

Sistemas y Señales I

Respuesta en frecuencia

Temario: Cap. 3: Item 3.5

Respuesta en frecuencia

Nos interesa determinar como se comportan los sistemas lineales estacionarios ante entradas sinusoidales. Veremos que si el sistema es BIBO estable la salida del sistema alcanzará un régimen permanente sinusoidal, y que la amplificación (atenuación) de la salida respecto a la entrada y el correspondiente desfase entre la senoide de salida y de la entrada, dependerán de la frecuencia de excitación. Esto es lo que se conoce como **Respuesta en Frecuencia** del sistema.

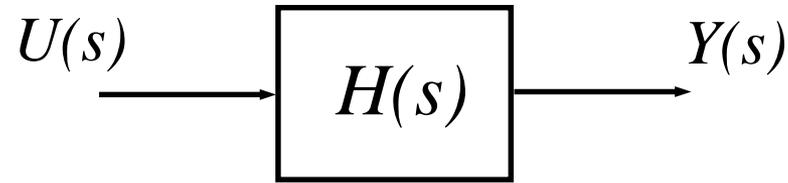
Consideremos un SLE descrito por la FT

$$H(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

donde por simplicidad hemos asumido que el sistema tiene polos y ceros reales simples.

Nos interesa determinar la respuesta del sistema a una entrada sinusoidal de la forma

$$u(t) = U_0 \sin \omega t$$



En el dominio transformado es

$$U(s) = \frac{U_0 \omega}{s^2 + \omega^2}$$

Asumiendo condiciones iniciales nulas, resulta

$$Y(s) = H(s) U(s)$$

$$= K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \frac{U_0 \omega}{s^2 + \omega^2}$$

Expandiendo en fracciones simples, se tiene

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{s - p_i} + \underbrace{\frac{\alpha_0}{s + j\omega} + \frac{\alpha_0^*}{s - j\omega}}_{(1)} \quad (*)$$

donde

$$\alpha_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) H(s) \frac{U_0 \omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\alpha_0 = \lim_{s \rightarrow -j\omega} (s + j\omega) H(s) \frac{U_0 \omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)}$$

$$= \frac{U_0 \omega H(-j\omega)}{-j2\omega} = j \frac{U_0}{2} H(-j\omega)$$

El término (1) resulta

$$\begin{aligned}(1) &= \frac{\alpha_0(s - j\omega) + \alpha_0^*(s + j\omega)}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{s(\alpha_0 + \alpha_0^*) + j\omega(\alpha_0^* - \alpha_0)}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{-j\frac{U_0}{2}[H(j\omega) - H(-j\omega)]s + \frac{U_0}{2}\omega[H(j\omega) + H(-j\omega)]}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

Escribiendo

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$$

con

$$\phi(\omega) \triangleq \underline{\angle H(j\omega)}$$

resulta

$$\begin{aligned}(1) &= \frac{-jU_0 |H(j\omega)| s \frac{(e^{j\phi(\omega)} - e^{-j\phi(\omega)})}{2} + U_0 \omega |H(j\omega)| \frac{(e^{j\phi(\omega)} + e^{-j\phi(\omega)})}{2}}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{U_0 |H(j\omega)| [\sin \phi(\omega) s + \omega \cos \phi(\omega)]}{s^2 + \omega^2} \\ &= U_0 |H(j\omega)| \left[\frac{s}{s^2 + \omega^2} \sin \phi(\omega) + \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cos \phi(\omega) \right]\end{aligned}$$

Tomando la Transformada Inversa de Laplace en (*)

resulta

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{p_i t} + U_0 |H(j\omega)| [\cos \omega t \sin \phi(\omega) + \sin \omega t \cos \phi(\omega)]$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{p_i t} + U_0 |H(j\omega)| \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

Asumiendo que el sistema es BIBO estable, entonces

$$p_1, p_2, \dots, p_n < 0$$

y el término (la respuesta transitoria)

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e^{p_i t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Es decir, cuando $t \rightarrow \infty$ el sistema alcanza un **Régimen Permanente Sinusoidal (RPS)** de la forma

$$y_{RPS}(t) = U_0 |H(j\omega)| \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

- La salida en RPS es una senoide de la misma frecuencia que la senoide de entrada, amplificada (o atenuada) por $|H(j\omega)|$ y desfasada el ángulo $\angle H(j\omega)$
- Al término

$$H(j\omega) \triangleq H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

se lo denomina **Transferencia Armónica** o **Respuesta en Frecuencia** del sistema.

Su conocimiento para todo ω permite determinar la respuesta en régimen permanente a entradas sinusoidales.

$$|H(j\omega)| \rightarrow \textit{Amplitud}$$

$$\angle H(j\omega) \rightarrow \textit{Fase}$$

□ Los resultados se pueden extender al caso de tener polos complejos conjugados y con multiplicidad (con la condición de que sean estables, $\Re\{p_j\} < 0$).

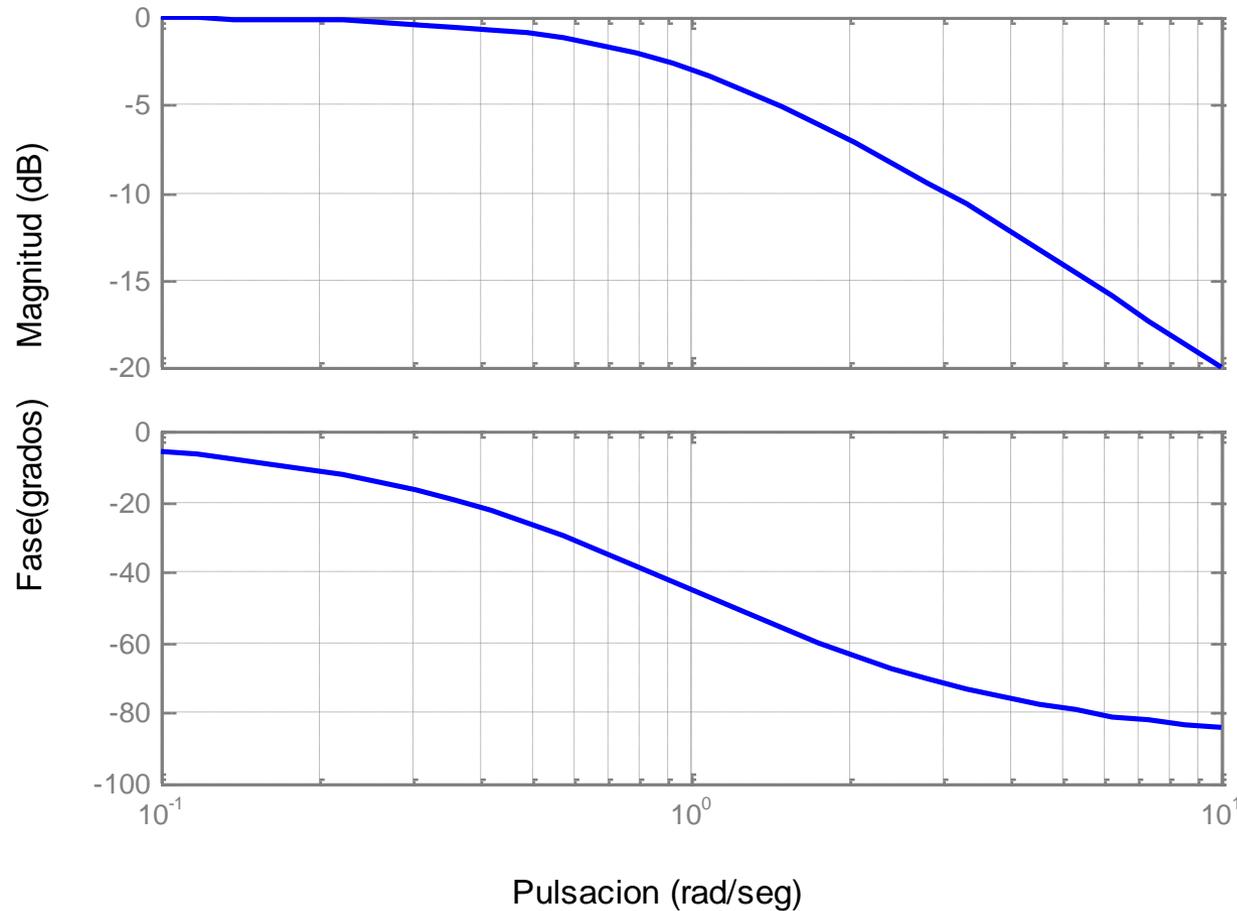
- A la respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ se la suele graficar en diagramas logarítmicos de amplitud y fase

$$\begin{array}{l} |H(j\omega)|_{dB} \overset{\Delta}{=} 20 \log |H(j\omega)| \\ \underline{\angle H(j\omega)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{vs. } \omega \\ \text{vs. } \omega \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{escala} \\ \text{logarítmica} \end{array}$$

que son los denominados **Diagramas de Bode de Amplitud y Fase.**

□ Ejemplo:

Diagramas de Bode



$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

`>> bode(1,[1,1])`

Diagramas de Bode

Consideremos una FT racional de la forma:

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (\tau_{c_i} s + 1)}{\prod_{i=1}^n (\tau_{p_i} s + 1)}$$

donde, sin pérdida de generalidad, hemos asumido que sólo existen polos y ceros simples. La respuesta en frecuencia resulta entonces

$$G(j\omega) = K \frac{\prod_{i=1}^m (j\tau_{c_i} \omega + 1)}{\prod_{i=1}^n (j\tau_{p_i} \omega + 1)}$$

El módulo en dB resulta

$$\begin{aligned}
 |G(j\omega)|_{dB} &= \left| K \frac{\prod_{i=1}^m (j\tau_{c_i} \omega + 1)}{\prod_{i=1}^n (j\tau_{p_i} \omega + 1)} \right|_{dB} = 20 \log \left(\left| K \frac{\prod_{i=1}^m (j\tau_{c_i} \omega + 1)}{\prod_{i=1}^n (j\tau_{p_i} \omega + 1)} \right| \right) \\
 &= 20 \log (|K|) + 20 \log \left(\prod_{i=1}^m |j\tau_{c_i} \omega + 1| \right) + 20 \log \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^n |j\tau_{p_i} \omega + 1|} \right) = \\
 &= 20 \log (|K|) + \sum_{i=1}^m 20 \log (|j\tau_{c_i} \omega + 1|) + \sum_{i=1}^n 20 \log \left(\left| \frac{1}{j\tau_{p_i} \omega + 1} \right| \right) = \\
 &= |K|_{dB} + \sum_{i=1}^m |j\tau_{c_i} \omega + 1|_{dB} + \sum_{i=1}^n \left| \frac{1}{j\tau_{p_i} \omega + 1} \right|_{dB}
 \end{aligned}$$

Es decir, el módulo en dB se obtiene sumando los módulos en dB de los polos y ceros individuales para cada frecuencia ω .

