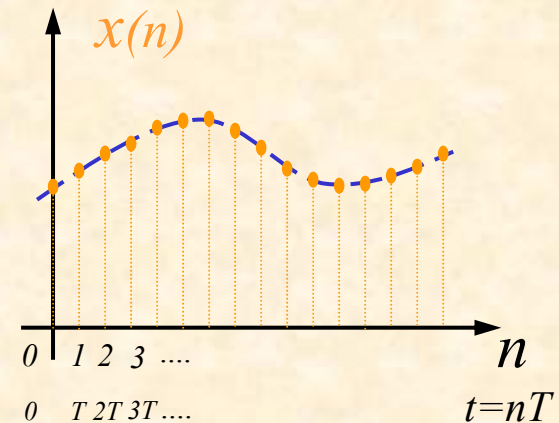
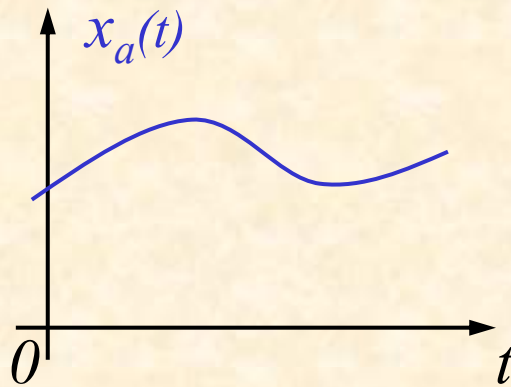
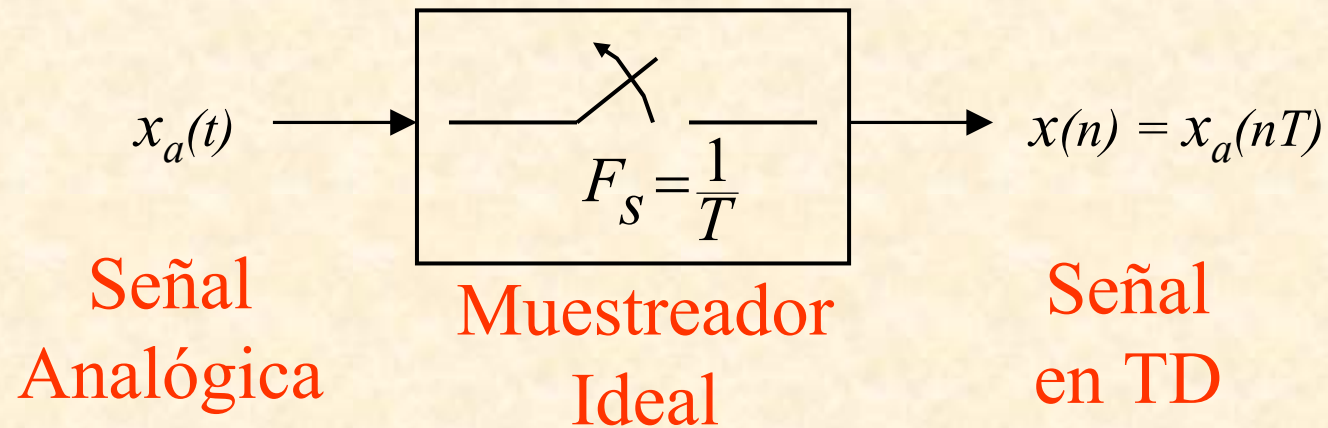


Sistemas y Señales I

Señales en Tiempo Discreto Teorema de Muestreo

Autor: Dr. Juan Carlos Gómez

- Señales en Tiempo Continuo: están definidas en un intervalo continuo de tiempo.
- Señales en tiempo discreto: están definidas sólo en valores discretos de tiempo. Los instantes de tiempo no necesariamente están equiespaciados.
 - Las señales en Tiempo Discreto (TD) aparecen cuando se muestrea una señal analógica, es decir, cuando se toman muestras de la señal a instantes discretos de tiempo.



F_s : frecuencia de muestreo [Hz]

$T = \frac{1}{F_s}$: período de muestreo [seg]

- Consideraremos **muestreo periódico** o **uniforme** → intervalos entre muestras sucesivas constante.
- Las variables “ t ” y “ n ” están relacionadas de acuerdo a:

$$t = nT = \frac{n}{F_s}$$

- Como consecuencia, la frecuencia F (o Ω) de una señal periódica en TC, estará relacionada con la frecuencia f (o ω) de la correspondiente señal muestreada.

