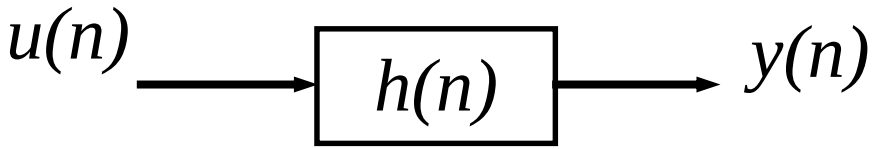
Sistemas y Señales I

Respuesta en frecuencia de SLE en TD

Temario: Cap. 7: Item 7.8

Respuesta en frecuencia de SLE en TD

Consideremos un SLE en TD descripto por su respuesta al impulso $h(n)$



Nos interesa determinar la respuesta del sistema a una entrada sinusoidal de la forma

$$u(n) = U_0 e^{j\omega n}$$

donde U_0 es la amplitud y ω es una frecuencia arbitraria en el intervalo fundamental $[-\pi, \pi]$.

La respuesta del sistema resulta

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\left[U_0 e^{j\omega(n-k)}\right]$$

$$= U_0 \underbrace{\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}\right]}_{(1)} e^{j\omega n}$$

Considerando que la función transferencia *Z* del sistema está definida como

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}$$

entonces el término (1) puede pensarse como la función transferencia *Z* calculada para $z = e^{j\omega}$, es decir para z sobre la circunferencia unitaria en el plano complejo, *i.e.*

$$(1) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \stackrel{\Delta}{=} H(\omega)$$

Para que este razonamiento sea válido la RDC de $H(z)$ debe incluir a la circunferencia unitaria, lo cual se verifica si el sistema es **BIBO estable**.

La respuesta del sistema resulta entonces

$$y(n) = U_0 H(\omega) e^{j\omega n}$$

En general $H(\omega)$ es una función compleja de la variable ω , por lo que puede escribirse

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

$$\phi(\omega) \triangleq \angle H(\omega)$$

Resulta entonces

$$y(n) = U_0 |H(\omega)| e^{j(\omega n + \phi(\omega))}$$

Es decir, la respuesta del sistema es de la misma forma que la entrada, pero resulta amplificada (o atenuada) por el factor $|H(\omega)|$, y desfasada el ángulo $\phi(\omega)$.

Al término

$$H(\omega) \triangleq H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

se lo denomina **Transferencia Armónica** o **Respuesta en Frecuencia** del sistema.

Su conocimiento para todo ω permite determinar la respuesta en régimen permanente a entradas sinusoidales.

$$|H(\omega)| \rightarrow \textbf{Amplitud}$$

$$\angle H(\omega) \rightarrow \textbf{Fase}$$

- A la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ se la suele graficar en diagramas logarítmicos de amplitud y fase

$$\left|H(\omega)\right|_{dB} \overset{\Delta}{=} 20 \log \left|H(\omega)\right| \quad \text{vs.} \quad \omega$$

$$\angle H(\omega) \quad \text{vs.} \quad \omega$$

escala logarítmica

que son los denominados **Diagramas de Bode de Amplitud y Fase.** A diferencia de lo que sucedía en TC, en este caso los diagramas resultan periódicos, y sólo se grafican en el rango de frecuencias

$$\omega \in [0, \pi]$$

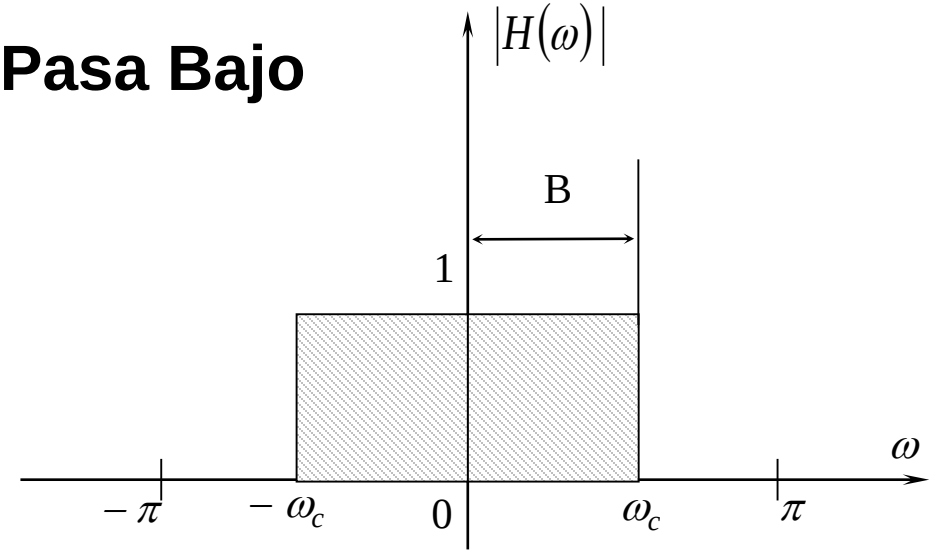
Por simetría se obtienen los valores de la respuesta en frecuencia en el intervalo $\omega \in [-\pi, 0]$.