La fase resulta

$$\angle G(j\omega) = \angle \left\{ K \frac{\prod_{i=1}^m (j\tau_{c_i} \omega + 1)}{\prod_{i=1}^n (j\tau_{p_i} \omega + 1)} \right\} =$$

$$= \angle K + \sum_{i=1}^m \angle (j\tau_{c_i} \omega + 1) + \sum_{i=1}^n \angle \frac{1}{(j\tau_{p_i} \omega + 1)}$$

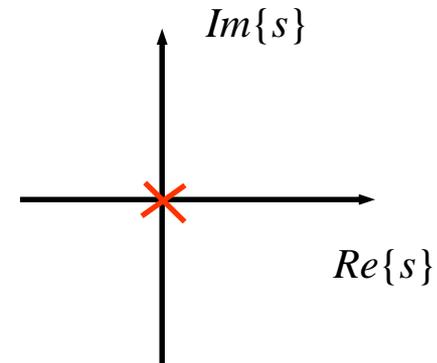
Es decir, la fase se obtiene sumando las fases de los polos y ceros individuales para cada frecuencia ω .

Diagramas de Bode de Transferencias Elementales

1. Polo Simple en el origen

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Polo en $s=0$



$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

El módulo resulta

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \omega$$

$$|G(j\omega)|_{dB} \Big|_{\omega=1 \text{ rad/seg}} = 0 \text{ dB}$$

ecuación de una recta con
pendiente -20 dB/dec

(graficando ω en escala logarítmica)

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \omega$$

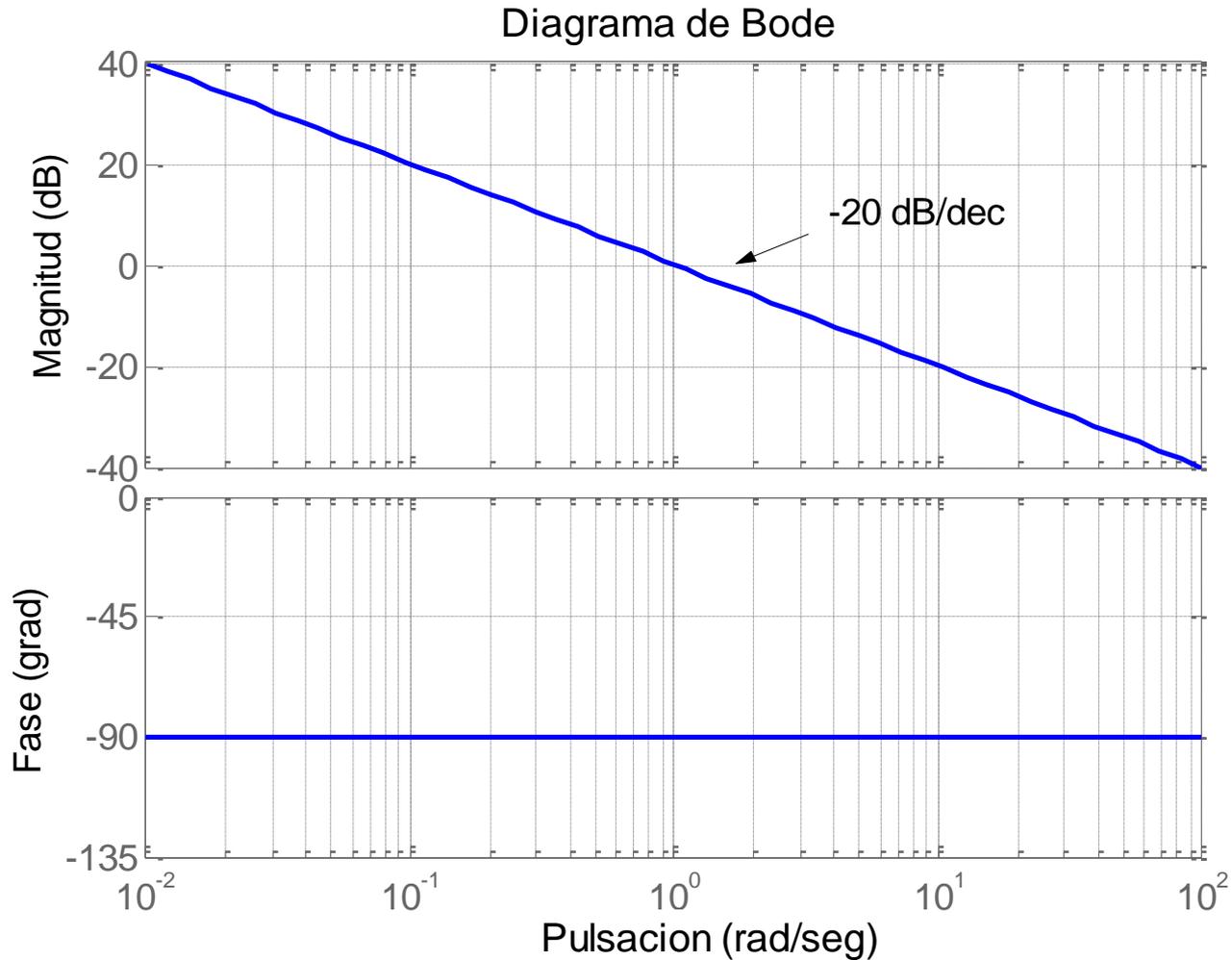
Incrementemos ω una década

$$|G(j10\omega)|_{dB} = -20 \log 10\omega = -20 - 20 \log \omega$$

Vemos que el módulo decrece 20dB al incrementar la frecuencia en una década, es decir la recta tiene una pendiente de -20 dB/década, y vemos que cruza al eje 0 dB para $\omega = 1$ rad/seg

La fase resulta

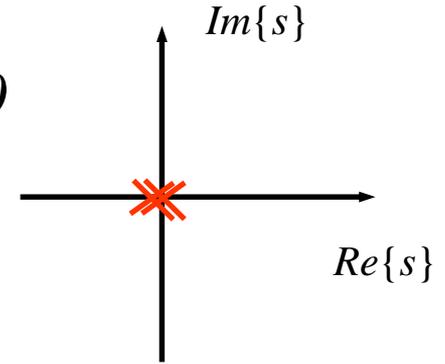
$$\angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2} \quad \forall \omega$$



2. Polo Múltiple en el origen

$$G(s) = \frac{1}{s^n}$$

Polo Múltiple en $s=0$



$$G(j\omega) = \frac{1}{j^n \omega^n}$$

El módulo resulta

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega^n} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = -20n \log \omega$$

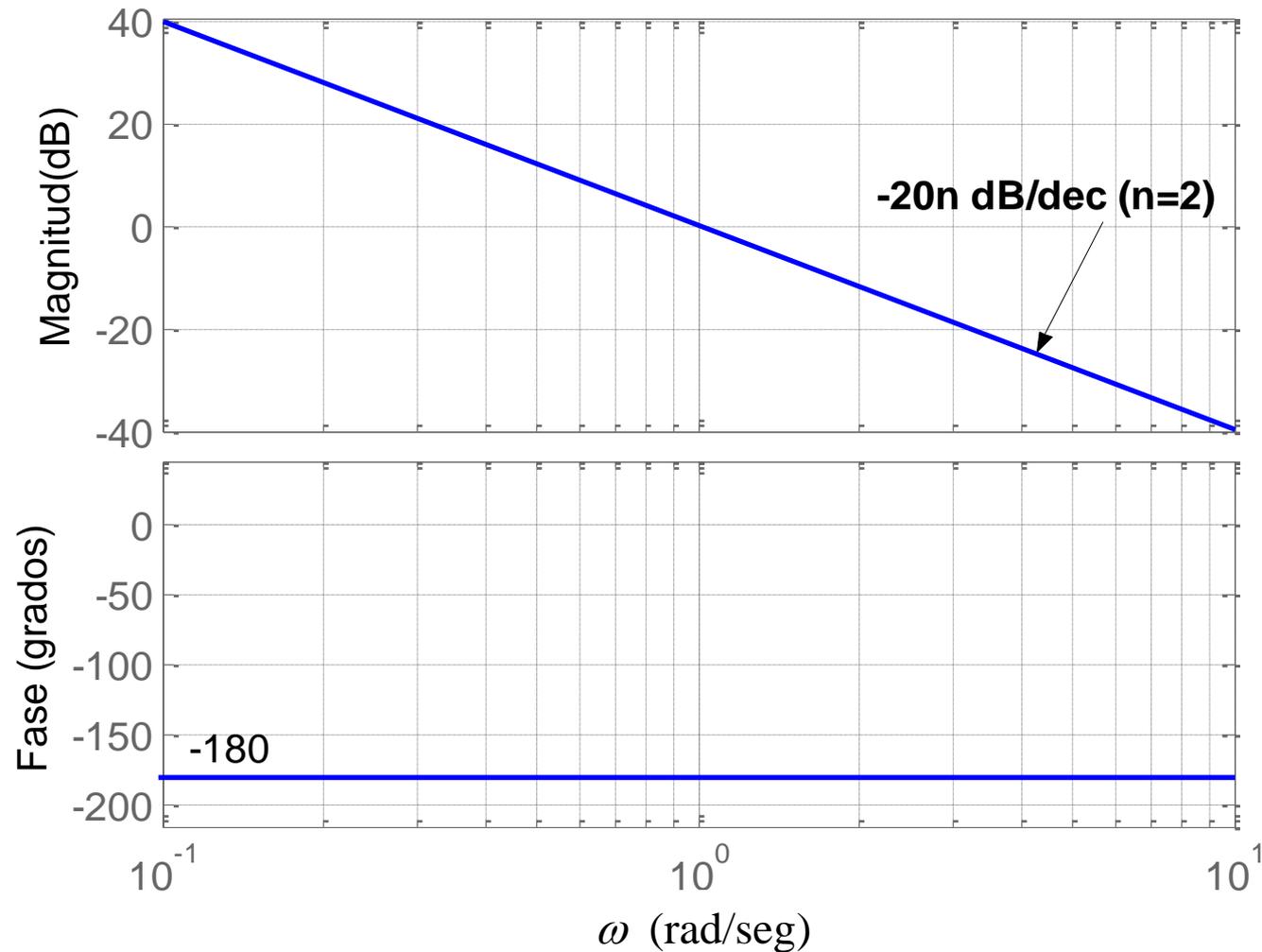
$$|G(j\omega)|_{dB} \Big|_{\omega=1 \text{ rad/seg}} = 0 \text{ dB}$$

