# Sistemas y Señales I

## Respuesta de Sistemas LE en TD a Entradas Arbitrarias

**Temario:** Cap. 2: Items 2.1, 2.2 y 2.3

# Respuesta de Sistemas LE en TD a Entradas Arbitrarias

- **Sistemas en Tiempo Discreto**


$$u(n) \xrightarrow{\quad\quad H \quad\quad} y(n)$$

| H: Operador Entrada-Salida |
|---|

- Hay básicamente dos formas de analizar la respuesta del sistema a una entrada arbitraria:

  I- Resolviendo explícitamente la ecuación que describe el comportamiento entrada-salida. En general esta ecuación será de la forma:

$$y(n) = F\left[y(n-1), \cdots, y(n-N), u(n), u(n-1), \cdots, u(n-M)\right]$$

  donde $F$ es una función, posiblemente no lineal.

  Para SLE, esta relación entrada-salida, toma la forma general:

$$\boxed{y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k \cdot y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot u(n-k)} \qquad (1)$$

  donde $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ son parámetros constantes.

  La forma (1) se denomina ecuación en diferencias (de orden N)

II- Descomponiendo la señal de entrada en la combinación lineal de **señales elementales**, para las cuales sea “fácil” calcular la respuesta del sistema.

Luego, usando la propiedad de linealidad, la respuesta a la entrada arbitraria puede calcularse por **superposición** de las respuestas a las señales elementales.

Supongamos entonces:

$$u(n) = \sum_k c_k \cdot u_k(n)$$

Donde $\{u_k(n)\}$ son las señales elementales y $\{c_k\}$ son los coeficientes de la combinación lineal.

Denotemos con $y_k(n)$ la respuesta del sistema (**relajado**) a la señal elemental $u_k(n)$, es decir:

$$y_k(n) = H[u_k(n)]$$

Luego:

$$y(n) = H[u(n)] = H\left[\sum_k c_k \cdot u_k(n)\right]$$

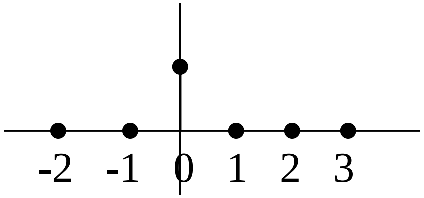
$$y(n) = \sum_k H[c_k \cdot u_k(n)]$$

$$y(n) = \sum_k c_k \cdot H[u_k(n)]$$

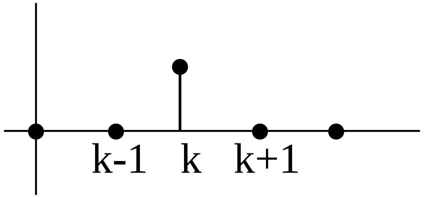
$$y(n) = \sum_k c_k \cdot y_k(n)$$

Una señal elemental que facilita el análisis es el **impulso unitario $\delta(n)$** definido como:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; n = 0 \\ 0 & \text{si } \; n \neq 0 \end{cases}$$




$$\delta(n-k) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; n = k \\ 0 & \text{si } \; n \neq k \end{cases}$$



Es decir, si adoptamos:

$$u_k(n) = \delta(n\text{-}k)$$

debemos encontrar los coeficientes $c_k$, tal que una señal se pueda escribir como:

$$u(n) = \sum_k c_k \cdot u_k(n)$$

$$u(n) = \sum_k c_k \cdot \delta(n-k)$$

Notando que:

$$x(n)\cdot\delta(n-k) = x(k)\cdot\delta(n-k)$$

Podemos escribir:

$$\boxed{u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)\cdot\delta(n-k)}$$

La respuesta del sistema a la entrada *u(n)* será entonces:

$$y(n) = H\left[u(n)\right] = H\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)\cdot\delta(n-k)\right]$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H\left[u(k)\cdot\delta(n-k)\right]$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)\cdot H\left[\delta(n-k)\right]$$

