# Sistemas y Señales I

## Señales en Tiempo Discreto
## Teorema de Muestreo

**Temario:** Cap. 1: Items 1.3.5, 1.5

- Señales en Tiempo Continuo: están definidas en un intervalo continuo de tiempo.
- Señales en tiempo discreto: están definidas sólo en valores discretos de tiempo. Los instantes de tiempo no necesariamente están equiespaciados.
  - En general, las señales en Tiempo Discreto (TD) aparecen cuando se muestrea una señal analógica, es decir, cuando se toman muestras de la señal a instantes discretos de tiempo.
  - Si los instantes de tiempo están equiespaciados, el muestreo se denomina **periódico** o **uniforme**

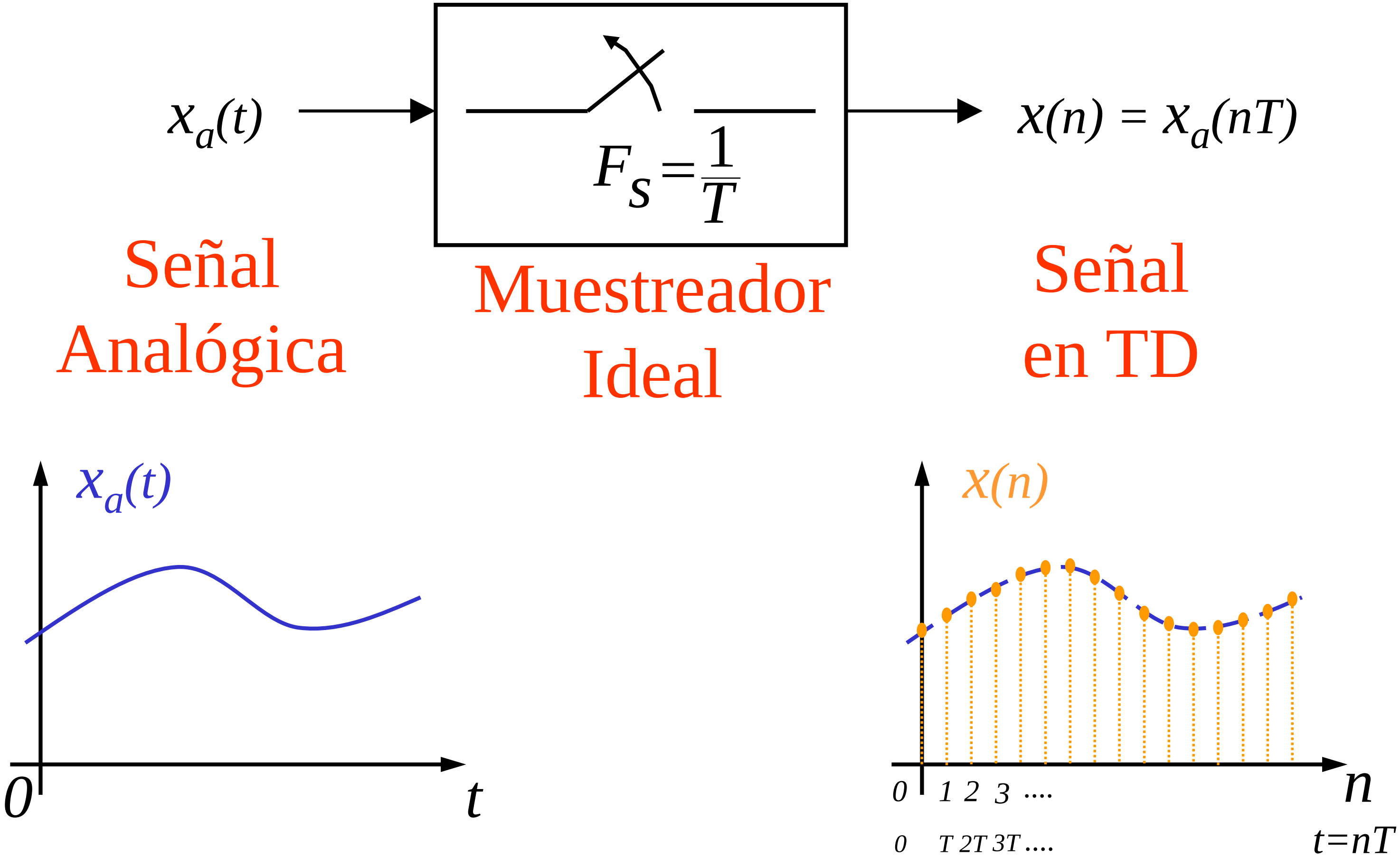


Figura 1: Muestreo uniforme

$F_s$: frecuencia de muestreo [Hz]

$T = \frac{1}{F_s}$ : período de muestreo [seg]

- Consideraremos muestreo periódico o uniforme → intervalos entre muestras sucesivas constante.