ecuación de una recta con
pendiente $-20n$ dB/dec

La fase resulta

$$\angle G(j\omega) = -n \frac{\pi}{2} \quad \forall \omega$$

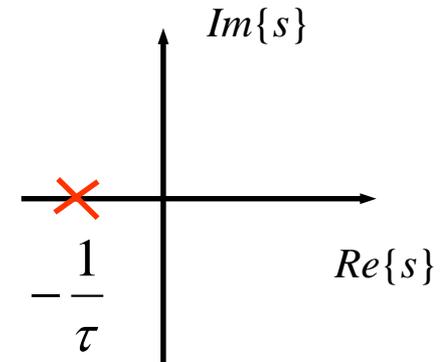
Diagrama de Bode



3. Polo Real Simple

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

$$\text{Polo en } s = -\frac{1}{\tau}$$



$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}$$

El módulo resulta

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = -10 \log(1 + \omega^2\tau^2)$$

Pueden computarse **asíntotas** para $\omega \rightarrow 0$ y para ω grande

Para $\omega \rightarrow 0$ puede aproximarse

$$|G(j\omega)|_{dB} \approx 0$$

En tanto que para ω grande puede aproximarse

$$|G(j\omega)|_{dB} \approx -10 \log(\omega^2 \tau^2) = -20 \log \omega - 20 \log \tau$$

↑
ecuación de una recta con
pendiente -20 dB/dec

La recta corta al eje 0 dB para $\omega = \frac{1}{\tau}$. Para esa frecuencia el modulo resulta

$$|G(j\omega)|_{dB} \Big|_{\omega=\frac{1}{\tau}} = -10 \log(1+1) = -3 \text{ dB}$$

La fase resulta

$$\angle G(j\omega) = \arctan(-\omega\tau)$$

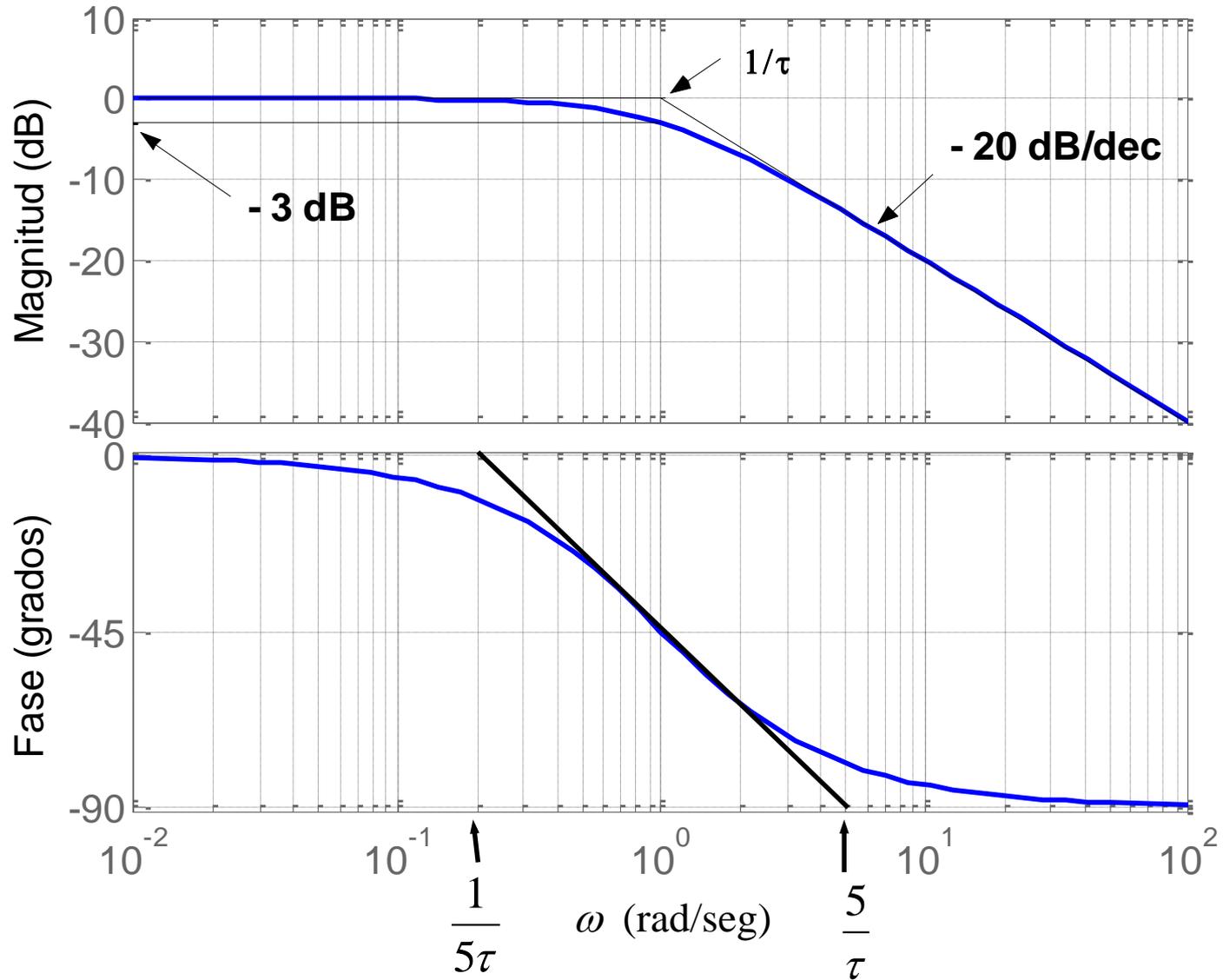
Puede verse que

$$\angle G(j\omega) \rightarrow 0 \text{ cuando } \omega \rightarrow 0$$

$$\angle G(j\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \text{ cuando } \omega \rightarrow \infty$$

$$\angle G(j\omega) \Big|_{\omega=\frac{1}{\tau}} = -\frac{\pi}{4}$$

Diagrama de Bode



4. Par de Polos Complejos Conjugados

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

ξ : coeficiente de amortiguamiento

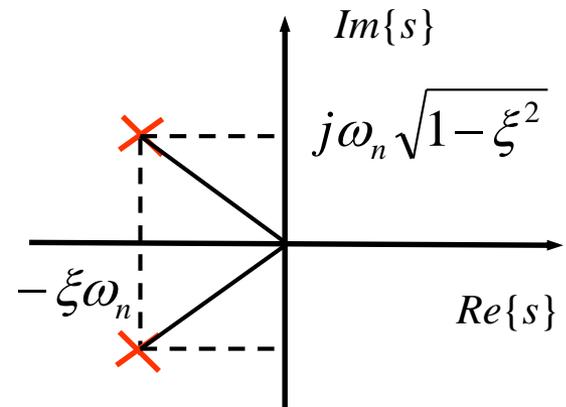
ω_n : pulsación natural

Polos en $p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$

Para $0 < \xi < 1$ los polos resultan **complejos conjugados**

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$|p_{1,2}| = \omega_n$$



$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\xi\omega_n\omega + \omega_n^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}$$

El módulo resulta

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = -10 \log \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)$$

Pueden computarse **asíntotas** para $\omega \rightarrow 0$ y para ω grande.