Filtros Digitales

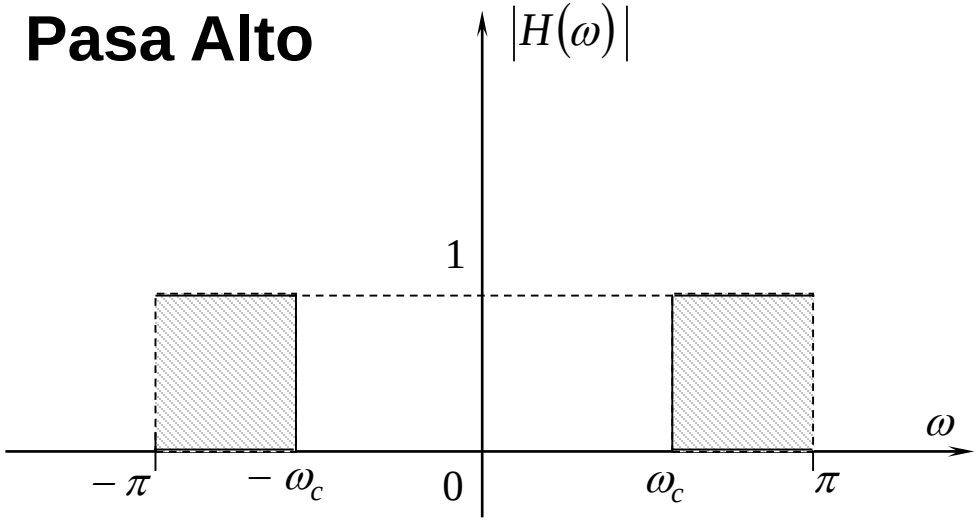
Un Sistema Lineal Estacionario en TD con **Respuesta en Frecuencia** $H(\omega)$ puede pensarse como un **Filtro Digital** que actúa sobre la señal de entrada, modificando su contenido frecuencial.

Los **filtros ideales** suelen clasificarse de acuerdo a su respuesta en frecuencia. Se tiene entonces