- Las variables "$t$" y "$n$" están relacionadas de acuerdo a:

$$\boxed{t = nT = \frac{n}{F_s}}$$

- Como consecuencia, la frecuencia $F$ (o $\Omega$) de una señal periódica en TC, estará relacionada con la frecuencia $f$ (o $\omega$) de la correspondiente señal muestreada.

Consideremos

$$x_a(t) = A\cos(2\pi F t + \theta)$$

$$\Big\downarrow \quad \text{Muestreo } F_s = \frac{1}{T}$$

$$x(n) \triangleq x_a(nT) = A\cos(\underbrace{2\pi F}_{=\Omega} nT + \theta)$$

$$= A\cos\left(\frac{2\pi n F}{F_s} + \theta\right)$$

$$= A\cos(\underbrace{2\pi f}_{=\omega} n + \theta)$$

por lo que:

$$\boxed{f = \frac{F}{F_s}}$$

frecuencia normalizada o relativa

$$\boxed{\omega = \frac{\Omega}{F_s} = \Omega T}$$

- En contraste con las señales senoidales en TC, las señales senoidales en TD verifican:
    1. Una señal senoidal en TD es periódica si y sólo si su frecuencia f es un número racional.

    Por definición $x(n)$ es periódica si y sólo si $\exists\, N$ ( $N>0$ ) tal que:

    $$x(n+N) = x(n) \quad \forall n$$

    El menor valor de *N* que verifica esta propiedad se denomina período fundamental.

    Para el caso de una onda senoidal, tendríamos:

    $$\cos(2\pi f\,(N+n) + \theta) = \cos(2\pi f\,n + \theta) \qquad \forall n$$

    que se verifica si y sólo si: $2\pi f\,N = 2\pi\,k$ con $k$ entero

    $$\Updownarrow$$

    $$f = \frac{k}{N} \quad \Leftrightarrow f \text{ es racional}$$

– Para determinar el período fundamental *N* de una senoide discreta, expresamos *f* como el cociente de dos números enteros primos relativos. Entonces el período *N* es el denominador de esta expresión.

$$f_1 = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \qquad \text{próxima a} \qquad f_2 = \frac{29}{60}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$N_1 = 2 \qquad \text{muy distinta} \qquad N_2 = 60$$

2. Señales sinusoidales en TD cuyas frecuencias están separadas un múltiplo entero de 2π son idénticas.

$$\cos[(\omega + 2\pi)n + \theta] = \cos[\omega n + 2\pi n + \theta] = \cos[\omega n + \theta]$$

Como consecuencia todas las secuencias de sinusoides

$$x_k(n) = A\cos(\omega_k n + \theta)$$

donde: $\omega_k = \omega + 2\pi k$ $\qquad -\pi \leq \omega \leq \pi$

son indistinguibles (idénticas).

En particular, una sinusoide con frecuencia en el rango $|\omega| > \pi$ será equivalente a una sinusoide en el rango $|\omega| \leq \pi$ *( | f | ≤ 0.5)* y se la denomina un alias de la sinusoide en el rango $|\omega| \leq \pi$.

El rango fundamental de frecuencias de señales en TD es entonces:

$$\boxed{\begin{array}{c} -\pi \leq \omega \leq \pi \\ -0.5 \leq f \leq 0.5 \end{array}}$$

Mientras que para señales en TC es:

$$\boxed{\begin{array}{c} -\infty \leq \Omega \leq \infty \\ -\infty \leq F \leq \infty \end{array}}$$

rango de frecuencia
de señales en TC

3. La máxima frecuencia de oscilación de una senoide en TD es $\omega = \pi$ (o $f = 0.5$ )

Considerando que:

$$f = \frac{F}{F_s}$$

y que $f_{max}=0.5$ , resulta que la máxima frecuencia $F_{max}$ de la señal en TC que puede muestrearse con una frecuencia $F_s$ sin que se produzca aliasing es:

$$f_{\max} = \frac{1}{2} = \frac{F_{\max}}{F_s} \Rightarrow \boxed{F_{\max} = \frac{F_s}{2}}$$

En otras palabras, para evitar que se produzca aliasing y de esa forma poder reconstruir una señal a partir de las muestras debemos seleccionar:

$$\boldsymbol{F_s > 2\, F_{max}}$$

donde $\boldsymbol{F_{max}}$ es la máxima frecuencia contenida en la señal analógica.