Para $\omega \rightarrow 0$ puede aproximarse

$$|G(j\omega)|_{dB} \approx 0$$

En tanto que para ω grande puede aproximarse

$$|G(j\omega)|_{dB} \approx -10 \log \left(\frac{\omega^4}{\omega_n^4} \right) = -40 \log \omega + 40 \log \omega_n$$

 ecuación de una recta con pendiente -40 dB/dec

La recta corta al eje 0 dB para $\omega = \omega_n$. Para esa frecuencia el modulo resulta

$$|G(j\omega)|_{dB} \Big|_{\omega=\omega_n} = -10 \log (4\xi^2) = -6 \text{ dB} - 20 \log \xi$$

La fase resulta

$$\angle G(j\omega) = \arctan \left(- \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right)$$

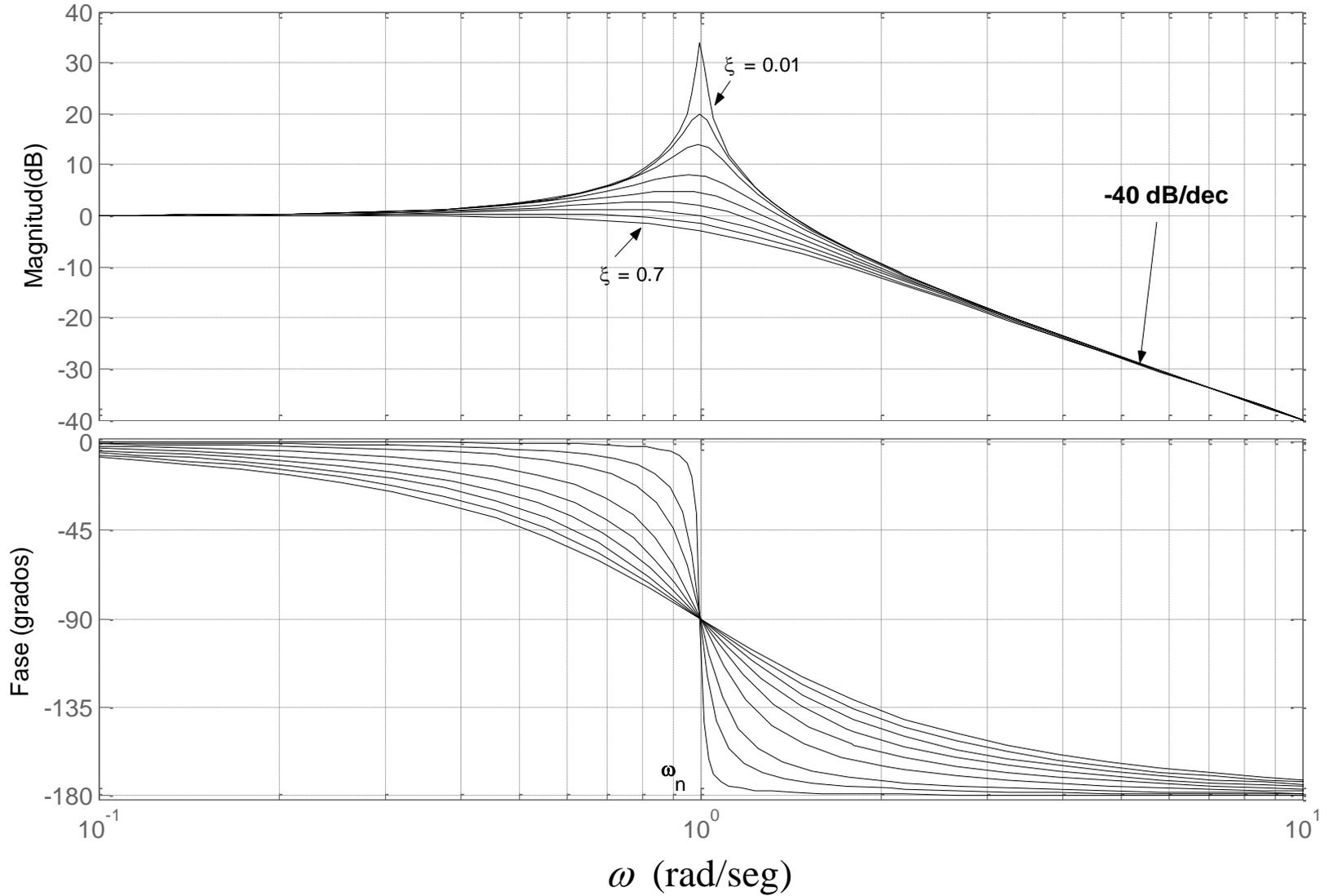
Puede verse que

$$\angle G(j\omega) \rightarrow 0 \text{ cuando } \omega \rightarrow 0$$

$$\angle G(j\omega) \rightarrow -\pi \text{ cuando } \omega \rightarrow \infty$$

$$\angle G(j\omega) \Big|_{\omega=\omega_n} = -\frac{\pi}{2}$$

Diagrama de Bode

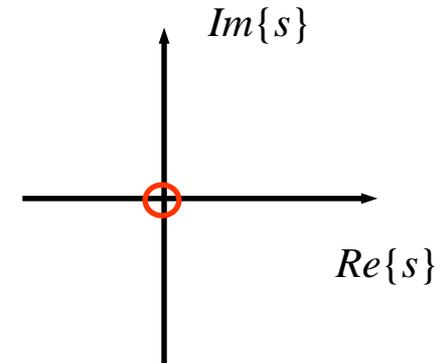


5. Cero Simple en el origen

$$G(s) = s$$

Cero en $s=0$

$$G(j\omega) = j\omega$$



El módulo resulta

$$|G(j\omega)| = \omega \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \omega$$



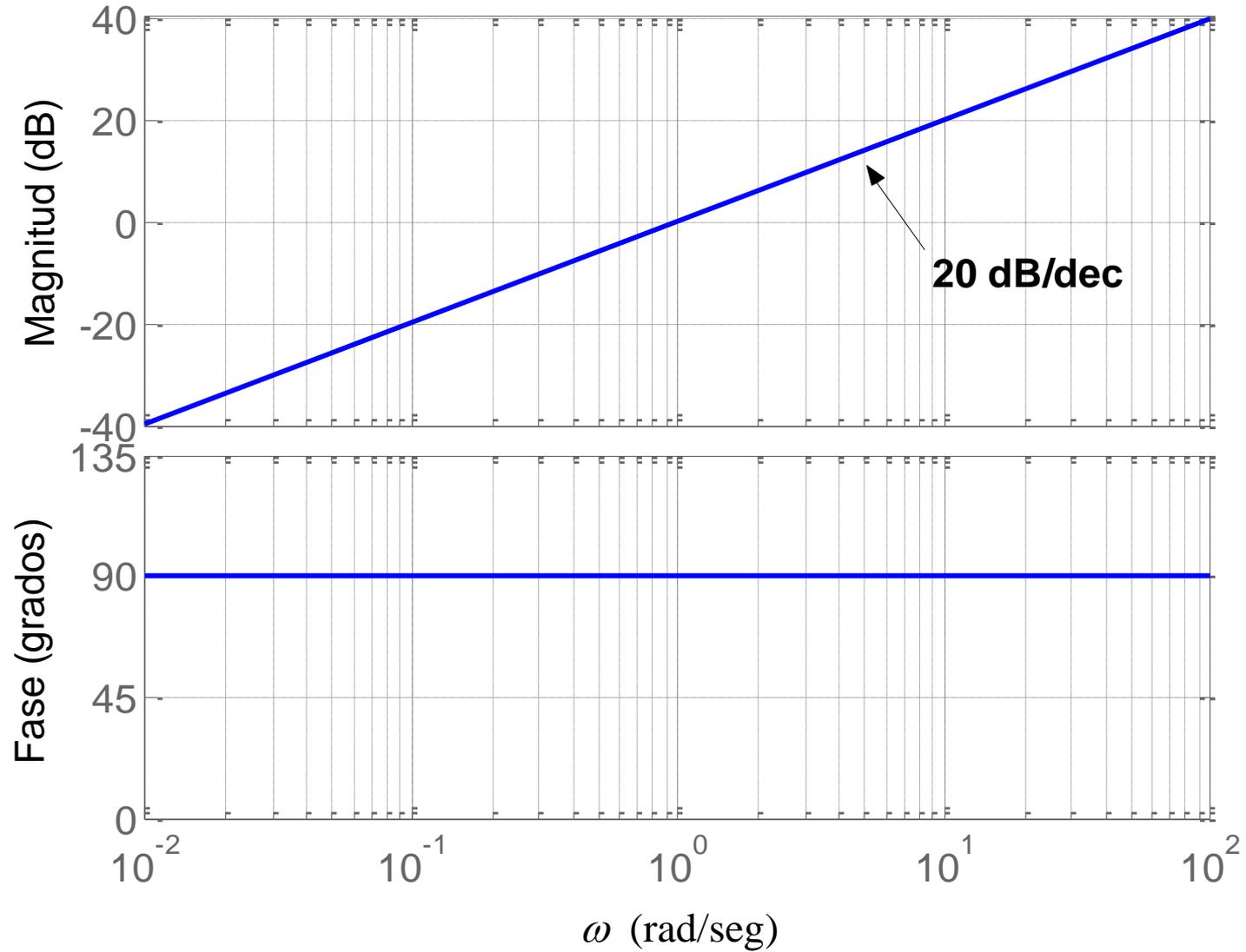
$$|G(j\omega)|_{dB} \Big|_{\omega=1 \text{ rad/seg}} = 0 \text{ dB}$$

ecuación de una recta
con pendiente 20 dB/dec
(graficando ω en escala logarítmica)