Definimos:

$$\boxed{H\left[\delta(n-k)\right] \stackrel{\Delta}{=} h(n,k)}$$

**Respuesta en el instante "*n*" al impulso aplicado en "*k*"**

Con lo que resulta:

$$\boxed{y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)\cdot h(n,k)}$$

**Suma de Superposición**

- Si el sistema es **estacionario**:

$$\delta(n) \xrightarrow{H} h(n,0) = h(n)$$

$$\delta(n-k) \xrightarrow{H} h(n,k) = h(n-k)$$

Con lo que resulta:

$$\boxed{y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)\cdot h(n-k)}$$

**Suma de Convolución**

“La respuesta del **SLE** a la entrada *u(n)* es la convolución entre la entrada y la respuesta al impulso del sistema”

Denotamos:

$$\boxed{u(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)\cdot h(n-k)}$$

- **NOTA:** Un sistema lineal estacionario queda completamente caracterizado por su respuesta al impulso $h(n)$.

- **Operaciones Involucradas en la convolución**

Supongamos que queremos calcular la salida en un instante $n = n_o$.

Se tiene:

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) \cdot h(n_0 - k)$$

La convolución involucra los siguientes pasos:

1- **Reflejar** $h(k)$ respecto a $k = 0$ para obtener $h(-k)$

2- **Desplazar** $h(-k)$ una distancia $n_0$ hacia la derecha (izquierda) si $n_0$ es positivo (negativo) para obtener $h(n_0 - k)$

3- **Multiplicar** $u(k)$ con $h(n_0 - k)$ para cada valor de $k$, para obtener la secuencia:

$$\{u(k) \cdot h(n_0 - k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$$

4- **Sumar** la secuencia $\left\{u(k)\cdot h(n_0-k)\right\}_{k=-\infty}^{\infty}$ sobre el índice $k$

para obtener la salida en el instante $n = n_0$

Ejemplo:

El sistema lineal estacionario con respuesta al impulso:

$$h(n)=\left\{1,\underset{\uparrow}{2},1,-1\right\} \qquad \text{FIR}$$

Determinar la respuesta del sistema a la entrada:

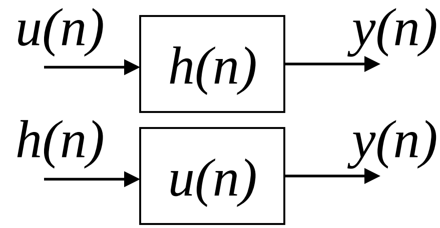
$$u(n)=\left\{\underset{\uparrow}{1},2,3,1\right\}$$

( Hacerlo !!!!! )

# • Propiedades de la convolución

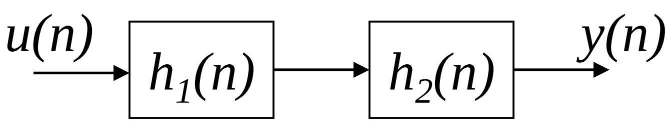
1- Propiedad Conmutativa:

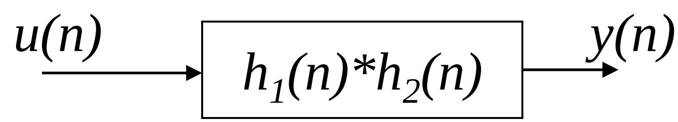
$$u(n) * h(n) = h(n) * u(n)$$




2- Propiedad Asociativa:

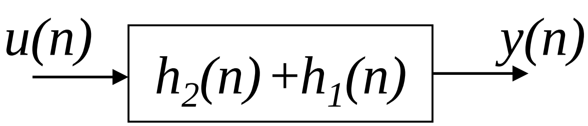
$$\left[u(n) * h_1(n)\right] * h_2(n) = u(n) * \left[h_1(n) * h_2(n)\right]$$

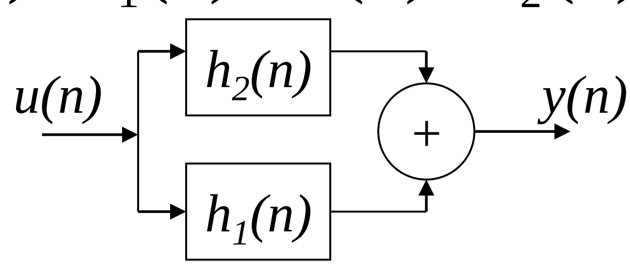



3- Propiedad Distributiva:

$$u(n) * \left[h_1(n) + h_2(n)\right] = u(n) * h_1(n) + u(n) * h_2(n)$$



## • Causalidad y Respuesta al Impulso

Para SLE, la propiedad de causalidad puede traducirse en una condición necesaria y suficiente sobre la respuesta al impulso del sistema.

