Teoría de Sistemas y Señales

Problemas Propuestos – Serie 5

Descripción: Análisis de Sistemas Lineales Estacionarios en TC en el dominio Transformado de Laplace. Álgebra de bloques.

1. Obtenga la Transformada de Laplace de las siguientes señales:

- **a.** $x(t) = \left(1 - e^{-2t}\right)\mu(t)$
- **b.** $x(t) = \left(e^{-2t} - e^{-10t}\right)\mu(t)$
- **c.** $x(t) = \mu(t) - \mu(t-10)$
- **d.** $x(t) = \delta(t) - \delta(t-10)$
- **e.** $x(t) = \cos 200\pi t$
- **f.** $x(t) = sin200\pi t$
- **g.** $x(t) = (t+1)^2$
- **h.** $x(t) = sin(t)sin(3t)$
- **i.** $x(t) = sinh(t)$

2. Grafique las siguientes señales y obtenga la Transformada de Laplace. Dé la región de convergencia en cada caso.

- **a.** $x(t) = \delta(t) - \delta(t-1) + \delta(t-2)$
- **b.** $x(t) = \mu(t) + e^{-3t}\mu(t)$
- **c.** $x(t) = e^{-4t}\mu(t) - e^{-4(t-1)}\mu(t-1)$

3. Encuentre las señales cuyas transformadas de Laplace unilaterales son las siguientes:

- **a.** $X(s) = \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{(s+10)}$
- **b.** $X(s) = 1 + \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{(s+2)}$
- **c.** $X(s) = \dfrac{1}{(s+5)} - \dfrac{1}{(s+10)}$
- **d.** $X(s) = \dfrac{s+10}{s^2+8s+20}$
- **e.** $X(s) = \dfrac{s+3}{s^2+4s+5}$
- **f.** $X(s) = \dfrac{s}{s^2+6s+18}$
- **g.** $X(s) = \dfrac{10}{s^2+10s+34}$
- **h.** $X(s) = \dfrac{7s^3+20s^2+33s+82}{(s^2+4)(s+2)(s+3)}$
- **i.** $X(s) = \dfrac{2s^3+9s^2+22s+23}{\left[(s+1)^2+4\right](s+1)(s+3)}$
- **j.** $X(s) = \dfrac{s^2(s+9)}{(s+3)^3(s+1)}$

k. $X(s) = \dfrac{7s^2 + 15s + 10}{(s+1)^2(s+3)}$

l. $X(s) = \dfrac{s^4 + 8s^2 + s + 17}{(s^2+4)^2(s+1)}$

m. $X(s) = \dfrac{s^2 + 3}{\left[(s+1)^2 + 4\right]^2 (s+1)}$

n. $X(s) = \dfrac{1}{s(s+2)^2}$

o. $X(s) = \dfrac{3s^2 + 9s + 12}{(s+2)(s^2+5s+11)}$

4. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias usando la Transformada de Laplace.

a. $\ddot{x}(t) + 6\dot{x}(t) + 5x(t) = e^{-7t}\mu(t)$, con $x(0) = 0$, y $\dot{x}(0) = 0$

b.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + 3x(t) + 2y(t) = \mu(t) \\ \dot{y}(t) - x(t) = 0 \end{cases}$$ con $x(0) = y(0) = 0$

c. $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = sin(t)$ con $x(0) = \alpha$, y $\dot{x}(0) = \beta$

5. Calcule el valor inicial y el valor final de las señales cuyas transformadas de Laplace son:

a. $X(s) = \dfrac{s+5}{s^2 + 10s + 34}$

b. $X(s) = \dfrac{1 - e^{-2s}}{s+4}$

c. $X(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2}$

6.

a. Calcule la función transferencia para el diagrama de bloques mostrado en la figura.

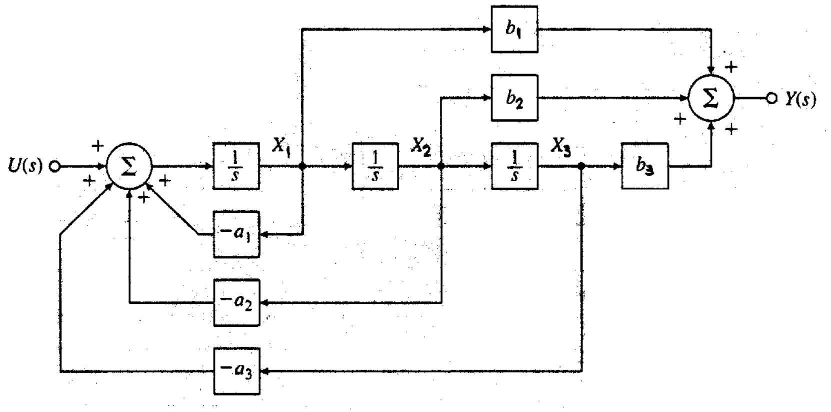
b. Escriba la ecuación diferencial ordinaria que describe la relación entrada-salida.