La fase resulta

$$\angle G(j\omega) = \frac{\pi}{2} \quad \forall \omega$$

Diagrama de Bode

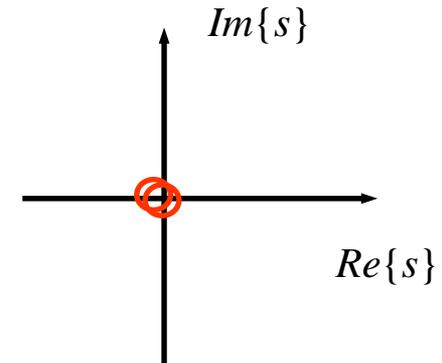


6. Cero Múltiple en el origen

$$G(s) = s^n$$

Ceros en $s=0$

$$G(j\omega) = j^n \omega^n$$



El módulo resulta

$$|G(j\omega)| = \omega^n \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20n \log \omega$$

$$|G(j\omega)|_{dB} \Big|_{\omega=1 \text{ rad/seg}} = 0 \text{ dB}$$

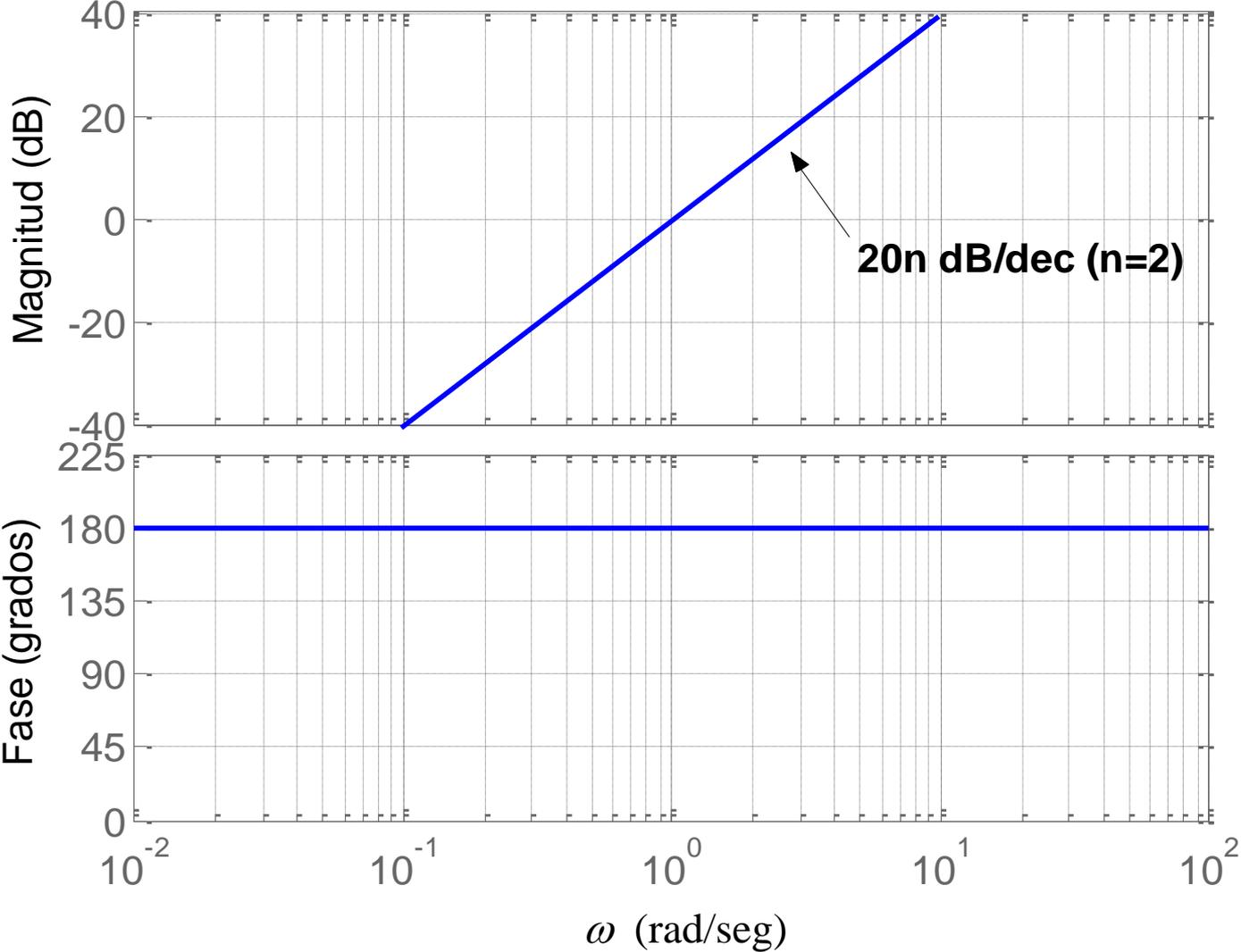
ecuación de una recta con
pendiente $20n \text{ dB/dec}$

(graficando ω en escala logarítmica)

La fase resulta

$$\angle G(j\omega) = n \frac{\pi}{2}, \quad \forall \omega$$

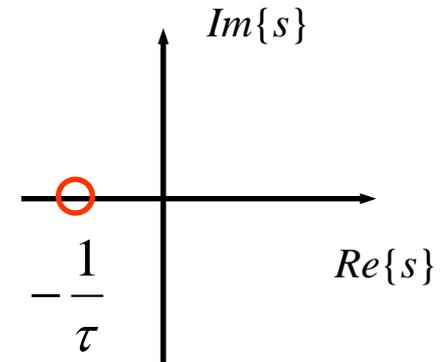
Diagrama de Bode



7. Cero Real Simple

$$G(s) = \tau s + 1$$

$$\text{Cero en } s = -\frac{1}{\tau}$$



$$G(j\omega) = j\omega\tau + 1$$

El módulo resulta

$$|G(j\omega)| = \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 10\log(1 + \omega^2\tau^2)$$

Pueden computarse **asíntotas** para $\omega \rightarrow 0$ y para ω grande.

Para $\omega \rightarrow 0$ puede aproximarse

$$|G(j\omega)|_{dB} \approx 0$$

En tanto que para ω grande puede aproximarse

$$|G(j\omega)|_{dB} \approx 10 \log(\omega^2 \tau^2) = 20 \log \omega + 20 \log \tau$$

 ecuación de una recta
con pendiente 20 dB/dec

La recta corta al eje 0 dB para $\omega = \frac{1}{\tau}$. Para esa frecuencia el modulo resulta

$$|G(j\omega)|_{dB} \Big|_{\omega=\frac{1}{\tau}} = 10 \log(1+1) = 3 \text{ dB}$$

La fase resulta

$$\angle G(j\omega) = \arctan(\omega\tau)$$

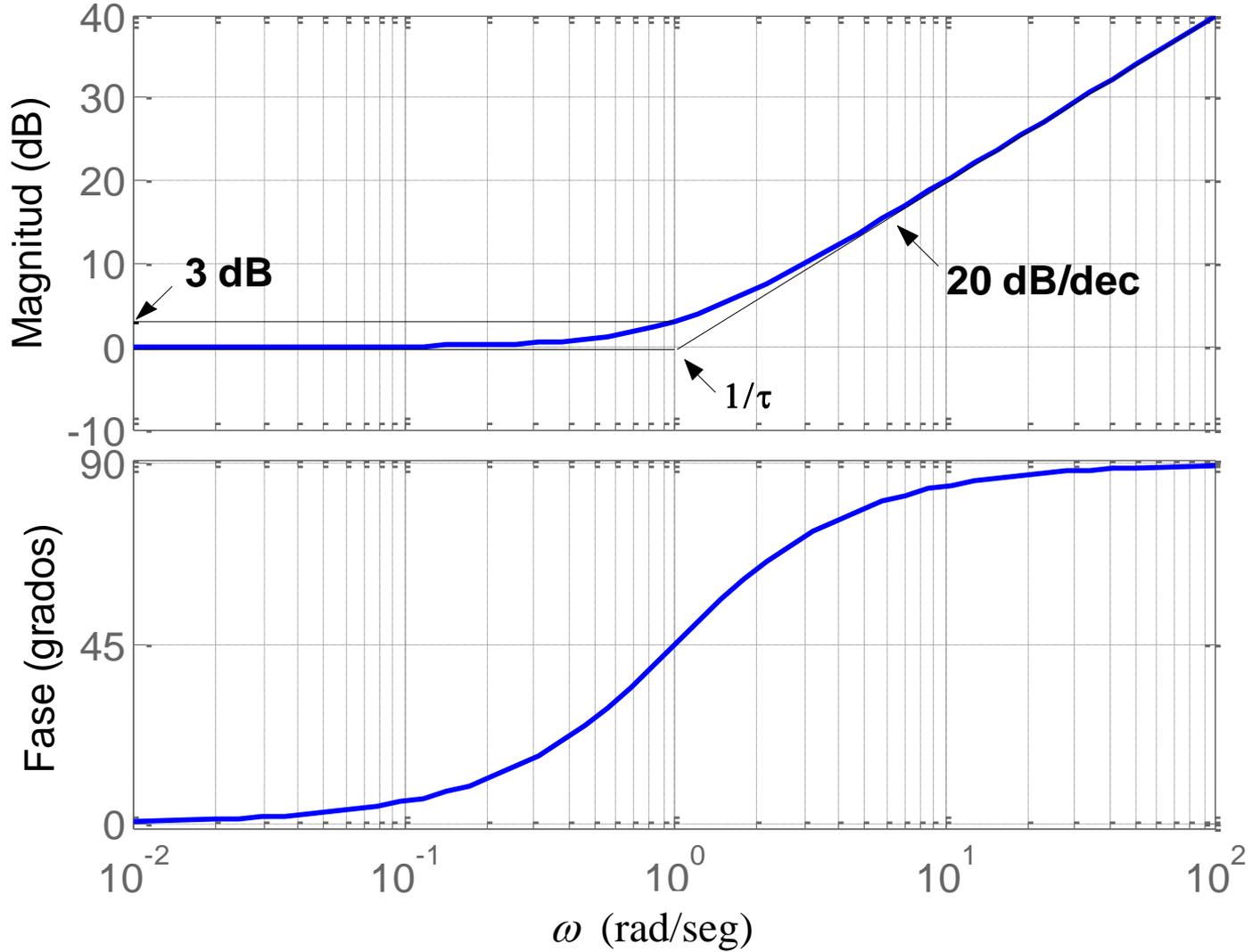
Puede verse que

$$\angle G(j\omega) \rightarrow 0 \text{ cuando } \omega \rightarrow 0$$

$$\angle G(j\omega) \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ cuando } \omega \rightarrow \infty$$

$$\angle G(j\omega) \Big|_{\omega=\frac{1}{\tau}} = \frac{\pi}{4}$$

Diagrama de Bode



8. Par de ceros complejos conjugados

$$G(s) = \frac{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2}$$

ξ : coeficiente de amortiguamiento

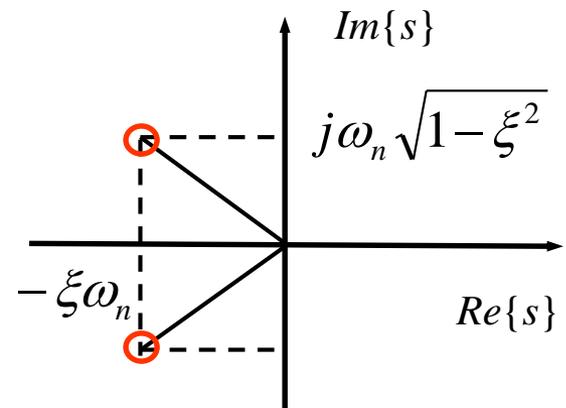
ω_n : pulsación natural

Ceros en $p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$

Para $0 < \xi < 1$ los ceros resultan **complejos conjugados**

$$c_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$|c_{1,2}| = \omega_n$$



$$G(j\omega) = \frac{-\omega^2 + j2\xi\omega_n\omega + \omega_n^2}{\omega_n^2} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}$$

El módulo resulta

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 10 \log \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)$$

Pueden computarse **asíntotas** para $\omega \rightarrow 0$ y para ω grande.

