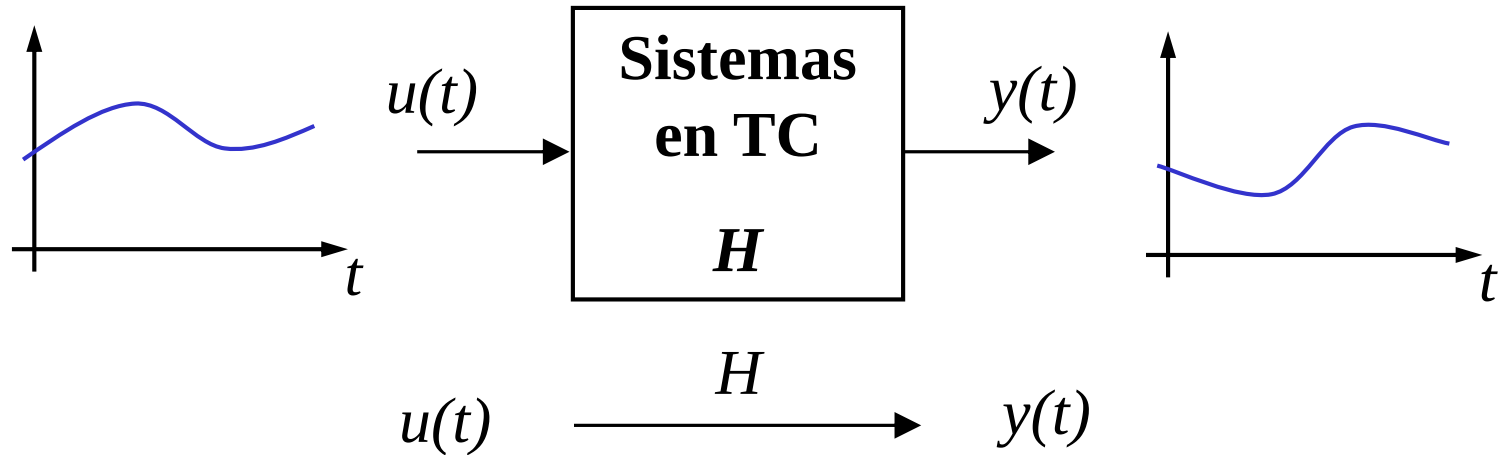


Sistemas y Señales I

Respuesta de Sistemas LE en TC a Entradas Arbitrarias

Temario: Cap. 2: Items 2.1, 2.2 y 2.3

- Sistemas en Tiempo Continuo:



H : operador entrada-salida (dominio temporal)

Hay dos formas de analizar la respuesta del sistema a una entrada arbitraria.

- I. Resolviendo la ecuación diferencial que describe el comportamiento entrada salida.

- II. Expresando la señal de entrada en función de señales elementales para las cuales se conozca la respuesta del sistema.
Observando que

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

puede escribirse

$$\begin{aligned} y(t) &= H[u(t)] \\ &= H \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H[u(\tau) \delta(t - \tau)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) H[\delta(t - \tau)] d\tau \end{aligned}$$

Por definición $H[\delta(t-\tau)]$ es la respuesta en el instante t al impulso aplicado en τ , que denotamos

$$h(t, \tau) \triangleq H[\delta(t-\tau)]$$

Entonces:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t, \tau) d\tau$$

Integral de Superposición

Si el sistema es estacionario, entonces

$$\delta(t) \xrightarrow{H} h(t, 0) = h(t)$$

$$\delta(t-\tau) \xrightarrow{H} h(t, \tau) = h(t-\tau)$$

estacionariedad

y resulta:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

**Integral de
Convolución**

“La respuesta de un SLE a una entrada arbitraria se obtiene como la convolución entre la entrada y la respuesta al impulso del sistema”.

Causalidad y respuesta al impulso

Considerando que la convolución verifica la propiedad conmutativa, podemos escribir:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau = \underbrace{\int_{-\infty}^{0-} h(\tau) u(t-\tau) d\tau}_{(1)} + \underbrace{\int_0^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau}_{(2)}$$

(1) Depende de valores
futuros de la entrada

(2) Depende de valores
presentes y pasados de la
entrada

Para que el sistema sea causal, debe ser

$$(1) \equiv 0$$

Por lo que debe ser:

$$h(t)=0 \quad \text{para } t < 0$$

Esta es la condición **necesaria y suficiente**
para que el SLE sea causal.

Ejemplos:

Problemas propuestos - Serie 3

1. $u(t)=\mu(t)$ *entrada*

$h(t)=e^{-\alpha t} \mu(t)$ respuesta al impulso

Hacerlo !!