c. Escriba tres ecuaciones diferenciales de primer orden simultáneas en la variables $x_1(t), x_2(t),$ y $x_3(t)$ indicadas en la figura. Escriba las ecuaciones en forma matricial, definiendo el vector

$$x(t) = \left[x_1(t), x_2(t), x_3(t)\right]^T.$$

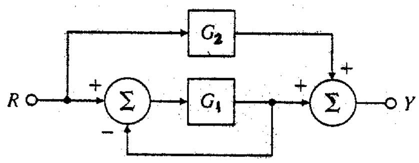
Nota: Estas ecuaciones se denominan **Ecuaciones de Estado**, y las variables variables $x_1(t), x_2(t),$ y $x_3(t)$ se denominan **Variables de Estado** (El conocimiento de las variables de estado y de la entrada en el instante t permite determinar cualquier otra variable dependiente del sistema en ese instante).

N.B.: Note que los mismos parámetros constantes aparecen en la función transferencia, la ecuación diferencial ordinaria, y las ecuaciones de estado. La estructura particular representada en la figura se denomina **Forma Canónica de Control**.

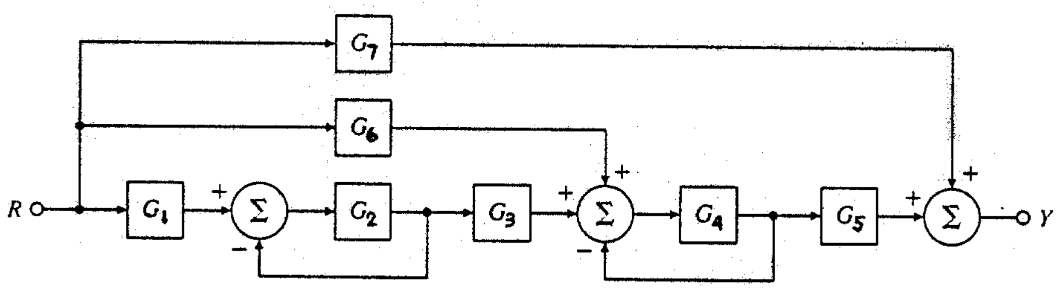


7. Usando Algebra de Bloques, calcule las funciones transferencias (entrada R y salida Y) de los DB representados en las figuras.

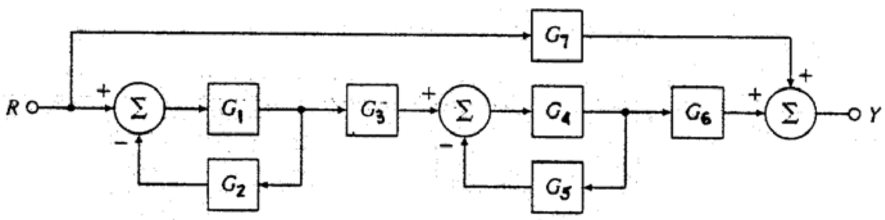
a.



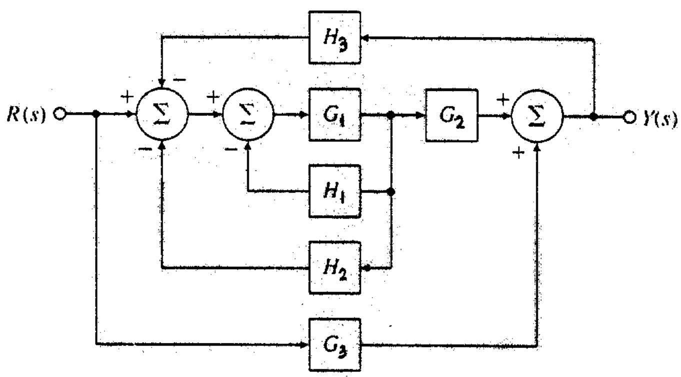
b.