Vimos que la respuesta de un SLE a una entrada arbitraria viene dada por:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\cdot u(n-k)$$

que puede escribirse:

$$y(n) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} h(k)\cdot u(n-k)}_{\text{① Depende del valor presente y de valores pasados de la entrada}} + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)\cdot u(n-k)}_{\text{② Depende de valores futuros de la entrada}}$$

Vemos que para que el sistema sea causal, debe ser: ② = 0, lo que se da si:

$$\boxed{h(n) = 0 \quad \text{para} \quad n < 0} \qquad (*)$$

La condición (*) es **necesaria y suficiente** para que el sistema sea causal.

Para un SLE causal, la respuesta a una entrada arbitraria puede entonces calcularse como:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \cdot u(n-k)$$

**Definición:** Por analogía, se dice que una señal $x(n)$ es causal si: $x(n) = 0$ para $n < 0$ .

La respuesta de un SLE **causal** a una señal **causal** puede entonces calcularse como:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k) \cdot u(n-k) = \sum_{k=0}^{n} u(k) \cdot h(n-k)$$

## Ejemplo:

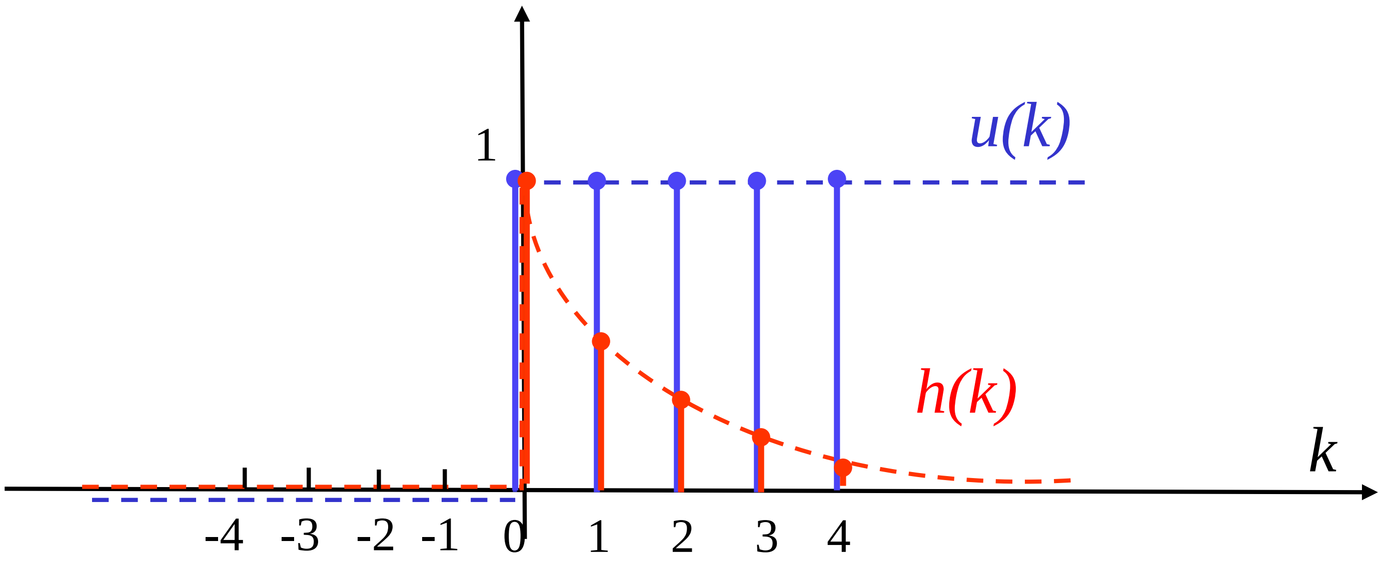
$$h(n) = a^n \mu(n) \quad , \quad 0 < a < 1$$