Consideremos

$$x_a(t) = A \cos(2\pi Ft + \theta)$$

↓ Muestreo $F_s = \frac{1}{T}$

$$x(n) \triangleq x_a(nT) = A \cos(\underbrace{2\pi FnT}_{=\Omega} + \theta)$$

$$= A \cos\left(\frac{2\pi nF}{F_s} + \theta\right)$$

$$= A \cos(\underbrace{2\pi fn}_{=\omega} + \theta)$$

por lo que:

$$\boxed{f = \frac{F}{F_s}}$$

frecuencia

normalizada o relativa

$$\boxed{\omega = \frac{\Omega}{F_s} = \Omega T}$$

- En contraste con las señales senoidales en TC, las señales senoidales en TD verifican:
 1. Una señal senoidal en TD es periódica si y sólo si su frecuencia f es un número racional.

Por definición $x(n)$ es periódica si y sólo si $\exists N (N > 0)$ tal que:

$$x(n + N) = x(n) \quad \forall n$$

El menor valor de N que verifica esta propiedad se denomina **período fundamental**.

Para el caso de una onda senoidal, tendríamos:

$$\cos(2\pi f(N+n) + \theta) = \cos(2\pi f n + \theta) \quad \forall n$$

que se verifica si y sólo si: $2\pi f N = 2\pi k$ con k entero

$$\Downarrow$$

$$f = \frac{k}{N} \Leftrightarrow \text{f es racional}$$

- Para determinar el período fundamental N de una senoide discreta, expresamos f como el cociente de dos números enteros primos relativos. Entonces el período N es el denominador de esta expresión.

$$\begin{array}{ccc}
 f_1 = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} & \text{próxima a} & f_2 = \frac{29}{60} \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 N_1 = 2 & \text{muy distinta} & N_2 = 60
 \end{array}$$

2. Señales sinusoidales en TD cuyas frecuencias están separadas un múltiplo entero de 2π son idénticas.

$$\cos[(\omega + 2\pi)n + \theta] = \cos[\omega n + 2\pi n + \theta] = \cos[\omega n + \theta]$$

Como consecuencia todas las secuencias de sinusoides

$$x_k(n) = A \cos(\omega_k n + \theta)$$

donde: $\omega_k = \omega + 2\pi k$ $-\pi \leq \omega \leq \pi$
 son **indistinguibles (idénticas)**.

En particular, una senoide con frecuencia en el rango $|\omega| > \pi$ será equivalente a una senoide en el rango $|\omega| \leq \pi$ ($|f| \leq 0.5$) y se la denomina un **alias** de la senoide en el rango $|\omega| \leq \pi$.

El rango fundamental de frecuencias de señales en TD es entonces:

$$\begin{aligned} -\pi &\leq \omega \leq \pi \\ -0.5 &\leq f \leq 0.5 \end{aligned}$$

Mientras que para señales en TC es:

$$\begin{aligned} -\infty &\leq \Omega \leq \infty \\ -\infty &\leq F \leq \infty \end{aligned}$$

rango de frecuencia
de señales en TC

3. La máxima frecuencia de oscilación de una senoide en TD es $\omega = \pi$ (o $f = 0.5$)

Considerando que: $f = \frac{F}{F_s}$

y que $f_{max} = 0.5$, resulta que la máxima frecuencia F_{max} de la señal en TC que puede muestrearse con una frecuencia F_s sin que se produzca **aliasing** es:

$$f_{max} = \frac{1}{2} = \frac{F_{max}}{F_s} \Rightarrow F_{max} = \frac{F_s}{2}$$

En otras palabras, para evitar que se produzca aliasing y de esa forma poder reconstruir una señal a partir de las muestras debemos seleccionar:

$$F_s > 2 F_{max}$$

donde F_{max} es la máxima frecuencia contenida en la señal analógica.

Teorema de Muestreo: Si la frecuencia más alta contenida en una señal analógica $x_a(t)$ es $F_{max} = B$ y la señal es muestreada con una frecuencia $F_S > 2 F_{max} = 2B$, entonces $x_a(t)$ puede ser exactamente recuperada a partir de las muestras como:

