, conociendo la condición inicial x_0.

Este es el denominado **Método de Euler** de integración numérica (de primer orden).

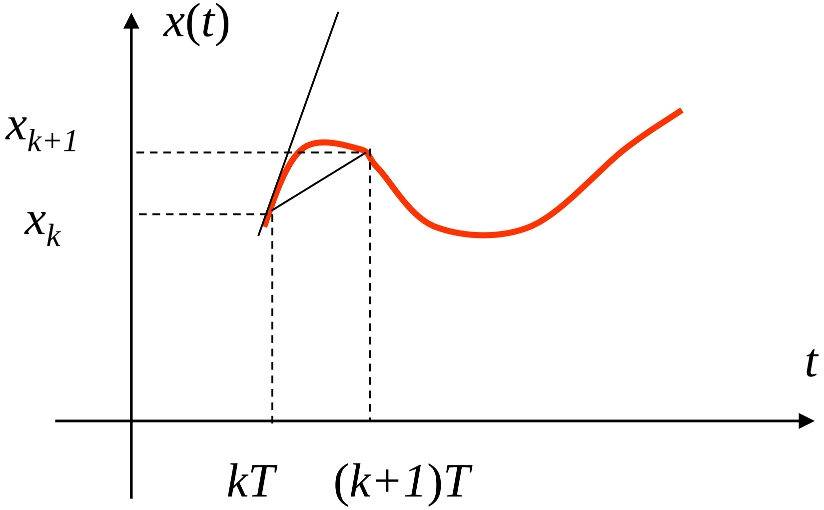


Fig. 10: Método de Integración de Euler.

Linealidad y Estacionariedad de Sistemas

- **Linealidad:** Un sistema es **lineal** si verifica el *Principio de Superposición*, tanto para entradas como para condiciones iniciales.

Si para una entrada u_1 aplicada en el instante t_0, con el sistema en un estado inicial Σ_0, la salida es y_1 , y para una entrada u_2 aplicada en el instante t_0, con el sistema en un estado inicial Σ_0, la salida es y_2

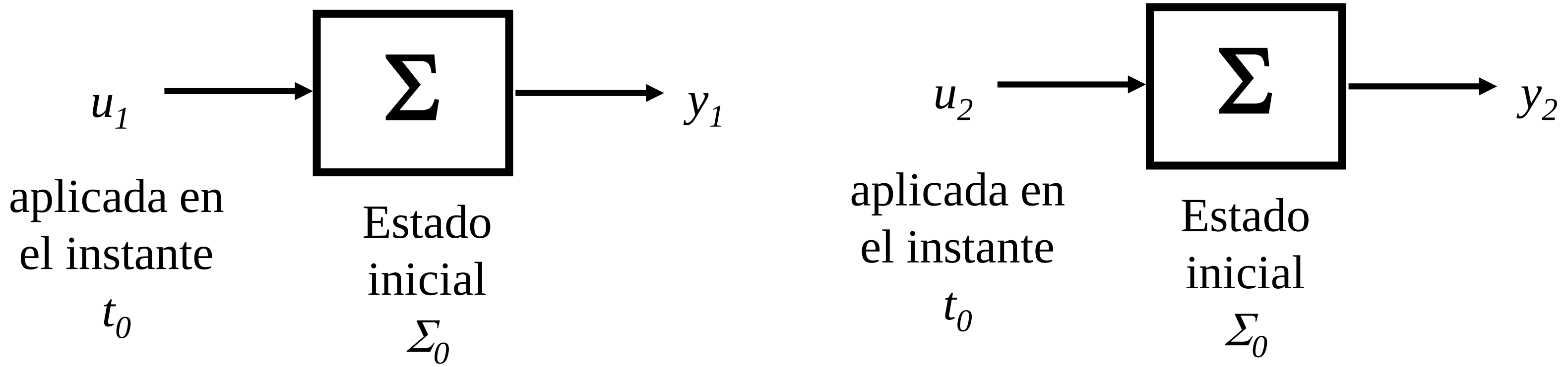


Fig. 11: Sistema con dos entradas diferentes.