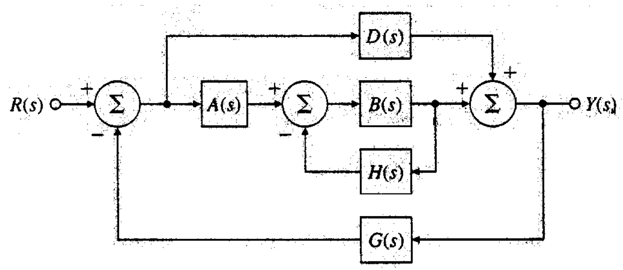
c.



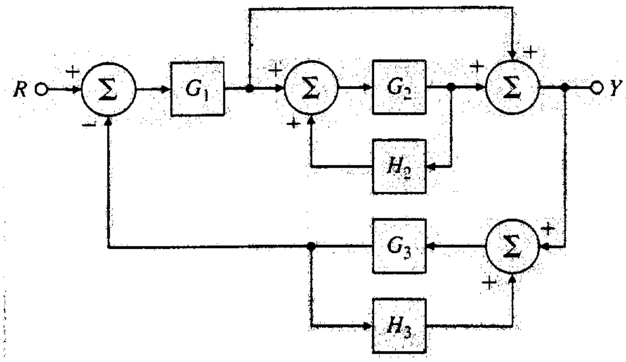
d.



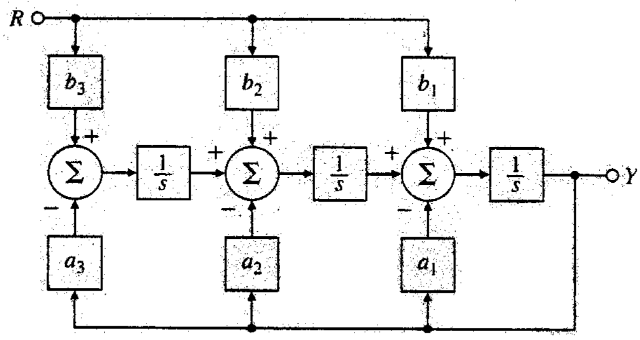
e.



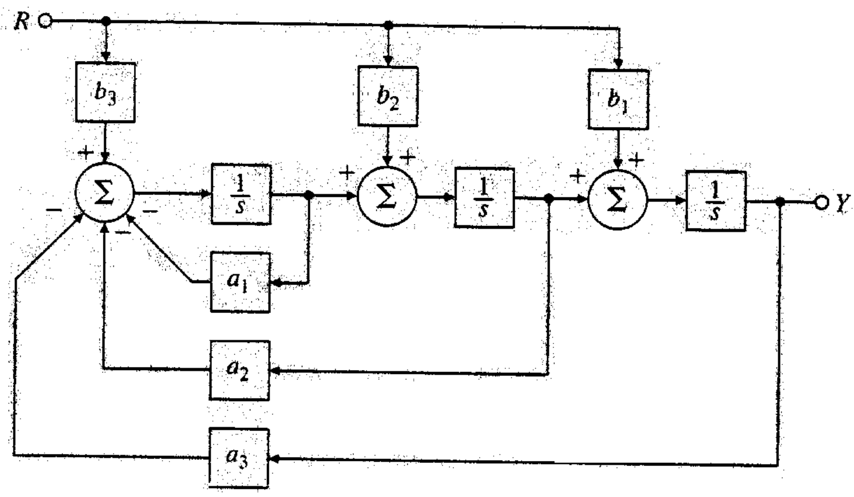
f.



g.



h.



8. La figura representa esquemáticamente un motor de corriente contínua con excitación independiente constante, alimentado por armadura con una tensión *u(t)*. La conversión electromecánica puede modelarse con las ecuaciones

$\varepsilon = K\omega$

$\tau = ki$

donde

ε : fuerza contra-electromotriz inducida en la armadura
ω : velocidad angular de rotación
τ : torque electromagnético
i : corriente de armadura