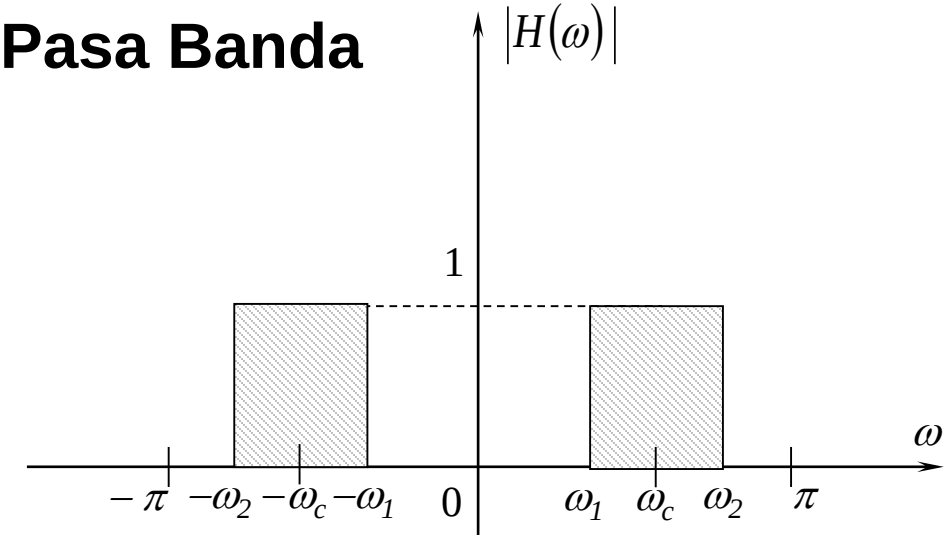
Pasa Bajo



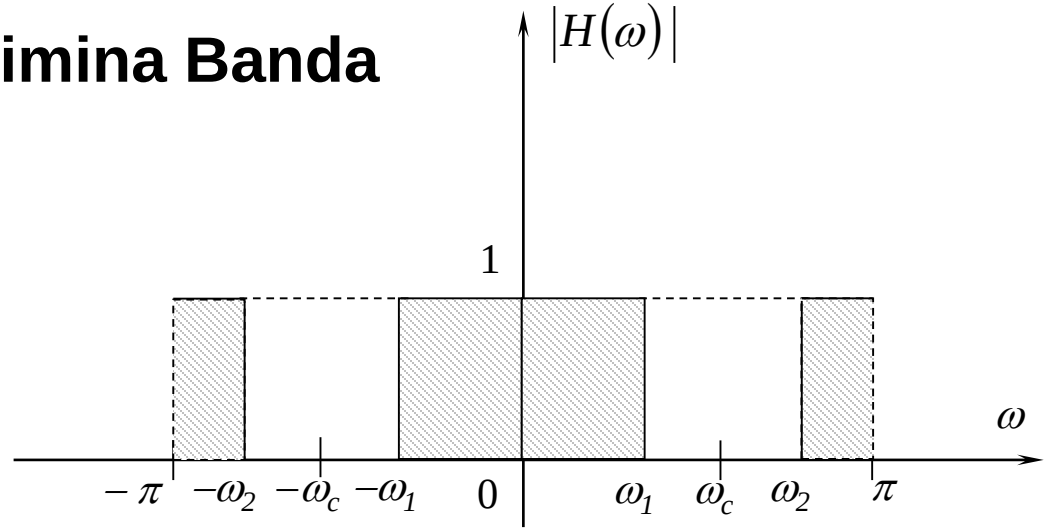
Pasa Alto



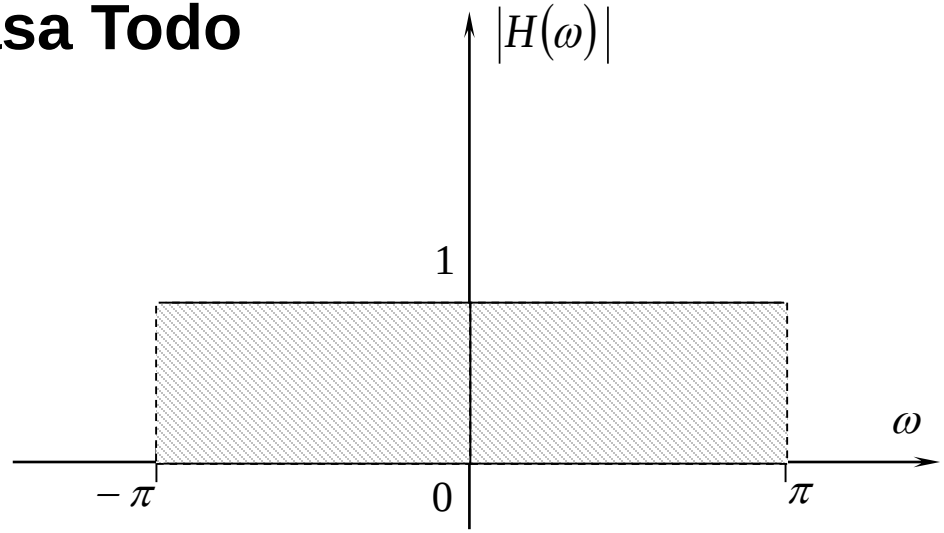
Pasa Banda



Elimina Banda



Pasa Todo



Como puede verse, la respuesta en frecuencia de los filtros ideales presenta una ganancia constante (igual a 1) en la banda de paso y una ganancia nula en la banda de rechazo.

Otra característica importante que se requiere de los filtros ideales es que su característica de fase sea **lineal** en la banda de paso, de manera que no se produzca distorsión de la señal de salida. Por ejemplo, si la respuesta en frecuencia es

$$H(\omega)=\begin{cases} C\,e^{-j\omega n_0} & \omega_1<\omega<\omega_2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

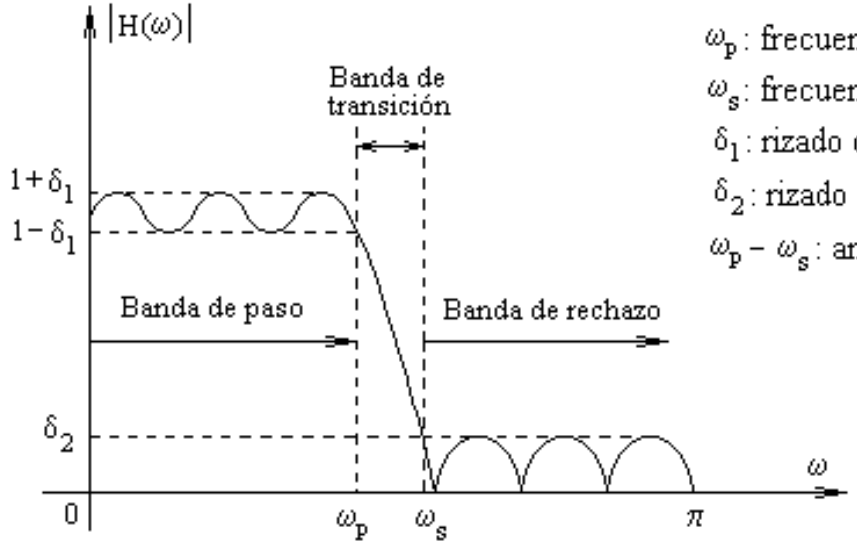
Entonces, la respuesta en régimen permanente senoidal a una entrada $u(n)=\sin(\omega n)$, con $\omega_1 < \omega < \omega_2$, resultará

$$y(n)=C\sin\left(\omega(n-n_0)\right)$$

que resulta una versión **escalada** y **retardada** de la señal de entrada.

El hecho de que la fase sea lineal posibilita que todas las componentes senoidales (en la banda de paso) sean retardadas lo mismo de manera que no se produzca distorsión en la forma de onda a la salida.

Desafortunadamente, los filtros ideales con respuestas en frecuencia como las representadas **no son implementables** en la práctica ya que resultarían **no causales.** La respuesta en frecuencia típica de un filtro real (**no ideal**) es de la forma

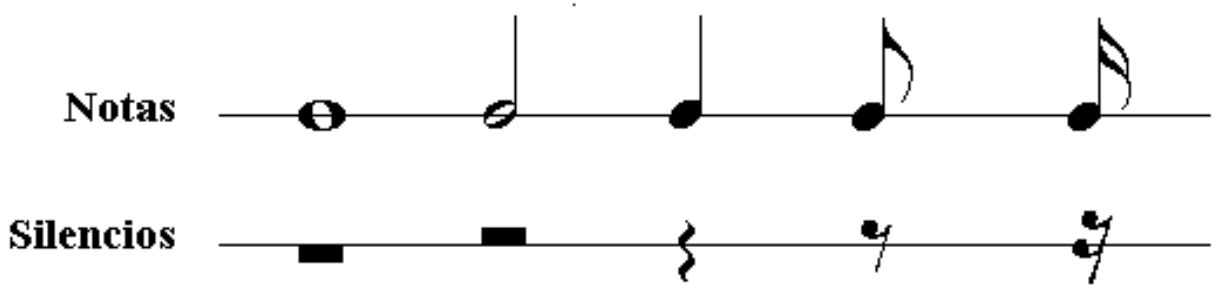


ω_p: frecuencia de borde de la banda de paso
ω_s: frecuencia de borde de la banda de rechazo
δ_1: rizado de la banda de paso
δ_2: rizado de la banda de rechazo
$\omega_p - \omega_s$: ancho de la banda de transición