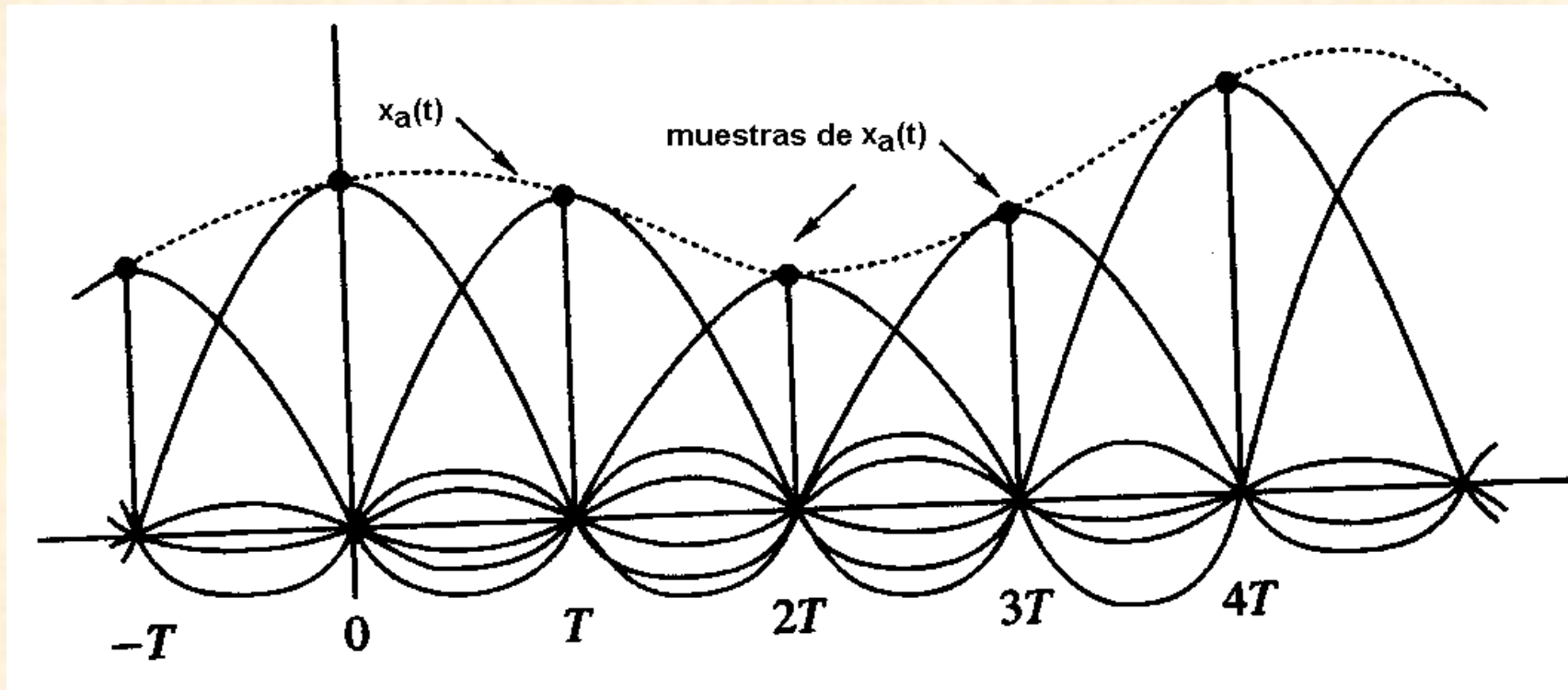
$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{F_S}\right) g\left(t - \frac{n}{F_S}\right)$$

donde

$$x_a\left(\frac{n}{F_S}\right) \triangleq x_a(nT) = x(n)$$

son las muestras de $x_a(t)$ y $g(t)$ es la **función de interpolación** definida como:

$$g(t) = \frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt}$$



Interpolación Ideal – Teorema de Muestreo

A $F_N \triangleq 2B$ se la denomina **Tasa de Muestreo de Nyquist**

Ejemplo: Determinar la tasa de muestreo de Nyquist

$$x_a(t) = 3 \cos(50\pi t) + 10 \sin(300\pi t) - \cos(100\pi t)$$

Solución:

$$F_1 = 25 \text{ Hz} \quad F_2 = 150 \text{ Hz} \quad F_3 = 50 \text{ Hz}$$

$$\text{Veamos que } F_{\max} = 150 \text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad F_N = 300 \text{ Hz}$$

Sin embargo, si muestreamos con $F_s = F_N$, las muestras de la componente

$$10 \sin(300 \pi t) \quad \text{resultan} \quad 10 \sin(\pi n)$$

que son **idénticamente nulas** y obviamente **no puede recuperarse la señal a partir de las muestras!!**

Ejemplo:

Supongamos que se desea generar y graficar las señales en tiempo continuo $x_1(t)$ y $x_2(t)$ definidas como

$$x_1(t) = \cos(2\pi 50t)$$

$$x_2(t) = \cos(2\pi 550t)$$

y las correspondientes señales en tiempo discreto que se obtienen muestreandolas con una frecuencia $F_s = 500$ Hz. **Notar** que las dos señales tienen asociada la misma señal muestreada

$$x_1(n) = \cos\left(\frac{2\pi 50n}{500}\right)$$

$$x_2(n) = \cos\left(\frac{2\pi 550n}{500}\right) = \cos\left(2\pi n + \frac{2\pi 50n}{500}\right) = x_1(n)$$

$x_2(n)$ es un **alias** de $x_1(n)$.