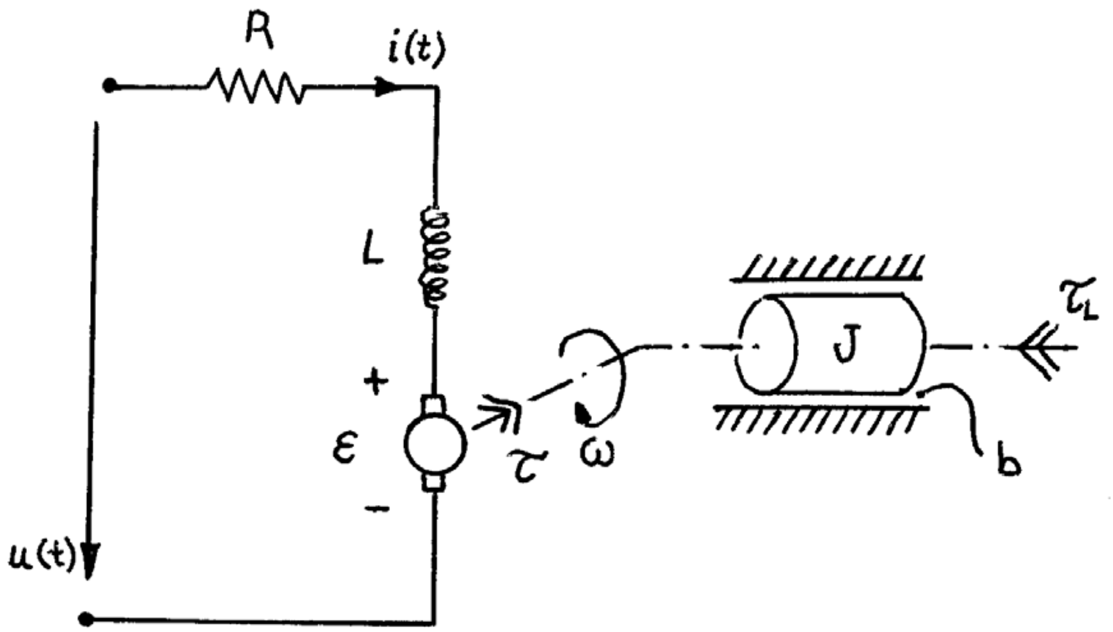
Se tiene además que

R : resistencia de armadura
L : inductancia de armadura
J : momento de inercia en el eje del motor
b : coeficiente de rozamiento (rozamiento de tipo viscoso $\Rightarrow$ torque de rozam. $\propto$ velocidad ω)
τ_L : torque externo de carga

a. Haga un diagrama de bloques tomando como salida la velocidad ω.
b. Calcule las siguientes funciones transferencia

$$H_1(s) = \frac{\omega(s)}{U(s)}$$

$$H_2(s) = \frac{\omega(s)}{\tau_L(s)}$$



9. Simulación de Diagramas de Bloques en *Simulink*

La aplicación **Simulink** de MATLAB permite simular y analizar sistemas dinámicos lineales y no lineales a partir de una representación con diagrama de bloques. En este problema nos concentraremos en crear el modelo Simulink de un sistema a partir de su Diagrama de Bloques y obtener la función transferencia de dicho sistema en forma automática a fin de verificar los resultados obtenidos en los ejercicios precedentes.

Para comenzar a utilizar la herramienta **Simulink** se debe hacer **click izquierdo** sobre el icono  que figura en la barra de herramientas de MATLAB en la parte superior de la ventana principal. Otra forma es tipear `simulink` en la ventana de comando de MATLAB. Una vez abierto **Simulink** aparecerá la siguiente ventana:

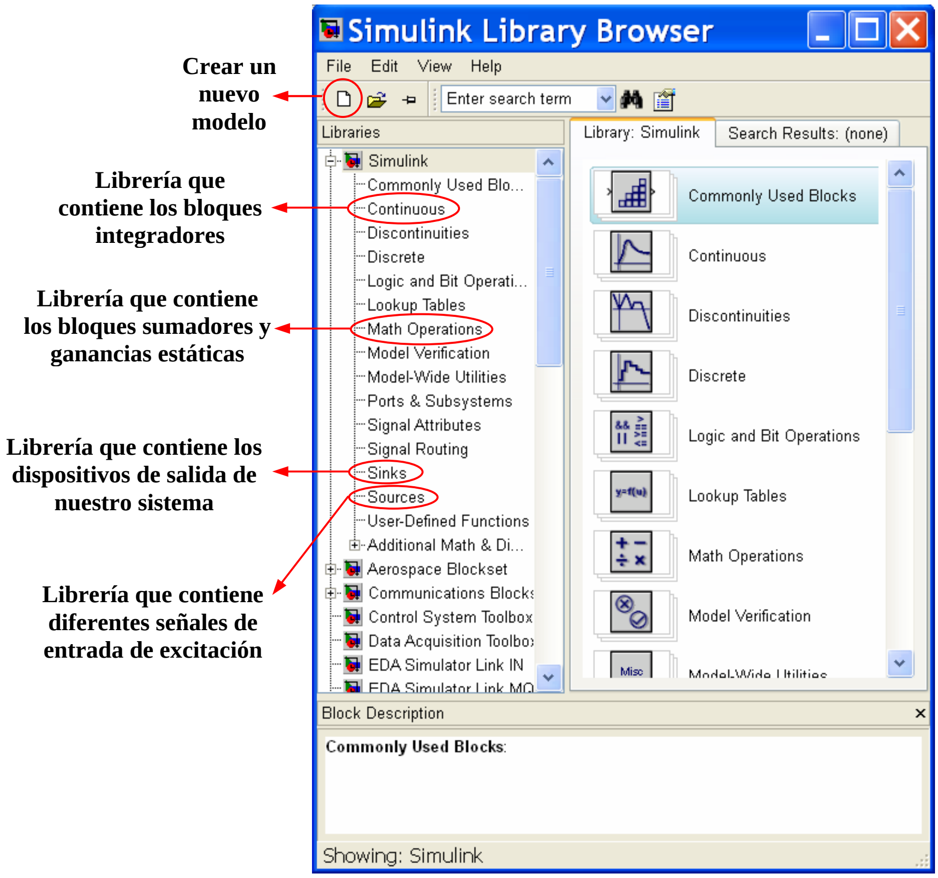
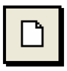