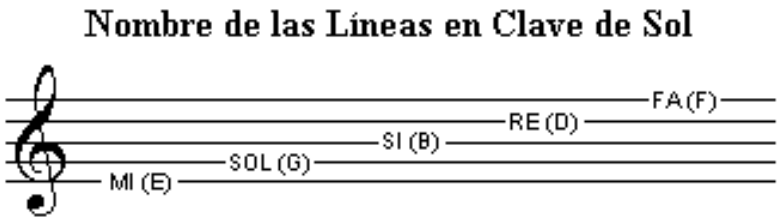
Ejemplo: Filtrado de una Señal de Audio

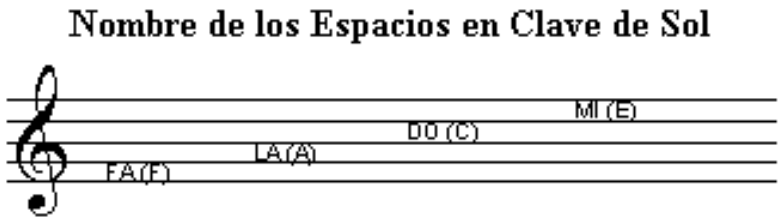
Notación Musical

- La forma de la nota indica la duración relativa



- La altura de la nota en el pentagrama indica la frecuencia

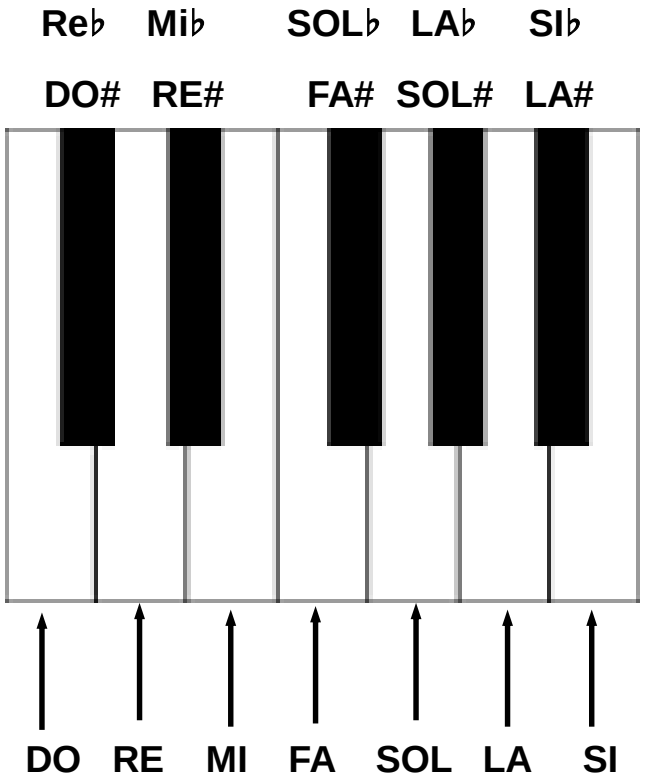




Escala cromática en el rango 440-880 Hz

(Sistema Equitemperado)

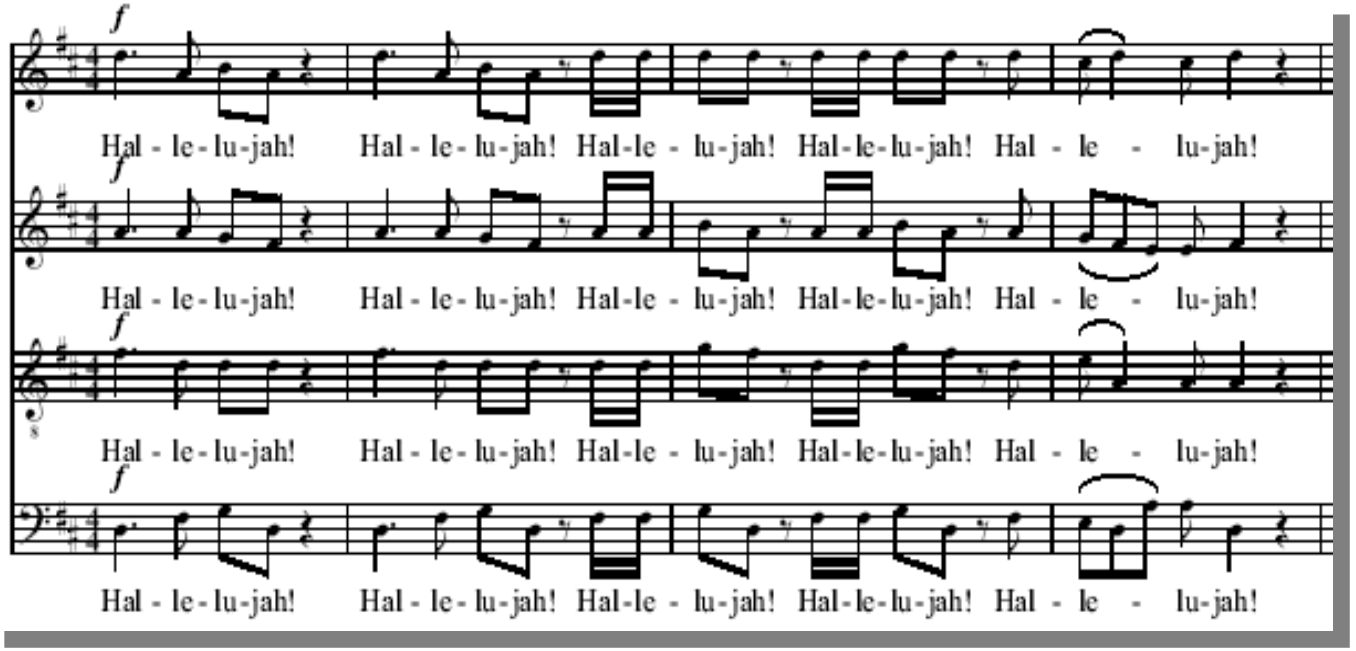
Nota	Frecuencia [Hz]
La	440
La # - Si *b*	$440 \times 2^{1/12}$
Si	$440 \times 2^{2/12}$
Do	$440 \times 2^{3/12}$
Do # - Re *b*	$440 \times 2^{4/12}$
Re	$440 \times 2^{5/12}$
Re # - Mi *b*	$440 \times 2^{6/12}$
Mi	$440 \times 2^{7/12}$
Fa	$440 \times 2^{8/12}$
Fa # - Sol *b*	$440 \times 2^{9/12}$
Sol	$440 \times 2^{10/12}$
Sol # - La *b*	$440 \times 2^{11/12}$
La	$440 \times 2^{12/12} = 880$



$$\frac{F_{nota+semitono}}{F_{nota}} = 2^{\frac{1}{12}}$$

Señal a procesar

El siguiente trozo de música corresponde a los primeros compases del ***Hallelujah Chorus*** del Oratorio ***Messiah*** de G. F. Handel (1685-1759). La obra se estrenó en Dublin en 1742. A partir de 1750, ***Messiah*** se interpretó en funciones anuales a beneficio del Foundling Hospital, una organización londinense de caridad que se ocupaba de los niños huérfanos, a la cual Handel estuvo vinculado hasta su fallecimiento en 1759. En su testamento, Handel legó los derechos de autor de la obra, y una copia autografiada, al Foundling Hospital. Los cuatro pentagramas corresponden a las voces de soprano, alto, tenor y bajo.