Entonces, si se aplica una entrada $c_1u_1 + c_2u_2$ (con c_1 y c_2 const.), en el instante t_0, con el sistema en un estado inicial Σ_0, la salida será:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

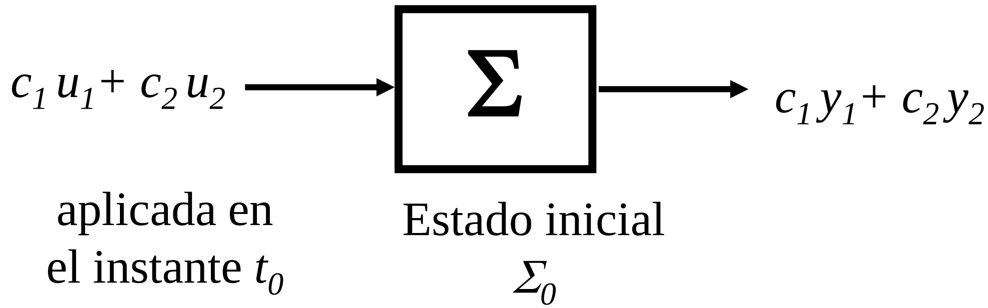


Fig. 12: Sistema con combinación lineal de entradas.

- Es claro que esta propiedad, como fue definida, es imposible de verificar en la práctica, ya que no se pueden realizar los ensayos propuestos en el mismo período de tiempo.

  Debemos asumir entonces que el sistema no cambia con el tiempo (propiedad de **estacionariedad**, que definiremos más adelante), de manera que podemos realizar los ensayos a distintos tiempos a partir del sistema en el mismo estado inicial.

- Un sistema que no verifica el principio de Superposición se denomina **no lineal**.

- **Estacionariedad:** Un sistema es **<u>estacionario</u>** si su salida es siempre la misma cada vez que se aplique la misma entrada (para las mismas condiciones iniciales), sin importar el instante en que se aplique la entrada.

Para dar una definición más precisa, es necesario definir el operador desplazamiento temporal que notaremos: z^{Δ}

que aplicado a una función del tiempo, la desplaza temporalmente un intervalo Δ, es decir:

$$z^{\Delta}: \ u(t) \rightarrow \tilde{u}(t) = u(t-\Delta)$$

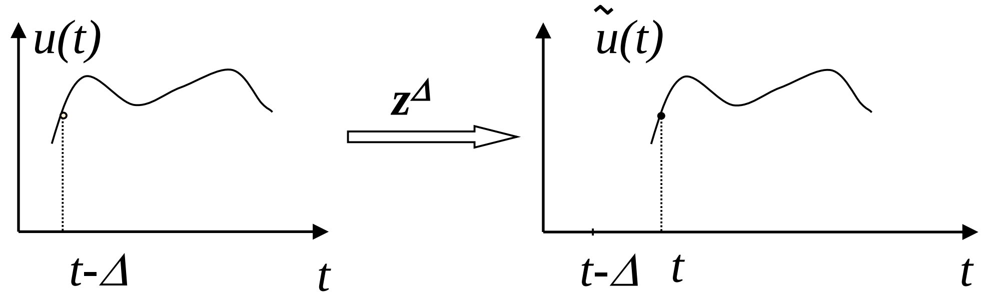


Fig. 13: Desplazamiento temporal.

Por lo tanto, el sistema es **estacionario** si para una entrada $u(t)$ aplicada en el instante t_0 la salida es $y(t)$, entonces para una entrada $\tilde{u}(t) = z^{\Delta} u(t)$ aplicada en $t_0+\Delta$ la salida es $\tilde{y}(t)=z^{\Delta} y(t)$