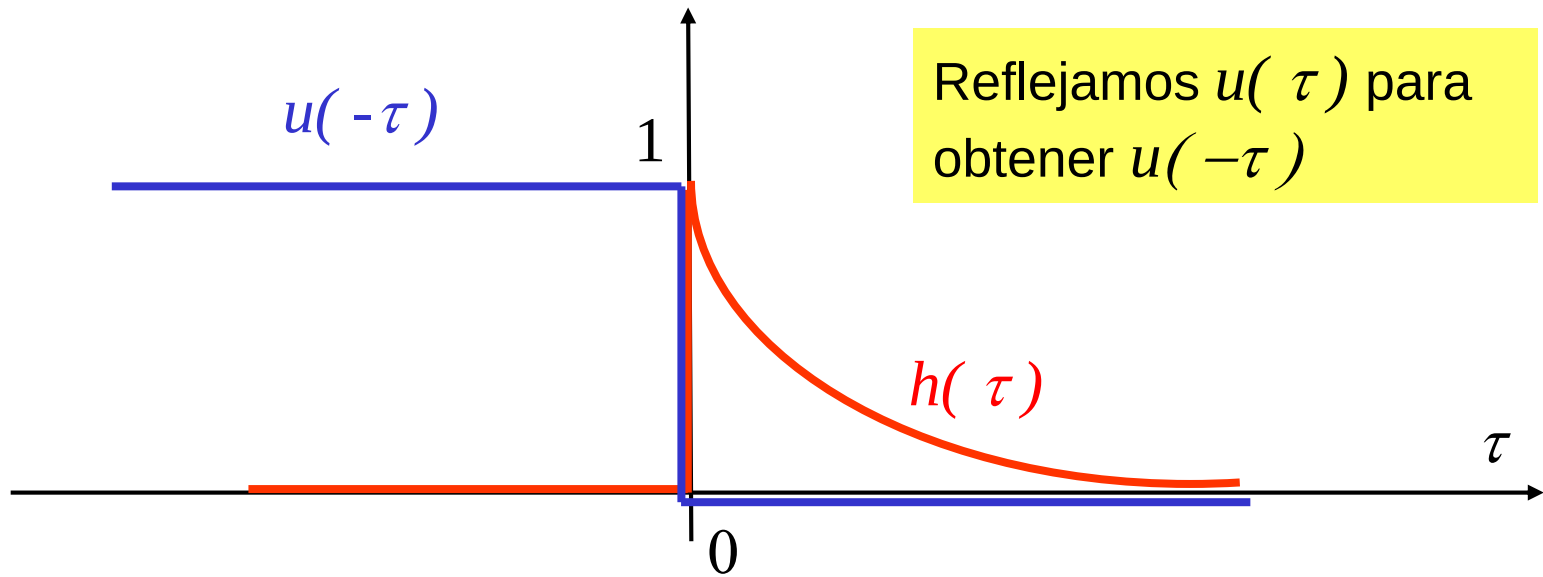
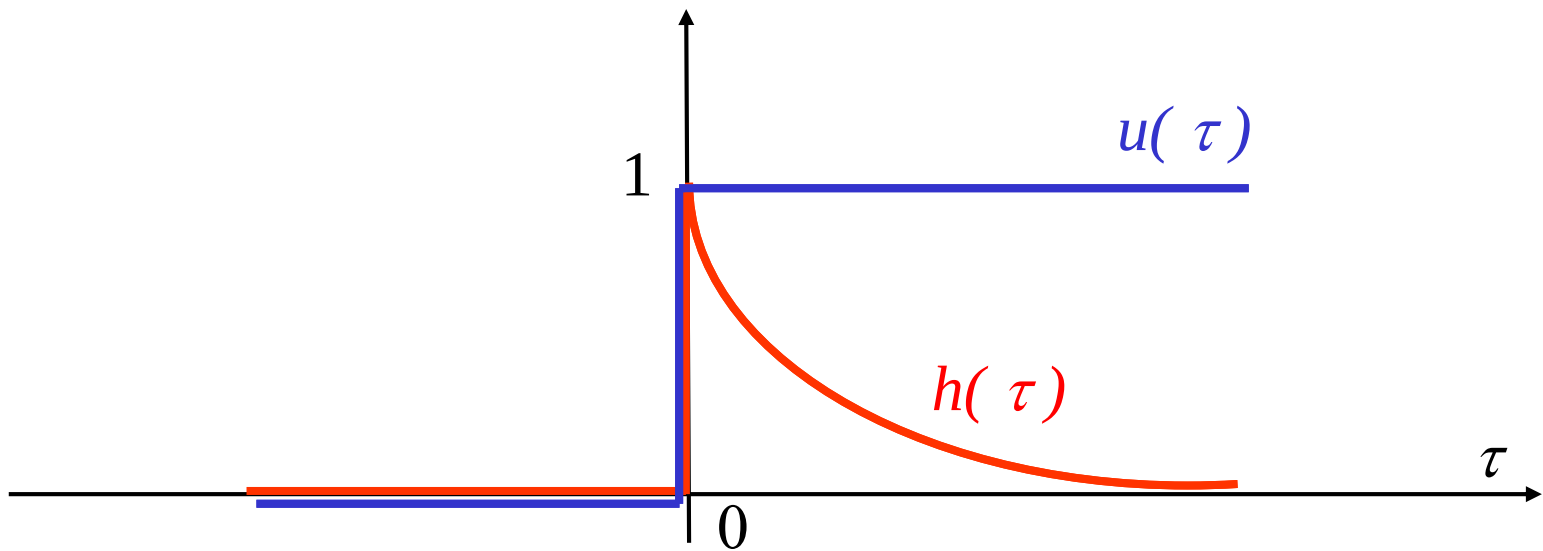
La respuesta del sistema a una entrada arbitraria viene dada por la convolución entre la respuesta al impulso del sistema y la entrada, es decir:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