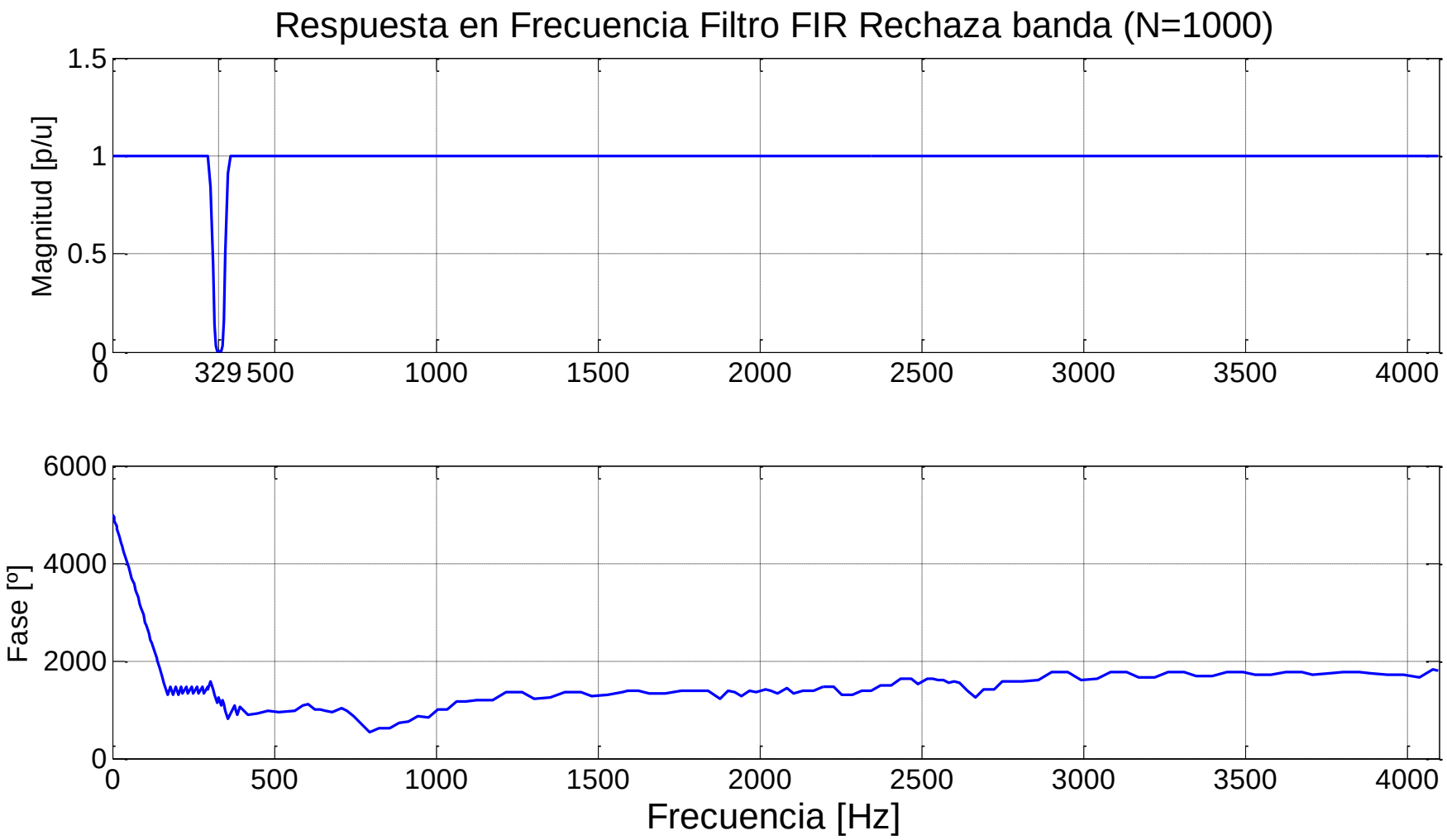
Descripción del problema

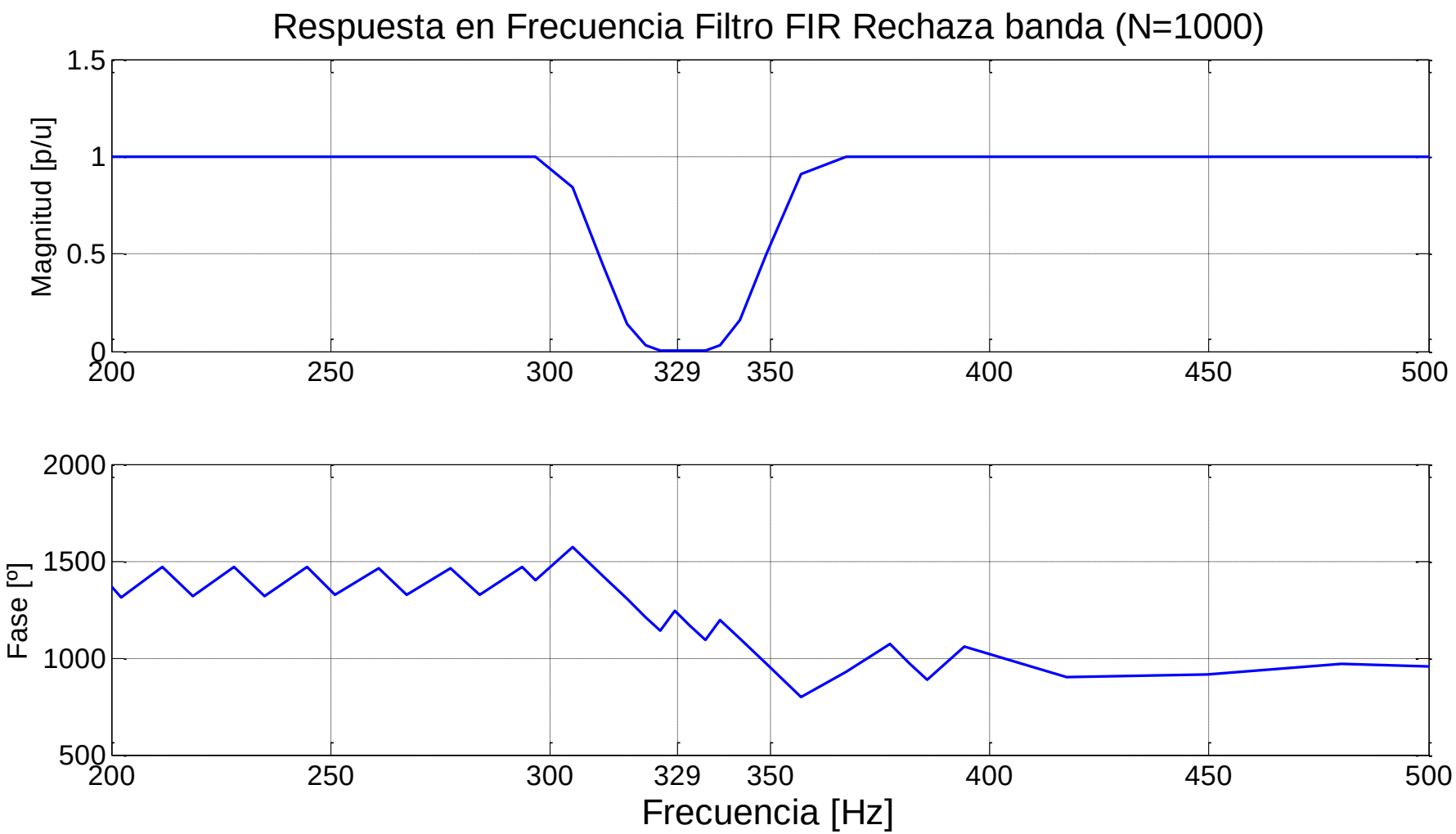
- El archivo **`handel.m`** de Matlab contiene una señal de audio, muestreada con F_s = 8192 Hz, que corresponde al trozo musical mencionado.
- Se genera un tono puro con la nota **Mi** (frecuencia F_{Mi} = 220 x $2^{7/12}$ Hz = 329.627 Hz) y con la misma duración que la señal en **`handel.m`**, y se adiciona a la señal. Se considera una amplitud igual a 0.3.