Figura 1: Ventana Principal de Simulink

Si bien **Simulink** tiene un extenso conjunto de herramientas, agrupadas en librerías, por ahora nos concentraremos en las que se encuentran resaltadas en la Figura 1.

i. Creación de modelo mediante Diagrama de Bloques

Para crear el Diagrama de Bloques de nuestro sistema haremos click izquierdo sobre el icono  y se abrirá una nueva ventana donde dibujaremos nuestro Diagrama de Bloques. A continuación deberemos “arrastrar” a esta hoja los diferentes bloques (integradores, sumadores, ganancias estáticas, etc..) para interconectarlos y formar el modelo de nuestro sistema. En particular utilizaremos:

Para conectar los bloques podemos hacerlo de 2 maneras:

a) Seleccionando el bloque inicial a conectar con un **click izquierdo**, mantener apretada la tecla **Ctrl**, seleccionar el bloque final a conectar con un **click izquierdo**.

b) Desde el punto de conexión del bloque inicial o final a conectar, arrastrar **manteniendo apretado el botón izquierdo** del mousse la “flecha conectora” hasta el punto de conexión del bloque final o incial respectivamente.

De esta manera podríamos por ejemplo obtener un Diagrama de bloques de un sistema de primer orden como el que se muestra en la Figura 2. Para cambiar los nombres de las ganancias de los bloques Gain basta simplemente hacer **doble click izquierdo** sobre el bloque y modificar el atributo “Gain”.

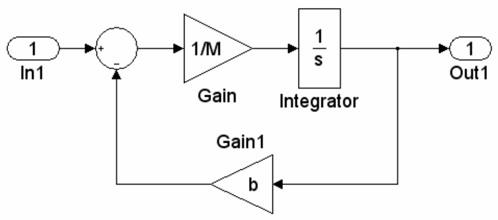


Figura 2: Ejemplo de un Diagrama de Bloques implementado en Simulink

ii. Obtención de la Función Transferencia a partir del Diagrama en Bloques

Una vez construido nuestro diagrama de bloques, podemos obtener la función transferencia del mismo a partir de agregar un bloque **in** que identificará la entrada (lo encontramos en la librería Sources) y un bloque **out** que identificará la salida (lo encontramos en la librería Sinks). Una vez conectados estos bloques guardaremos nuestro modelo con algún nombre, por ejemplo, `sistema.mdl`. Es importante asignarle valores numéricos a todas las constantes que aparezcan en nuestro Diagrama de bloques, en los bloques o en el espacio de trabajo (definiendo los valores de las constantes M y b del ejemplo). Luego ejecutando los siguientes comandos en la ventana de Comando de Matlab se obtiene la función transferencia:

>> [A , B , C , D] = linmod('sistema'); ← calcula la matrices de estado del sistema
>> [numerador , denominador] = ss2tf(A,B,C,D); ← calcula N(s) y D(s) de la FT
>> tf(numerador , denominador) ← muestra la FT

iii. <u>Problema:</u> Una vez obtenidos los diagramas en bloque y sus respectivas funciones transferencias para los sistemas de los **Problemas 6.a., 7.g., 7.h. y 8** de la presente práctica:

a. Asignarle valores a las constantes si no los tuvieran.

b. Verificar usando **Simulink** si se calcularon correctamente las Funciones Transferencias.

A la hora de asignarle valores a las constantes de los sistemas elija valores que permitan un cálculo rápido de la Función Transferencia sin importar si lo valores tienen sentido físico o no.