Para $\omega \rightarrow 0$ puede aproximarse

$$|G(j\omega)| \approx 0$$

En tanto que para ω grande puede aproximarse

$$|G(j\omega)|_{dB} \approx 10 \log \left(\frac{\omega^4}{\omega_n^4} \right) = 40 \log \omega - 40 \log \omega_n$$

↑
ecuación de una recta
con pendiente 40 dB/dec

La recta corta al eje 0 dB para $\omega = \omega_n$. Para esa frecuencia el módulo resulta

$$|G(j\omega)|_{dB} \Big|_{\omega=\omega_n} = 10 \log (4\xi^2) = 6 \text{ dB} + 20 \log \xi$$

La fase resulta

$$\angle G(j\omega) = \arctan \left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right)$$

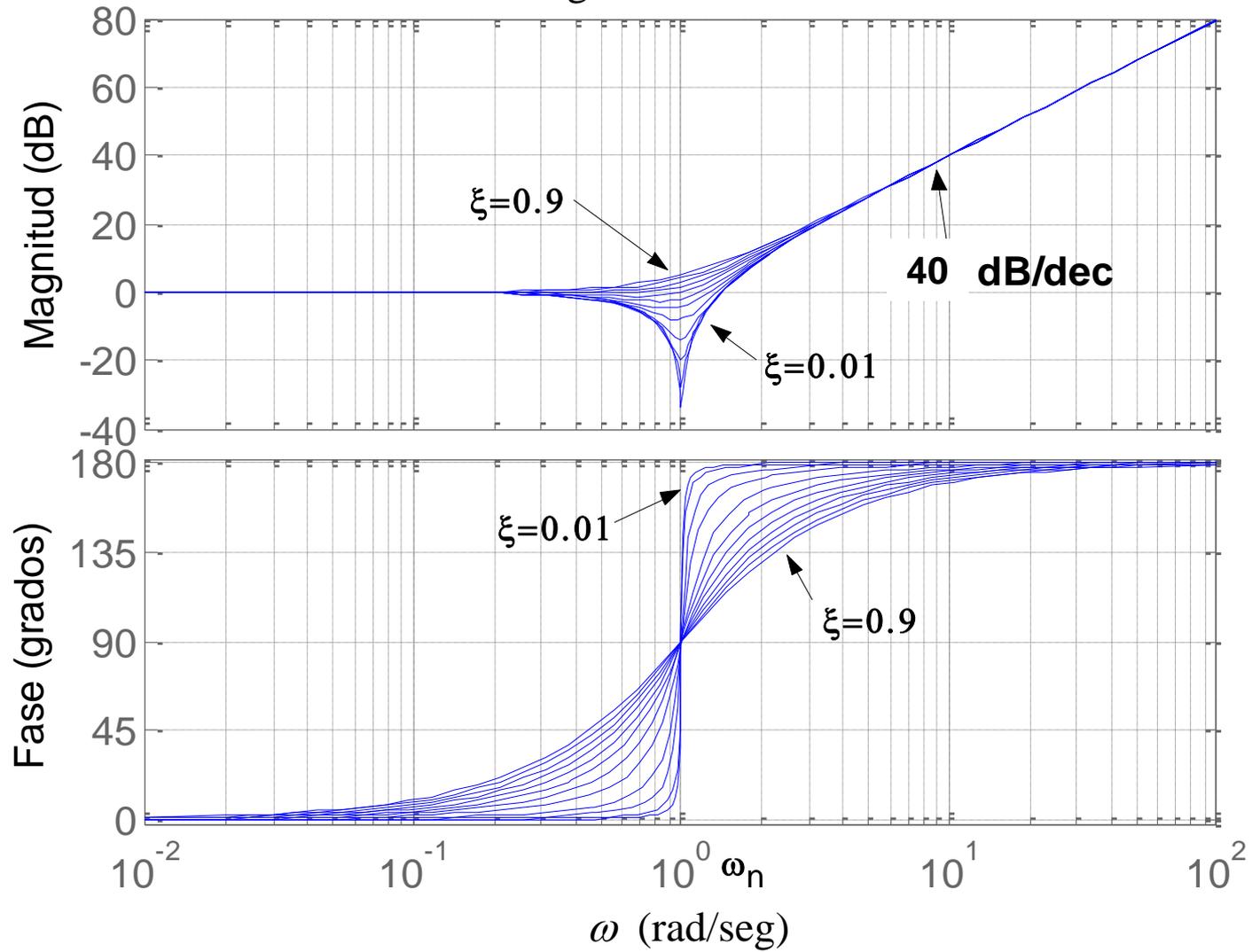
Puede verse que

$$\angle G(j\omega) \rightarrow 0 \text{ cuando } \omega \rightarrow 0$$

$$\angle G(j\omega) \rightarrow \pi \text{ cuando } \omega \rightarrow \infty$$

$$\angle G(j\omega) \Big|_{\omega=\omega_n} = \frac{\pi}{2}$$

Diagrama de Bode

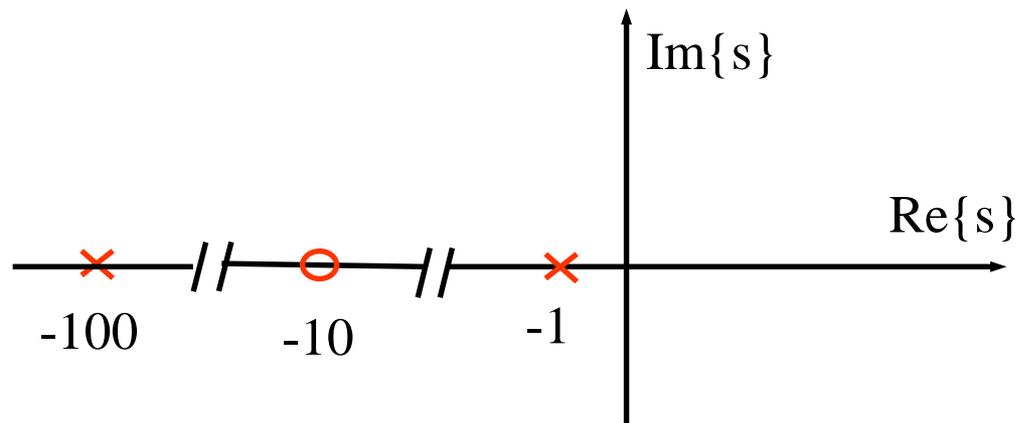


Ejemplo: Consideremos el sistema cuya función transferencia es

$$G(s) = \frac{(s + 10)}{(s + 1)(s + 100)}$$

Construiremos el Diagrama de Bode a partir de los diagramas individuales de los polos y ceros de la FT.

La FT tiene polos en $p_1 = -1$, $p_2 = -100$ y un cero en $c = -10$



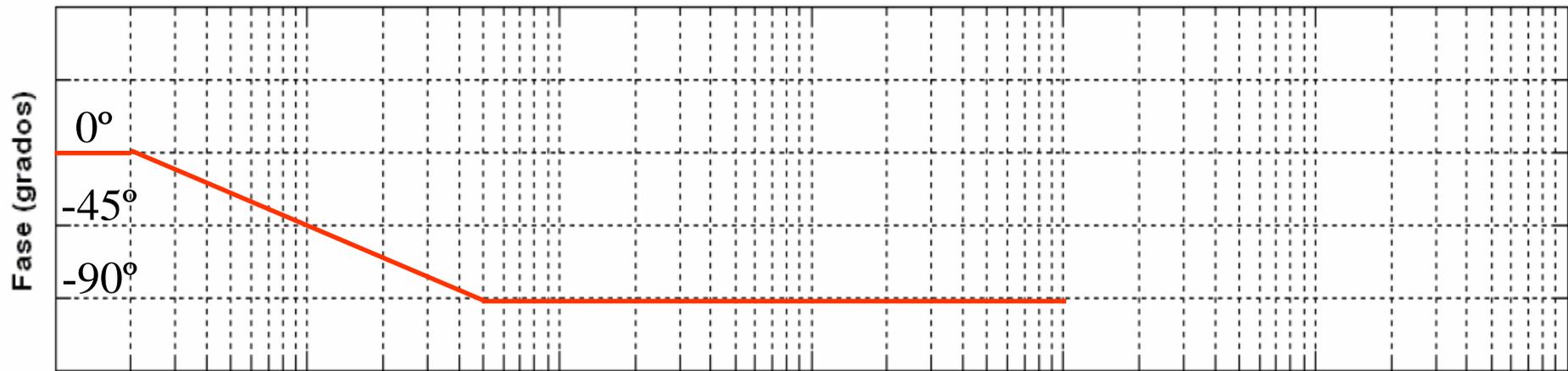
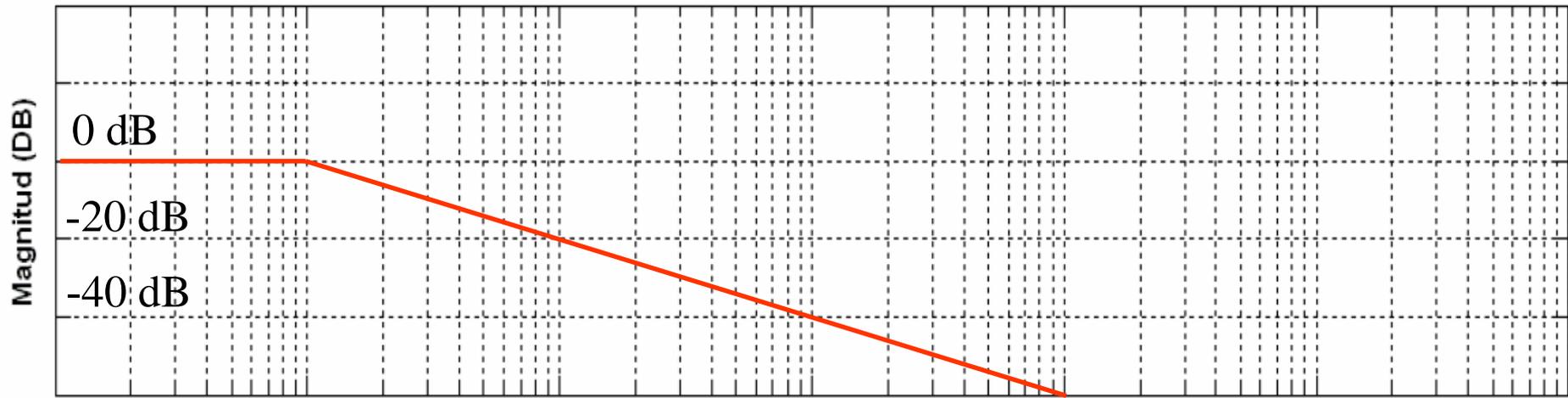
Normalizamos la transferencia de manera que todos los factores en numerador y denominador (correspondientes a los ceros y polos) tengan ganancia estática unitaria