- Se quiere diseñar un filtro rechaza banda, en el rango correspondiente a las notas **Re#** (frecuencia $F_{Re\#}$ = 220 x $2^{6/12}$ Hz = 311.127 Hz) y **Fa** (frecuencia F_{Fa} = 220 x $2^{8/12}$ Hz = 349.228 Hz), para eliminar el tono puro adicionado.

- Se propone un **filtro rechaza banda de tipo FIR de fase lineal** y consideraremos distintas longitudes N para el mismo.

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

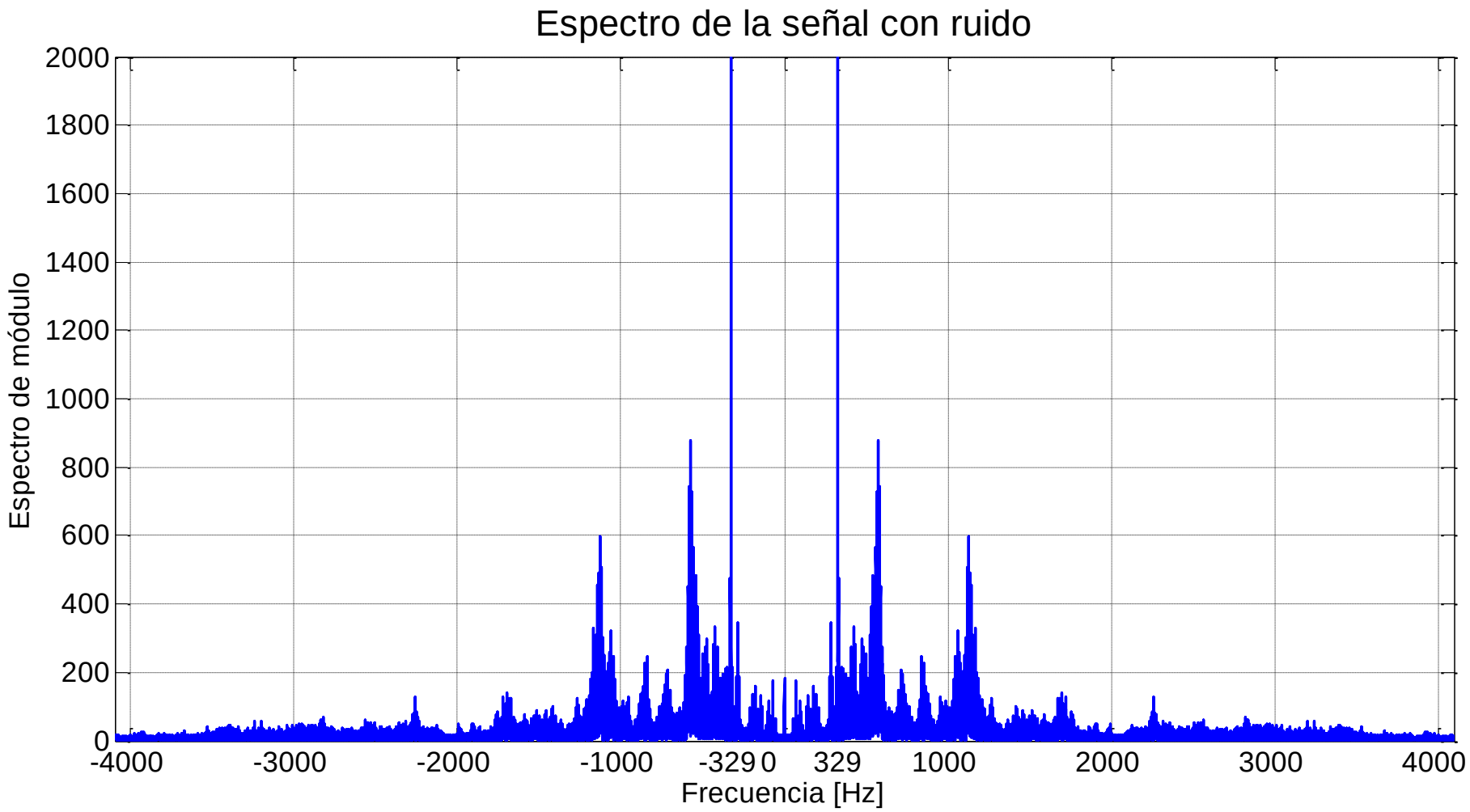
❑ Respuesta en frecuencia del filtro FIR rechaza banda