**Teorema de Muestreo:** Si la frecuencia más alta contenida en una señal analógica $x_a(t)$ es $F_{max} = B$ y la señal es muestreada con una frecuencia $F_S > 2\,F_{max} = 2B$ , entonces $x_a(t)$ puede ser exactamente recuperada a partir de las muestras como:

$$\boxed{x_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) g\left(t-\frac{n}{F_s}\right)}$$

donde

$$x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) \stackrel{\triangle}{=} x_a(nT)=x(n)$$

son las muestras de $x_a(t)$ y $g(t)$ es la **función de interpolación** definida como:

$$g(t)=\frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt}$$

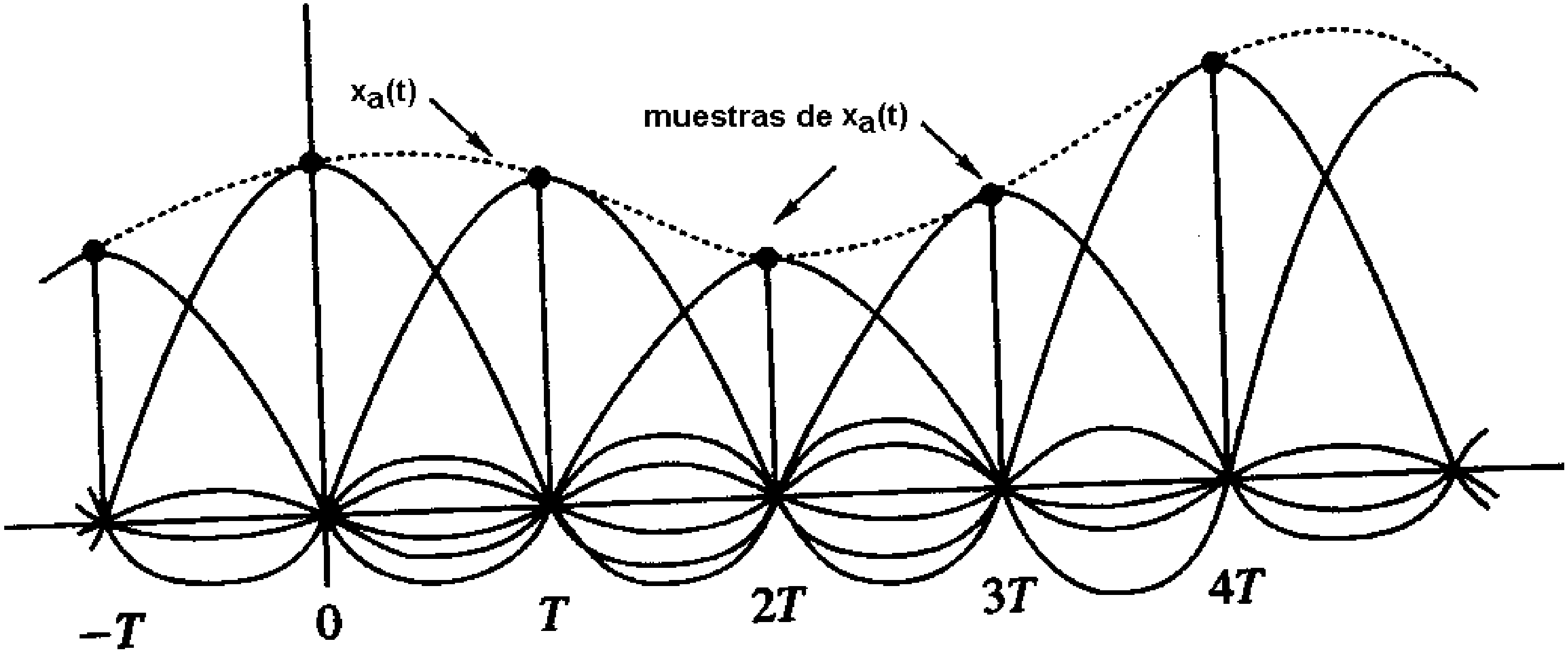


Figura 2: Interpolación Ideal – Teorema de Muestreo

A $F_N \triangleq 2B$ se la denomina Tasa de Muestreo de Nyquist.

**Ejemplo**: Determinar la tasa de muestreo de Nyquist

$$x_a(t) = 3\cos(50\pi t) + 10\sin(300\pi t) - \cos(100\pi t)$$

Solución:

$F_1 = 25\ Hz$ $F_2 = 150\ Hz$ $F_3 = 50\ Hz$

Veamos que $F_{max} = 150\ Hz \quad \Rightarrow \quad F_N = 300\ Hz$

Sin embargo, si muestreamos con $F_s = F_N$, las muestras de la componente

$10\sin(300\pi t)$ resultan $10\sin(\pi n)$

que son idénticamente nulas y obviamente no puede recuperarse la señal a partir de las muestras !!