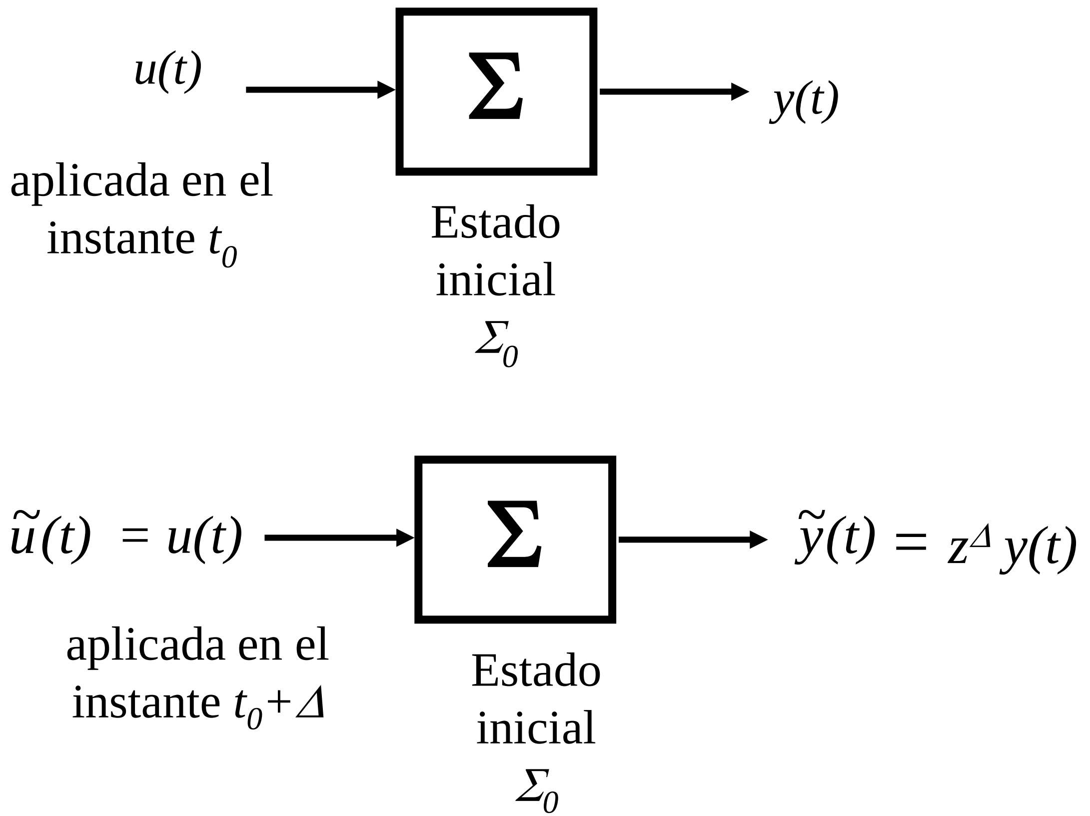


Fig. 14: Principio de Estacionariedad.

Sistemas Estáticos y Sistemas Dinámicos

Un sistema en el cual la salida en el instante t depende exclusivamente de la entrada en ese instante t es llamado **Sistema Estático** o sin memoria. En contraposición, un **Sistema Dinámico** es uno en el cual la salida en el instante t depende también de valores pasados y/o futuros de la entrada, además del valor en t.

Sistemas Causales y No causales

Un sistema es **causal** si su respuesta a una entrada no depende de valores futuros de esa entrada y/o valores futuros de salidas. Un sistema que no verifica esta propiedad es llamado **no causal**. En particular un sistema se dice **anticausal** si su respuesta a una entrada depende exclusivamente de valores futuros de esa entrada y/o valores futuros de salidas.