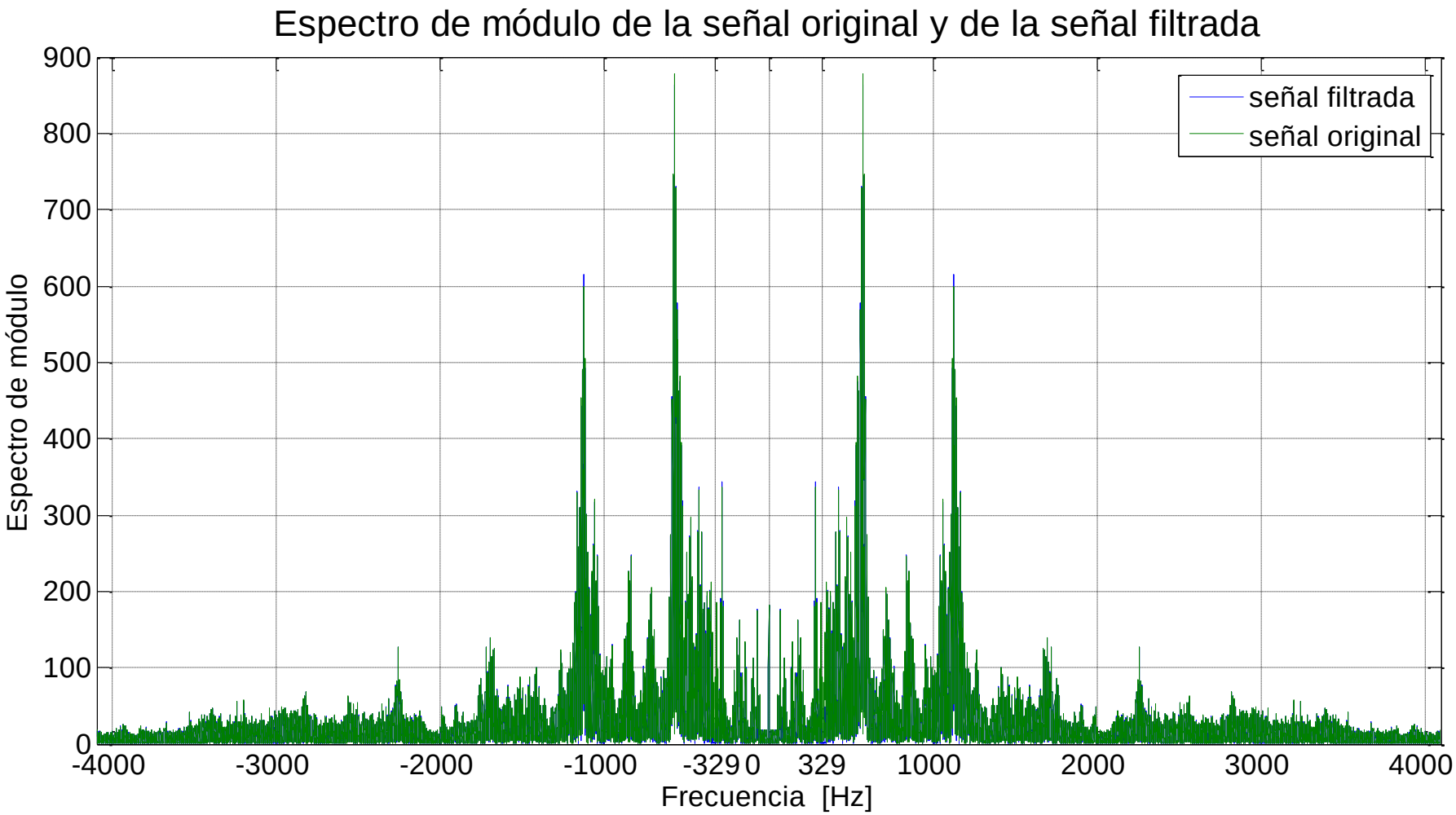


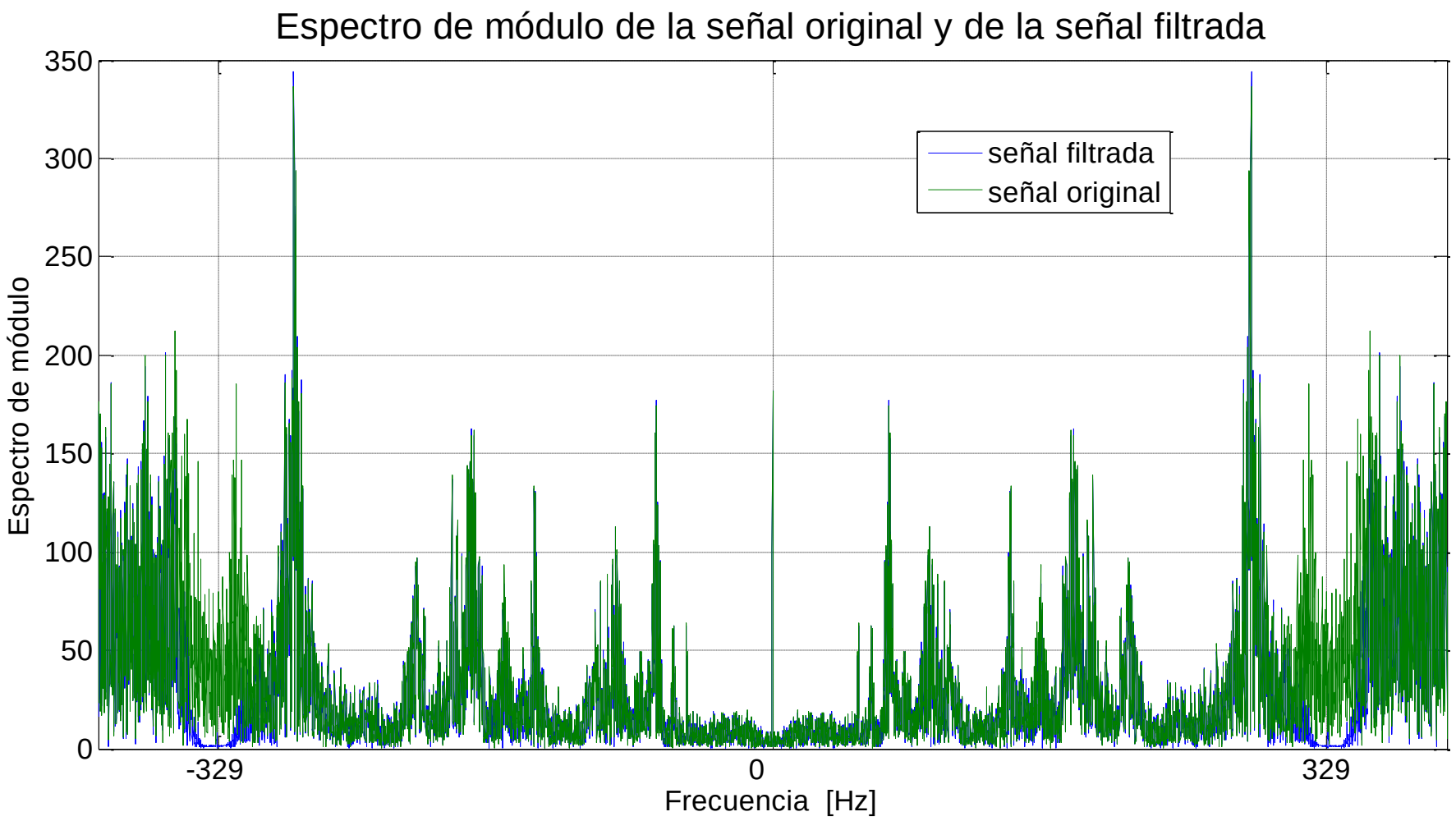

Respuesta en Frecuencia Filtro FIR Rechaza banda (N=1000)
Magnitud [p/u]
1.5
1
0.5
0
200
250
300
329
350
400
450
500
Fase [º]
2000
1500
1000
500
200
250
300
329
350
400
450
500
Frecuencia [Hz]

```
load('handel')
F_Mi=220*2^(7/12);
F_Resos=220*2^(6/12);
F_Fa=220*2^(8/12);
w1=2*F_Resos/Fs;
w2=2*F_Fa/Fs;
N=1000;
num=fir1(N,[w1 w2],'stop');
den=[1 zeros(1,length(num)-1)];
filtro=tf(num,den,1/Fs);
[mag,fase,w]=bode(filtro);
% subplot(211)
% plot(w/(2*pi),mag(:))
% subplot(212)
% plot(w/(2*pi),fase(:))
t=[0:1/Fs:(length(y)-1)/Fs]';
ruido_Mi=0.3*sin(2*pi*F_Mi*t);
yruidosa=y+ruido_Mi;
yfiltrada=filter(num,den,yruidosa);
```

```
Nf=2^17;
Y=fft(y,Nf);
Yruidosa=fft(yruidosa,Nf);
Yfiltrada=fft(yfiltrada,Nf);
F=[-Fs/2:Fs/Nf:Fs/2-Fs/Nf]';
figure
plot(F,abs(fftshift(Yruidosa)))
figure
plot(F,abs(fftshift(Yfiltrada)),F,abs(fftshift(Y)))
```


Espectro de la señal con ruido
Espectro de módulo
Frecuencia [Hz]
2000
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
-4000
-3000
-2000
-1000
-329
0
329
1000
2000
3000
4000


Espectro de módulo de la señal original y de la señal filtrada
señal filtrada
señal original
Espectro de módulo
Frecuencia [Hz]
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
-4000
-3000
-2000
-1000
-329
0
329
1000
2000
3000
4000


Espectro de módulo de la señal original y de la señal filtrada
señal filtrada
señal original
Espectro de módulo
Frecuencia [Hz]
350
300
250
200
150
100
50
0
-329
0
329