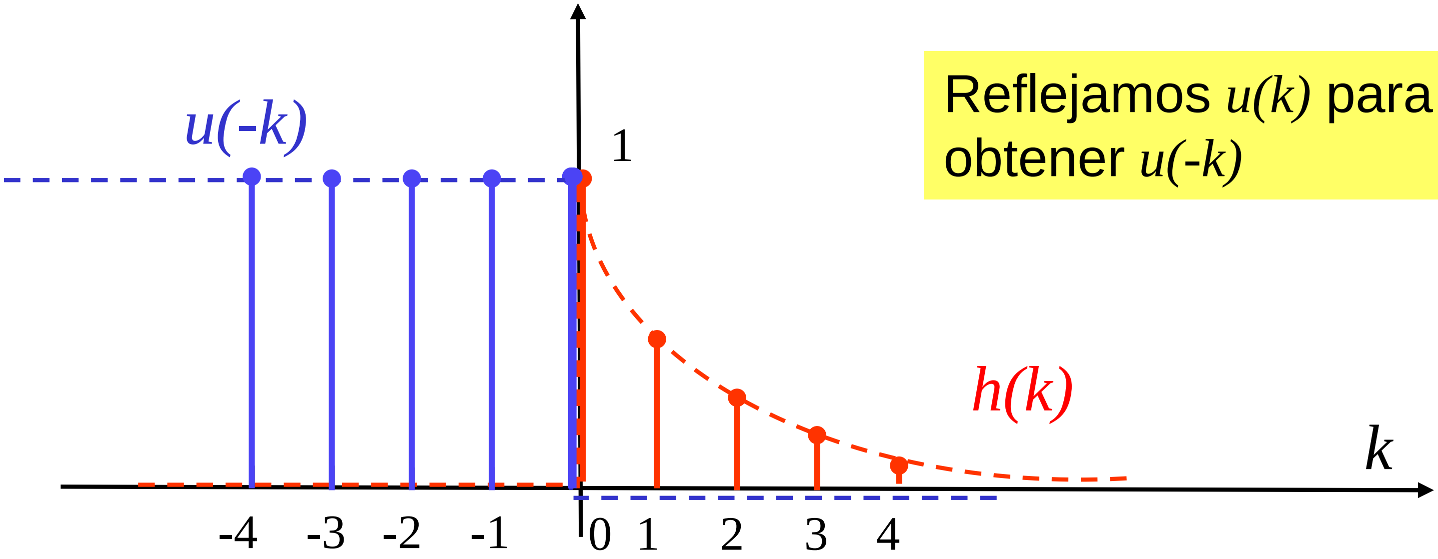
$$u(n) = \mu(n)$$

La respuesta del sistema resulta:

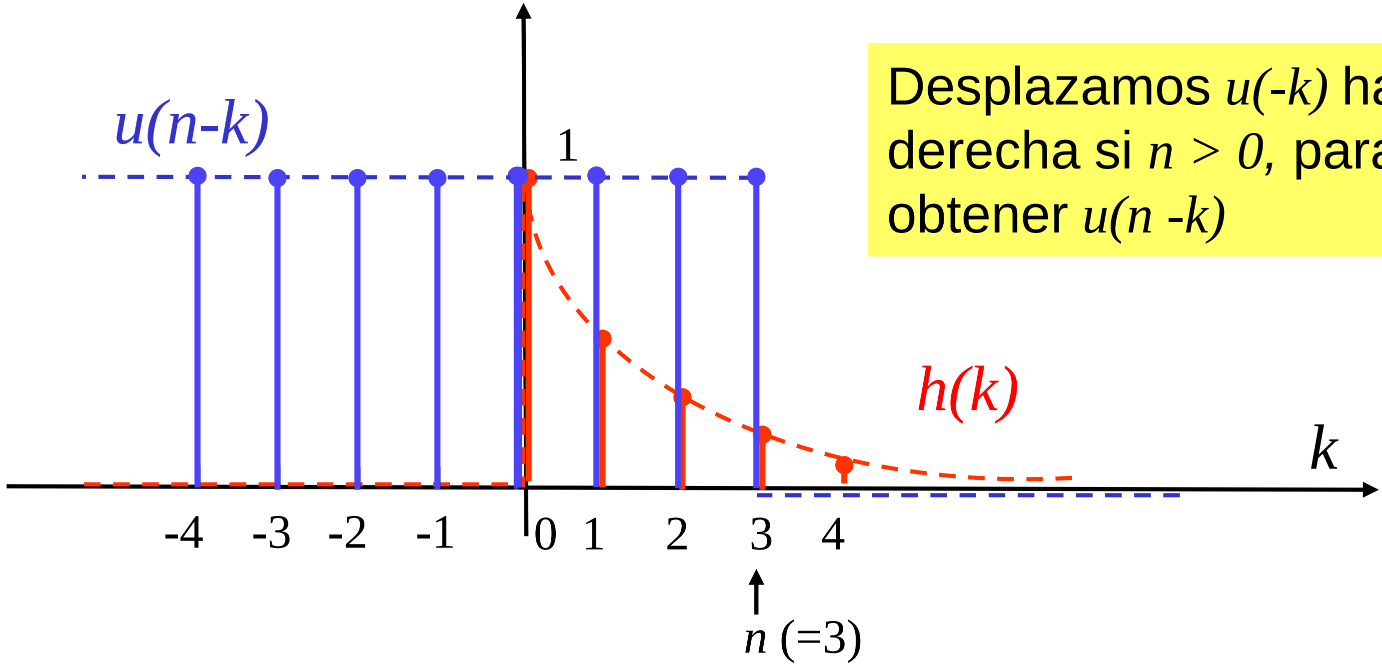
$$y(n) = h(n) * u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k) \qquad (1)$$

Grafiquemos $h(k)$ y $u(n\text{-}k)$ para este caso.