Sistemas en Tiempo Continuo y en Tiempo Discreto

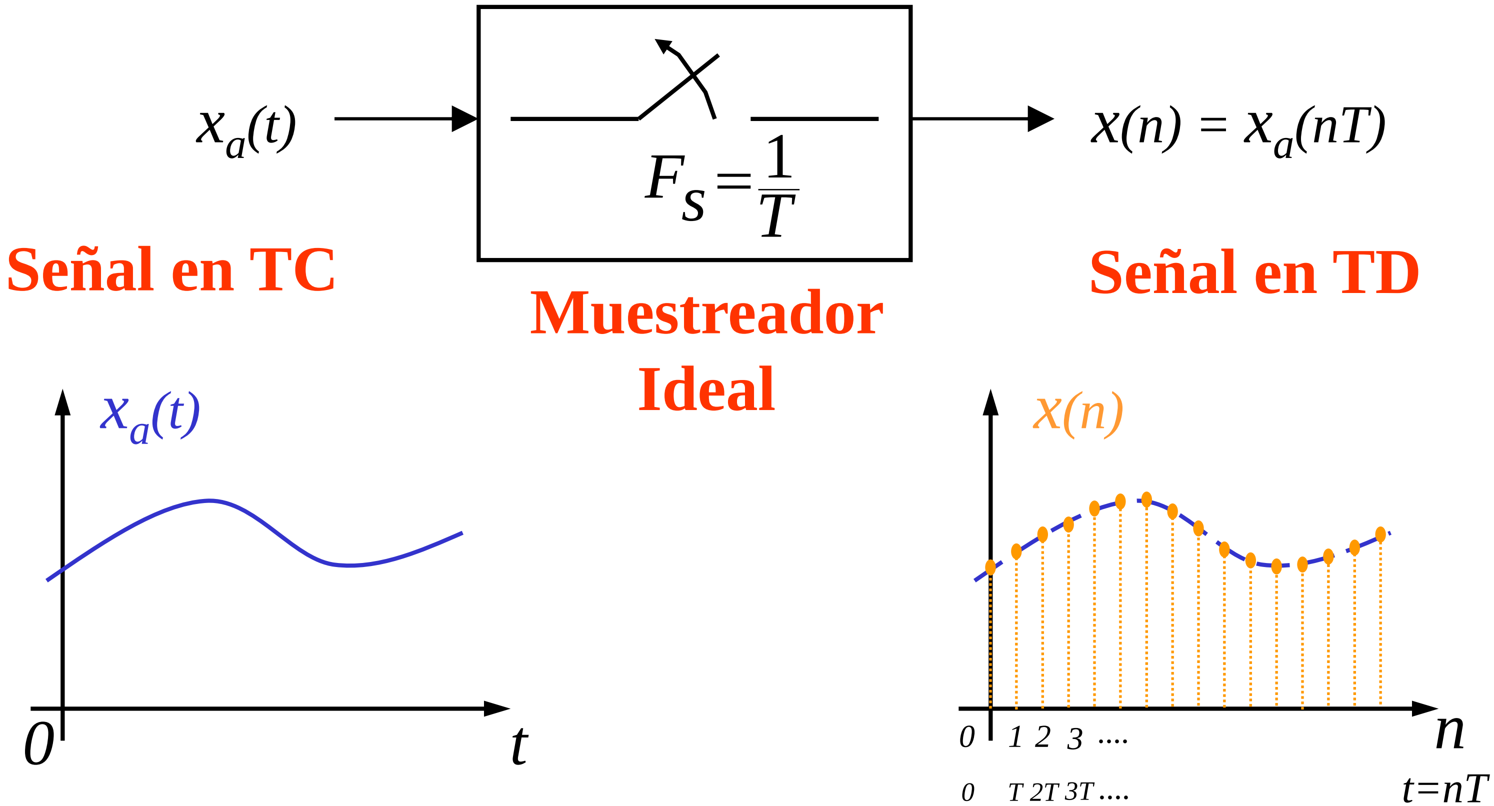
Si las señales que procesa el sistema están definidas en un intervalo continuo de tiempo (aunque no necesariamente sean funciones continuas del tiempo) el sistema es denominado **Sistema en Tiempo Continuo**.

Por otra parte, si el sistema procesa señales que están definidas únicamente en instantes particulares de tiempo (generalmente equiespaciados), el sistema es llamado **Sistema en Tiempo Discreto**.

Para señales en tiempo discreto, el valor de la señal entre instantes de muestreo puede ser cero, indefinido o de no interés.

Debemos hacer una distinción entre señales en tiempo discreto y **señales a valores discretos** (**quantized signals**), que son señales que pueden asumir sólo un número contable de valores, o niveles, pero el cambio de un nivel a otro puede ocurrir en cualquier instante de tiempo.

En muchos casos las **señales en tiempo discreto** se obtienen por **muestreo** de señales en tiempo continuo.



F_s: frecuencia de muestreo [Hz] $\qquad T = \frac{1}{F_s}$: período de muestreo [seg]

Fig. 15: Muestreo de señales en TC.

Un **Sistema Híbrido** es uno en el que coexisten señales en tiempo continuo y en tiempo discreto.

Señales Determinísticas y Estocásticas

Si las señales que procesa un sistema son determinísticas, es decir si pueden ser modeladas con una función completamente específicada del tiempo, el sistema se denomina **determinístico**.

Un sistema **estocástico** es aquel en el cual las señales son aleatorias, es decir son señales que toman valores aleatorios en cada instante de tiempo y que son modeladas probabilísticamente (en general se especifican las estadísticas de primero y segundo orden (media y varianza) y/o la función de densidad de probabilidad).

Señales Periódicas y Aperiódicas

Definición: Una señal $x(t)$ en TC se dice **periódica** si existe un valor $T_0 > 0$, tal que

$$x(t+T_0) = x(t) \qquad -\infty < t < \infty$$

El menor valor de T_0 para el cual se verifica esta ecuación se denomina **período fundamental**. Una señal que no verifica esta propiedad se dice que es **no periódica** o **aperiódica**.