$$G(s) = \frac{(s+10)}{(s+1)(s+100)} = \frac{10}{100} \frac{\left(\frac{s}{10} + 1\right)}{(s+1)\left(\frac{s}{100} + 1\right)} = 0.1 \frac{\left(\frac{s}{10} + 1\right)}{(s+1)\left(\frac{s}{100} + 1\right)} \quad K$$

Vemos que la ganancia estática de $G(s)$ resulta

$$K = G(0) = 0.1 \Rightarrow K_{dB} = 20 \log_{10} 0.1 = -20 \text{ dB}$$

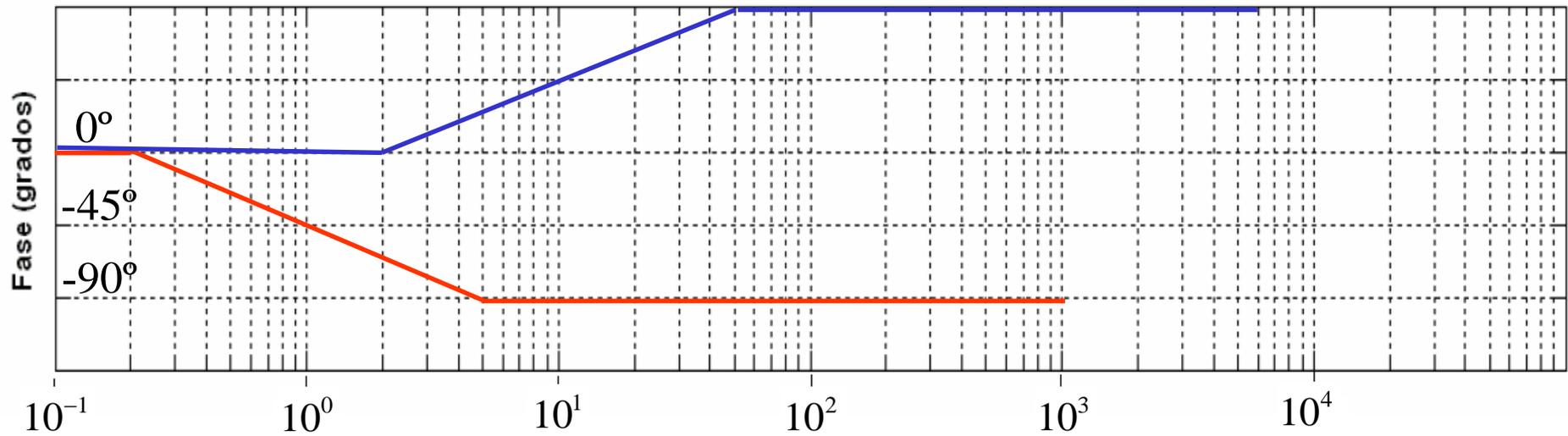
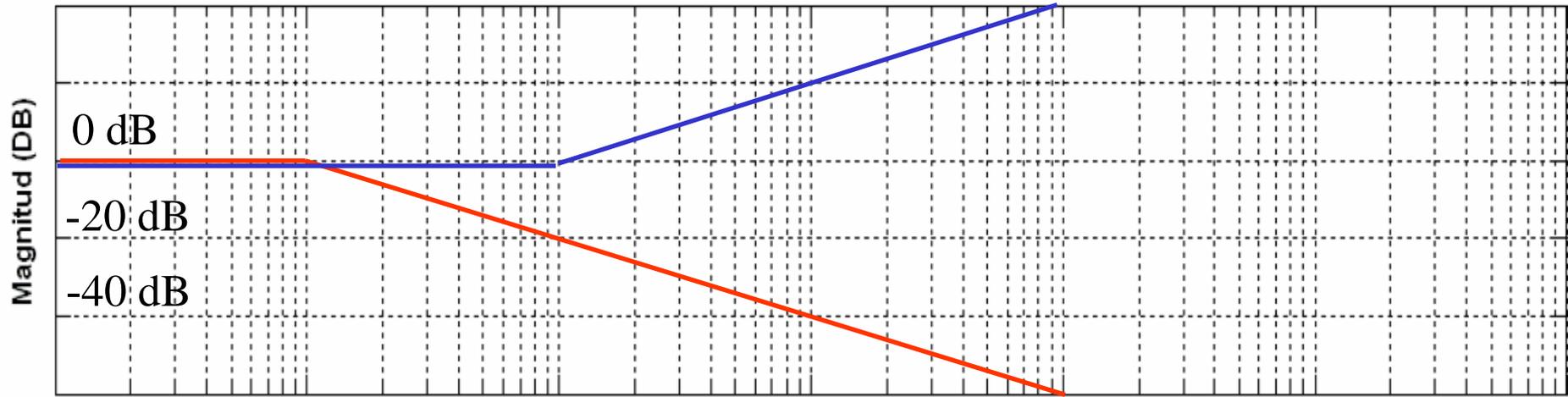
Usaremos papel semilogarítmico para graficar los diagramas asintóticos de los polos y ceros de $G(s)$



10^{-1} 10^0 10^1 10^2 10^3 10^4

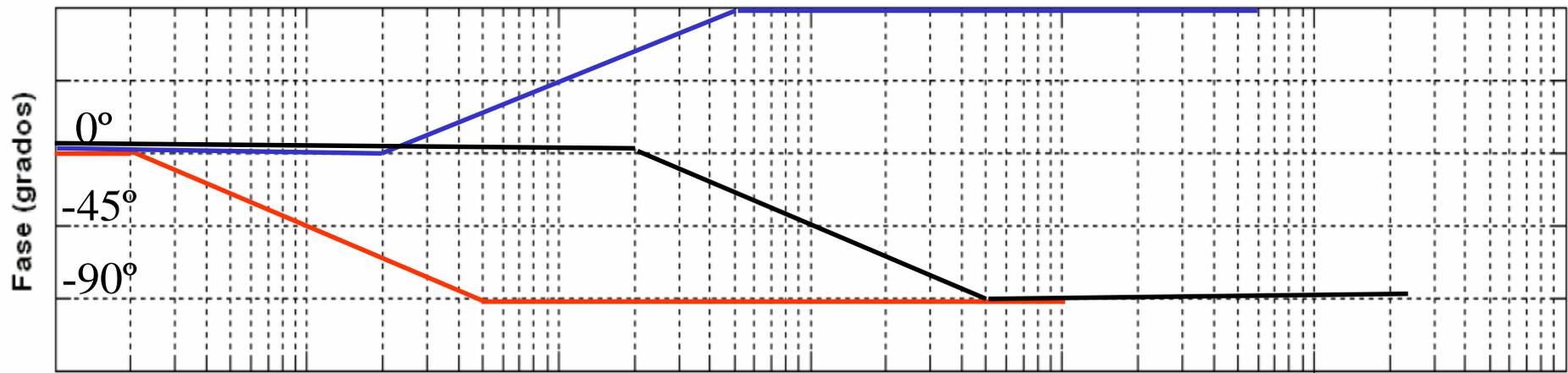
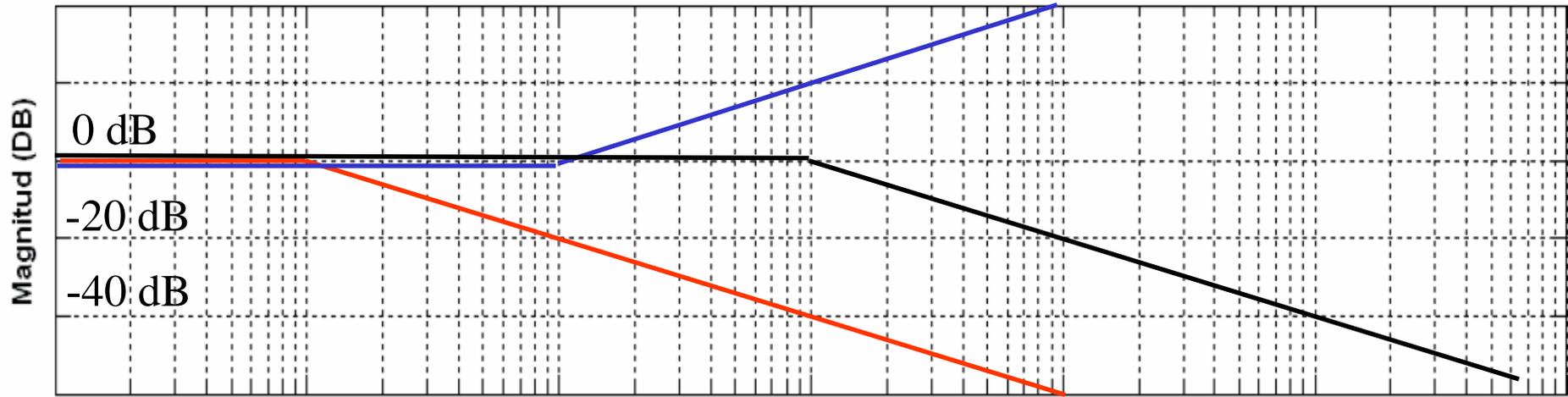
— $\frac{1}{s+1}$