## Ejemplo:

Supongamos que se desea generar y graficar las señales en tiempo continuo $x_1(t)$ y $x_2(t)$ definidas como

$$x_1(t) = \cos(2\pi 50 t)$$

$$x_2(t) = \cos(2\pi 550 t)$$

y las correspondientes señales en tiempo discreto que se obtienen muestreandolas con una frecuencia $F_s=500$ Hz. **Notar** que las dos señales tienen asociada la misma señal muestreada

$$x_1(n) = \cos(\frac{2\pi 50 n}{500})$$

$$x_2(n) = \cos(\frac{2\pi 550 n}{500}) = \cos\left(2\pi n + \frac{2\pi 50 n}{500}\right) = x_1(n)$$

$\boxed{x_2(n) \text{ es un } \textbf{alias} \text{ de } x_1(n).}$

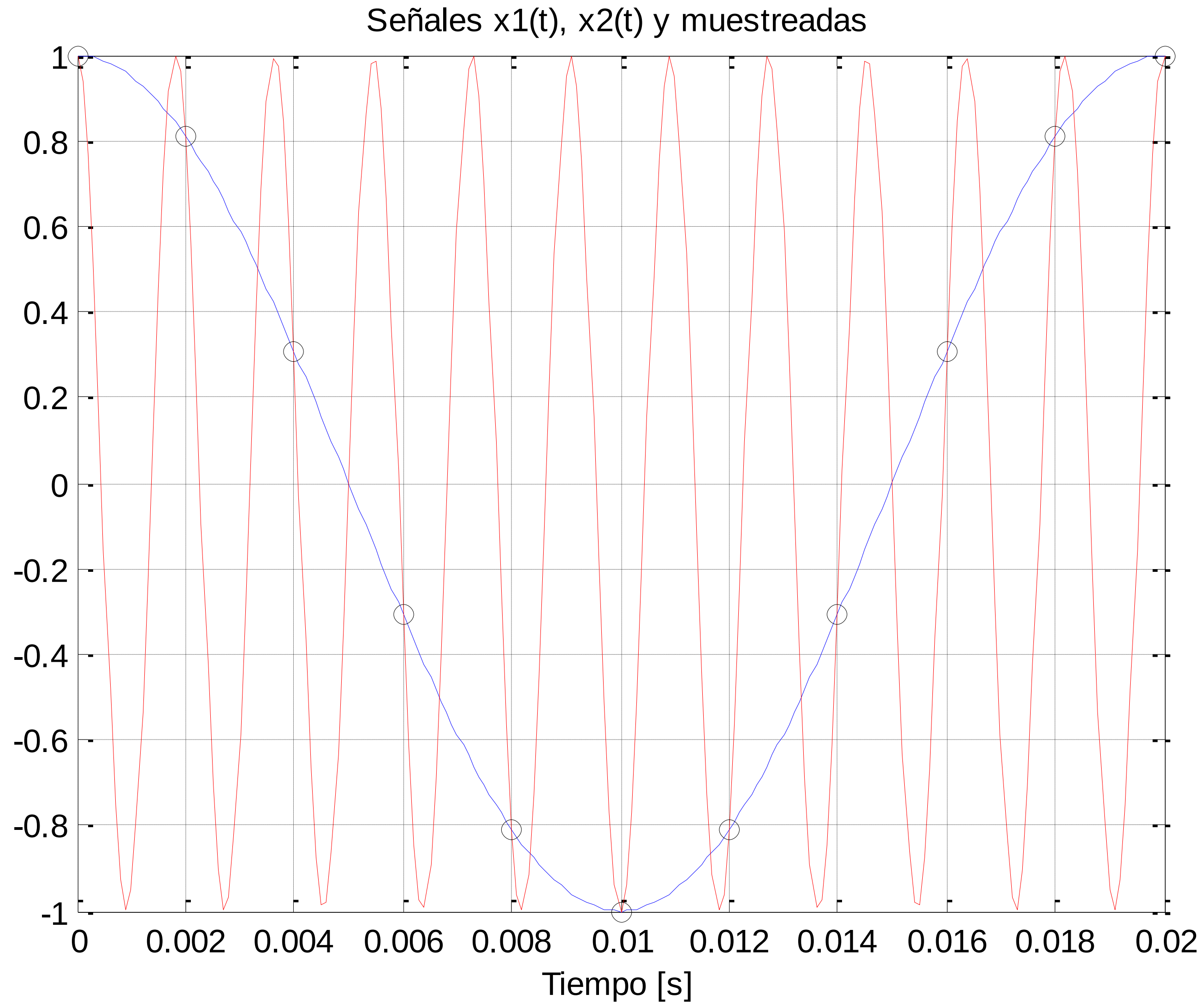


Figura 3: Señales $x_1(t)$ (línea azul), $x_2(t)$ (línea roja) y correspondientes muestras $x_1(n) = x_2(n)$ (circulo negro).