Similarmente, una señal en TD $x(n)$ se dice **periódica** si existe un entero $N > 0$, tal que

$$x(n+N)=x(n) \qquad \text{para todo } n$$

El menor valor de N para el cual se verifica esta propiedad se denomina **período fundamental** **(nro. de muestras en un periodo)**.

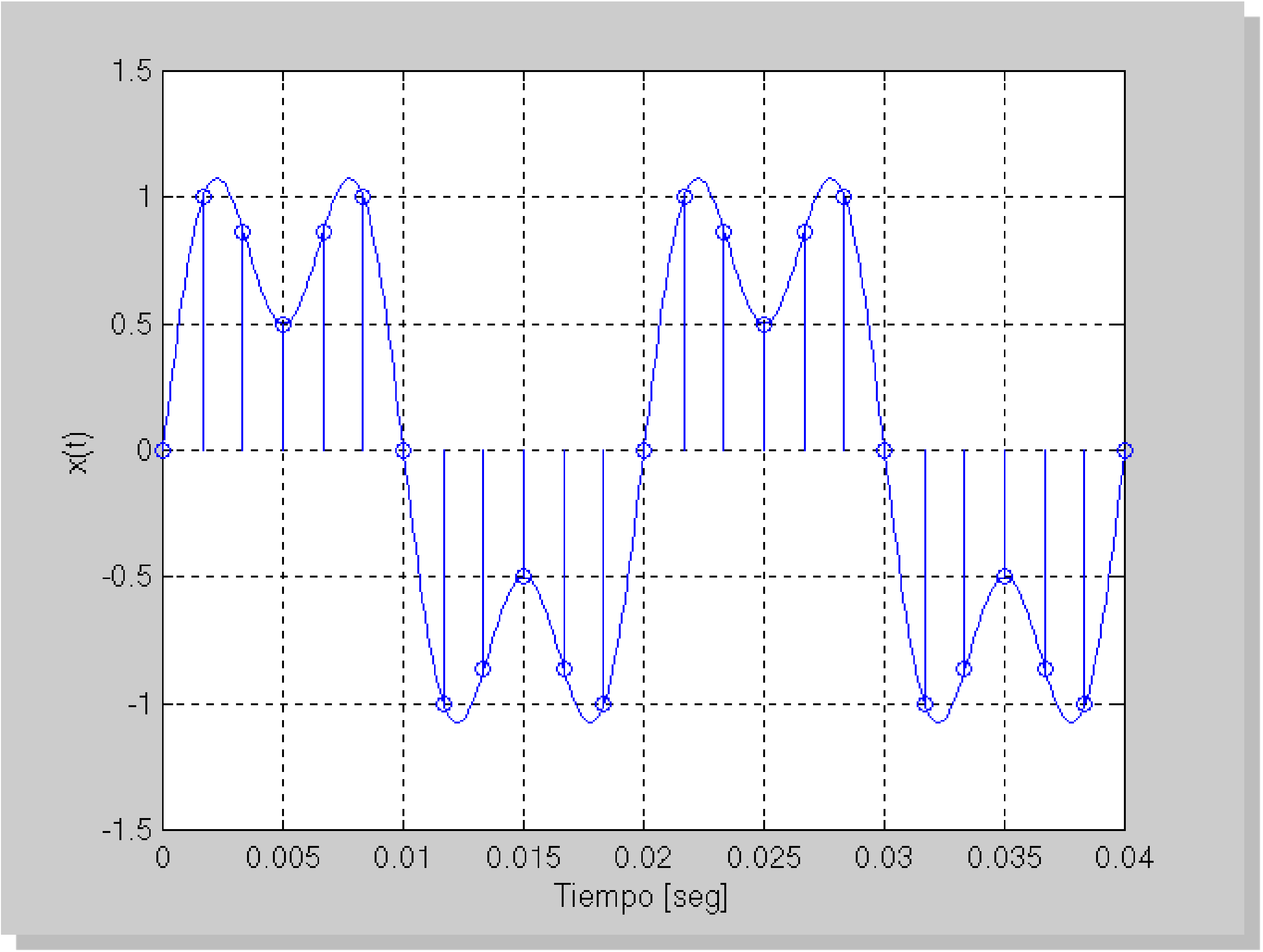


Fig. 16: Señal en TC periódica (T = 0.02 seg.) y señal en TD (muestreo con Fs = 600 Hz) también periódica (N = 12 muestras).