Reflejamos *u(k)* para obtener *u(-k)*

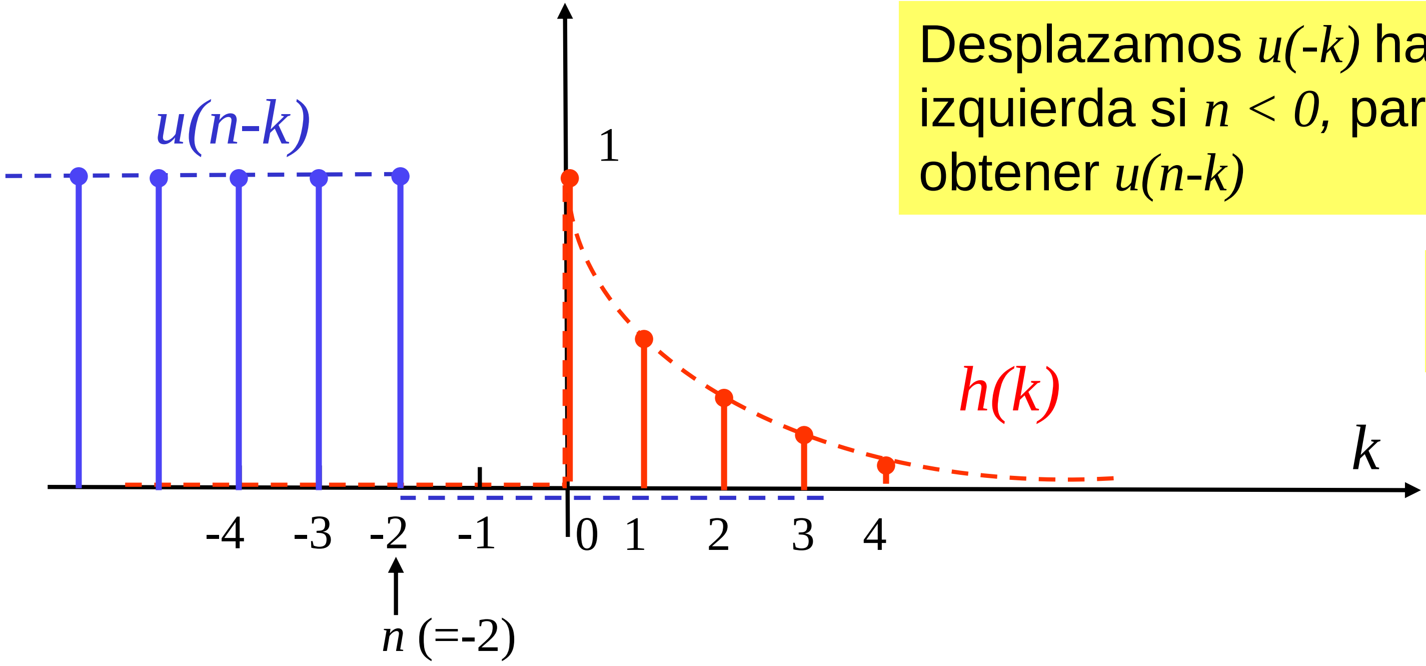



Desplazamos *u(-k)* hacia la derecha si $n > 0$, para obtener *u(n -k)*

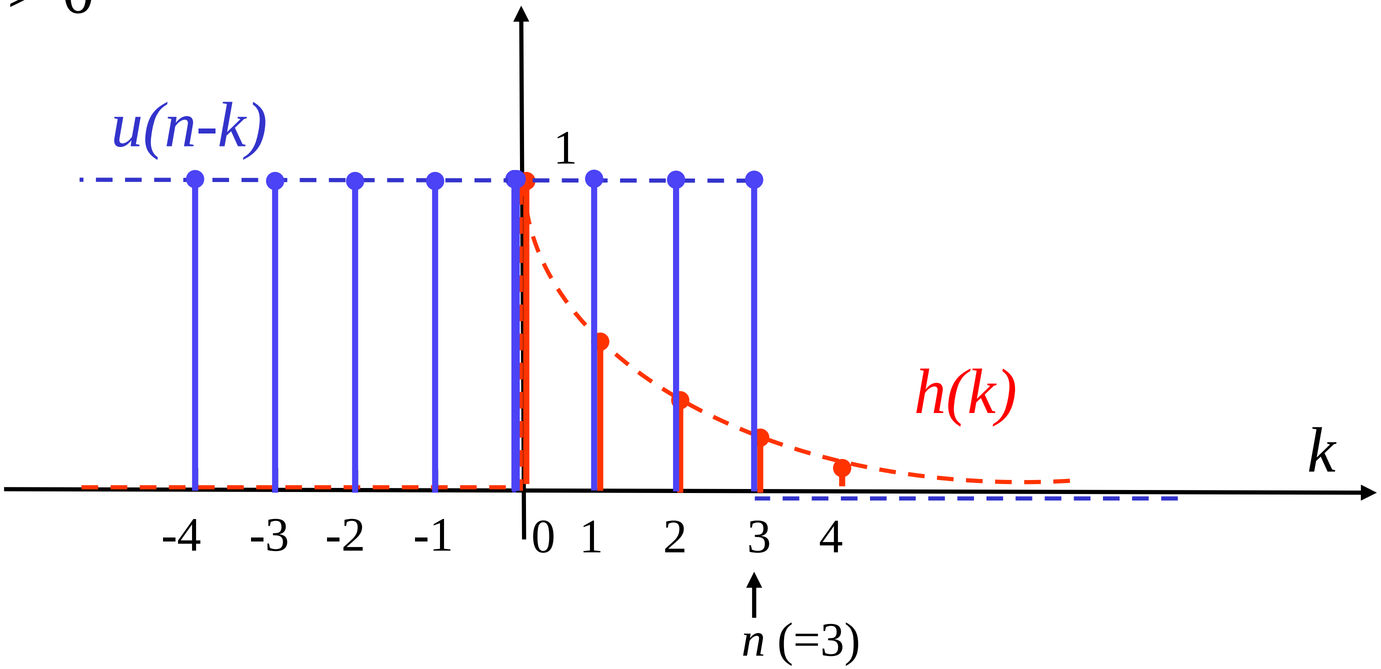
(I)