SyS-I



SyS-I

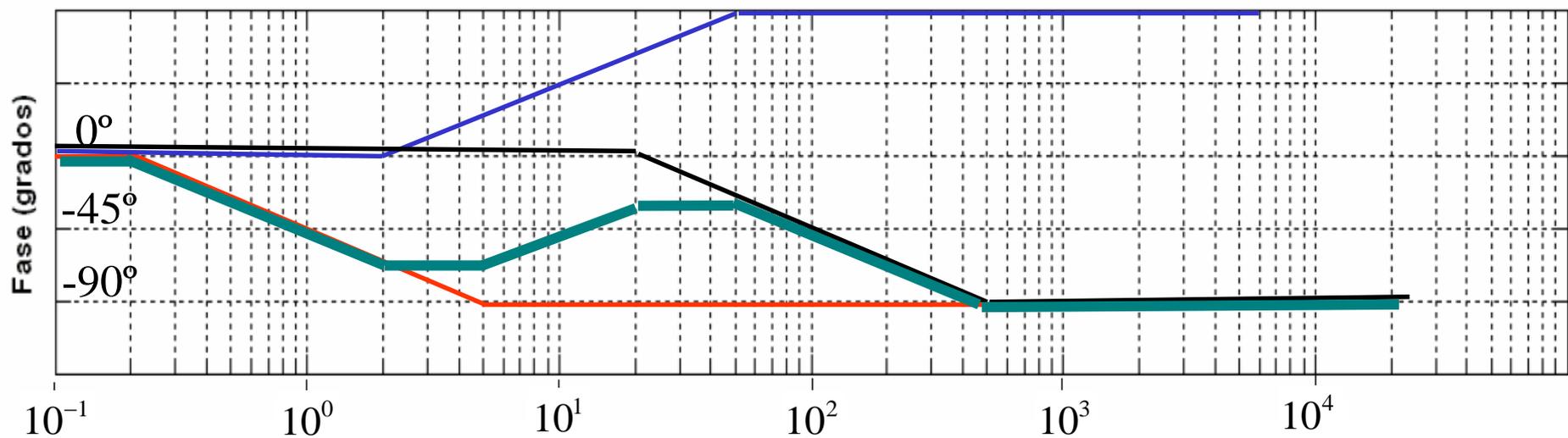
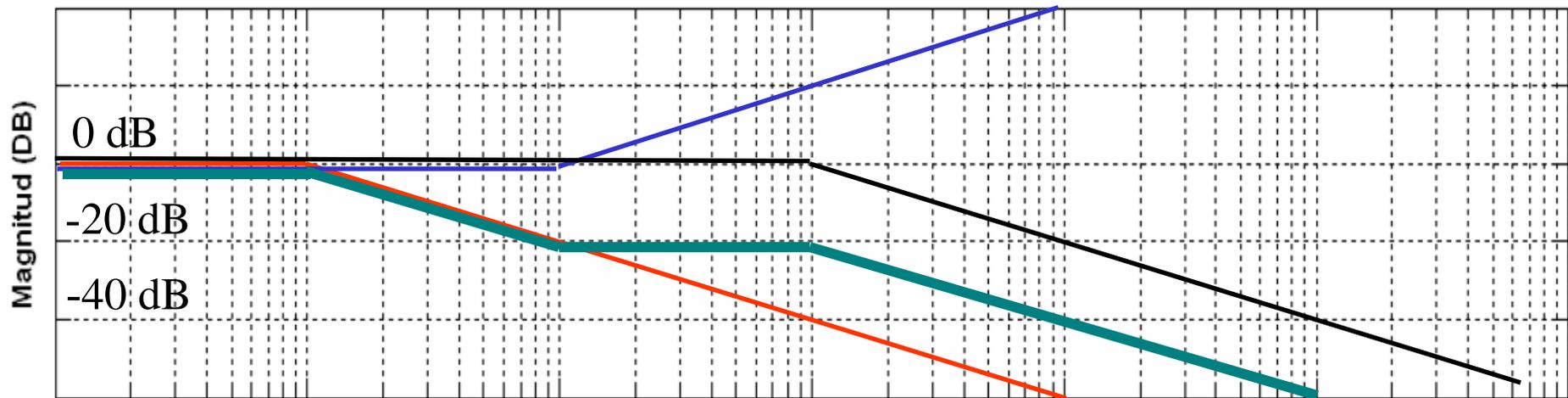
$$\left(\frac{s}{10} + 1 \right)$$



10^{-1} 10^0 10^1 10^2 10^3 10^4

SyS-I

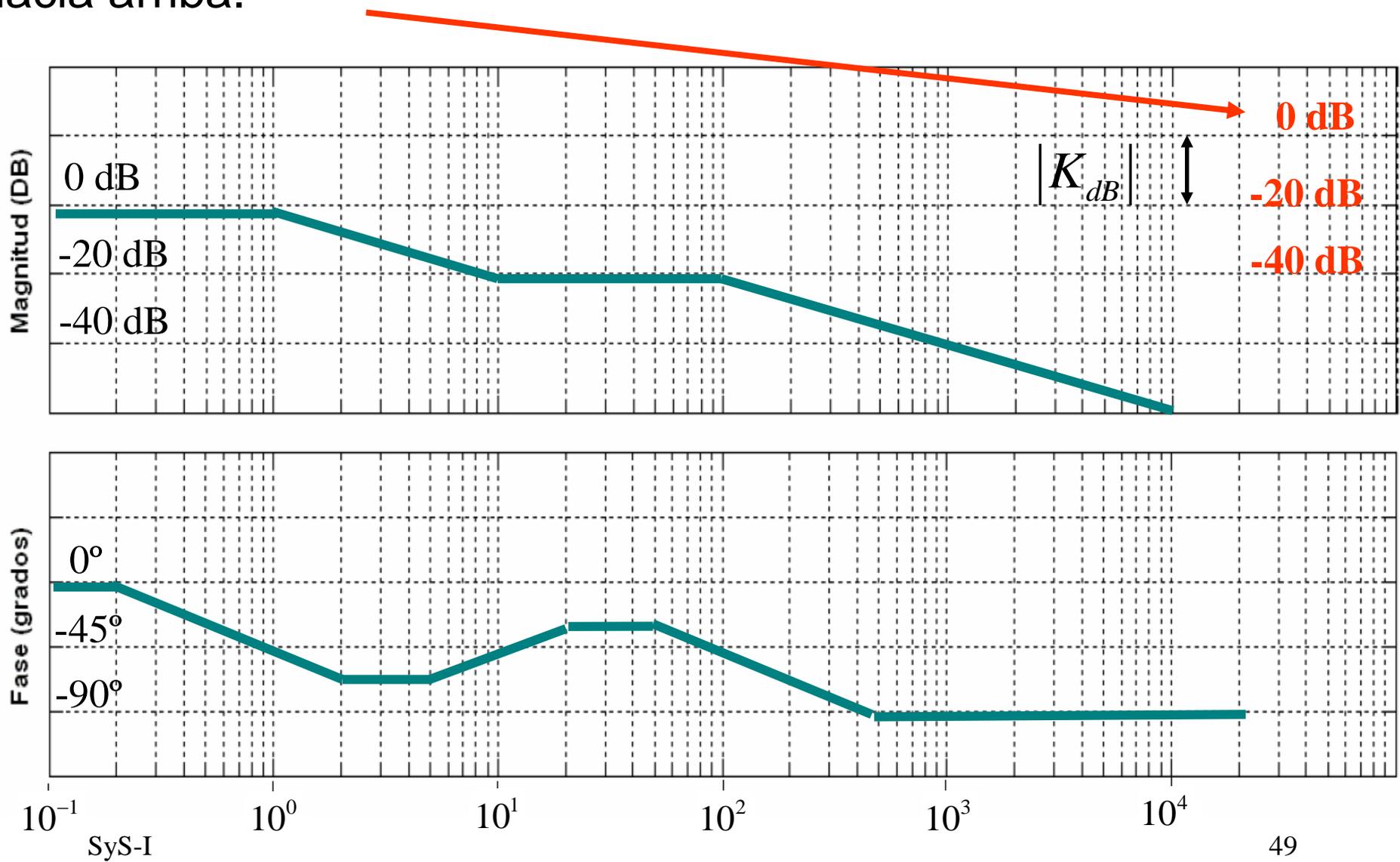
$$\frac{1}{\left(\frac{s}{100} + 1\right)}$$



SyS-I

$$\frac{\left(\frac{s}{10} + 1\right)}{(s + 1)\left(\frac{s}{100} + 1\right)}$$

Como $K_{dB} = -20$ dB debemos desplazar el diagrama de amplitud 20 dB hacia abajo, o equivalentemente el eje de abscisas 20 dB hacia arriba.



Veamos como realizar el diagrama de Bode en Matlab. Los comandos serían:

```
>> num = [1, 10];
```

```
>> den = [1, 101, 100];
```

```
>> G = tf(num, den);
```

```
>> bode(G, {1e-1, 1e5})
```