Desplazamos $u(-k)$ hacia la izquierda si $n < 0$, para obtener $u(n-k)$

(II)



**Caso I:** $n > 0$

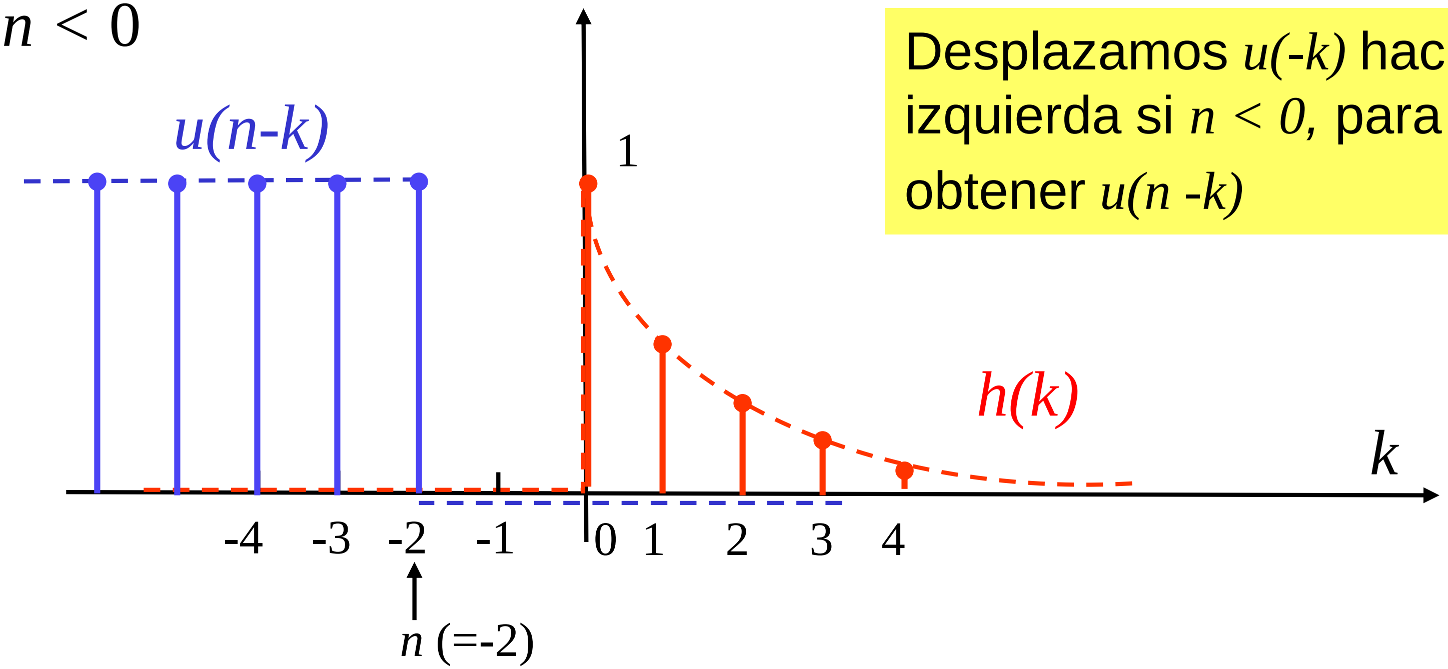



La respuesta (1) para este caso resulta:

$$y(n) = h(n) * u(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \qquad (2)$$

**Suma finita de tipo geométrica**

**Caso II:** $n < 0$




Desplazamos $u(-k)$ hacia la izquierda si $n < 0$, para obtener $u(n-k)$

La respuesta (1) para este caso resulta:

$$y(n) = h(n) * u(n) = 0 \quad (3)$$

Finalmente, considerando (2) y (3) podemos concluir que

$$y(n) = h(n) * u(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}\mu(n) \ , \ \forall n$$