Como en el caso de este ejemplo la respuesta al impulso está definida a partir de cero (**sistema causal**) resulta:

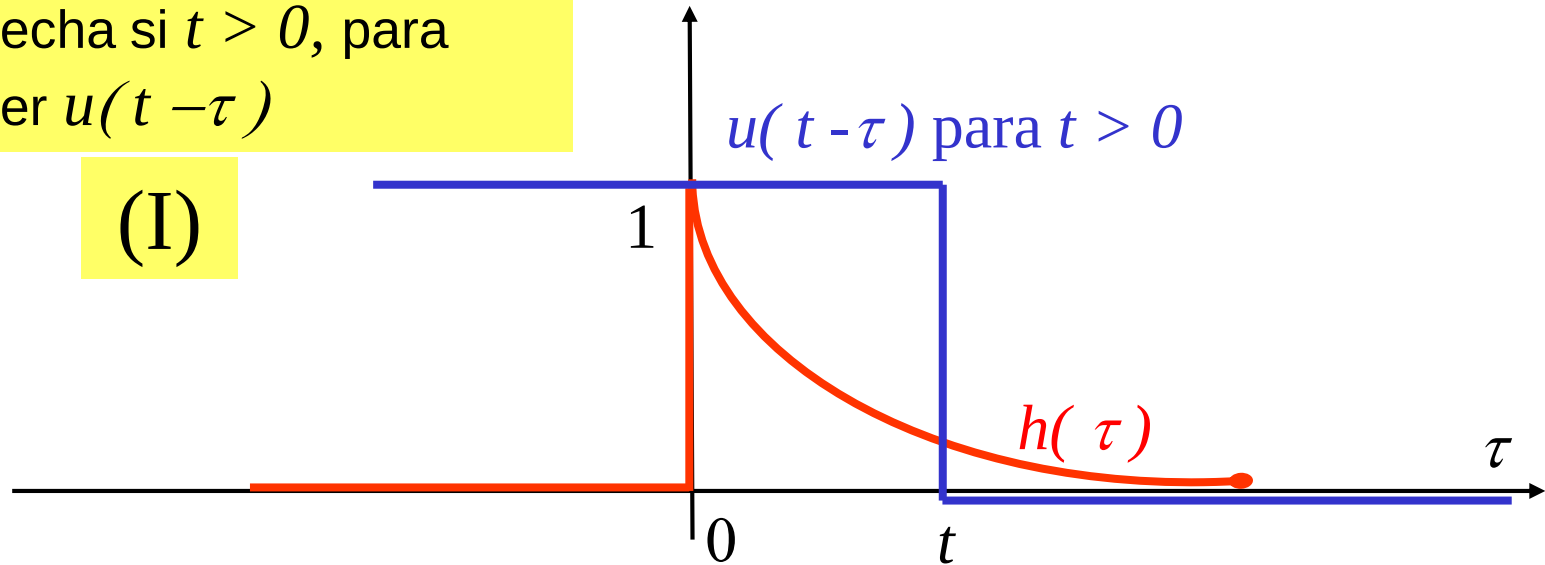
$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (1)$$

Grafiquemos $h(\tau)$ y $u(t-\tau)$ para este caso



Desplazamos $u(-\tau)$ hacia la derecha si $t > 0$, para obtener $u(t-\tau)$

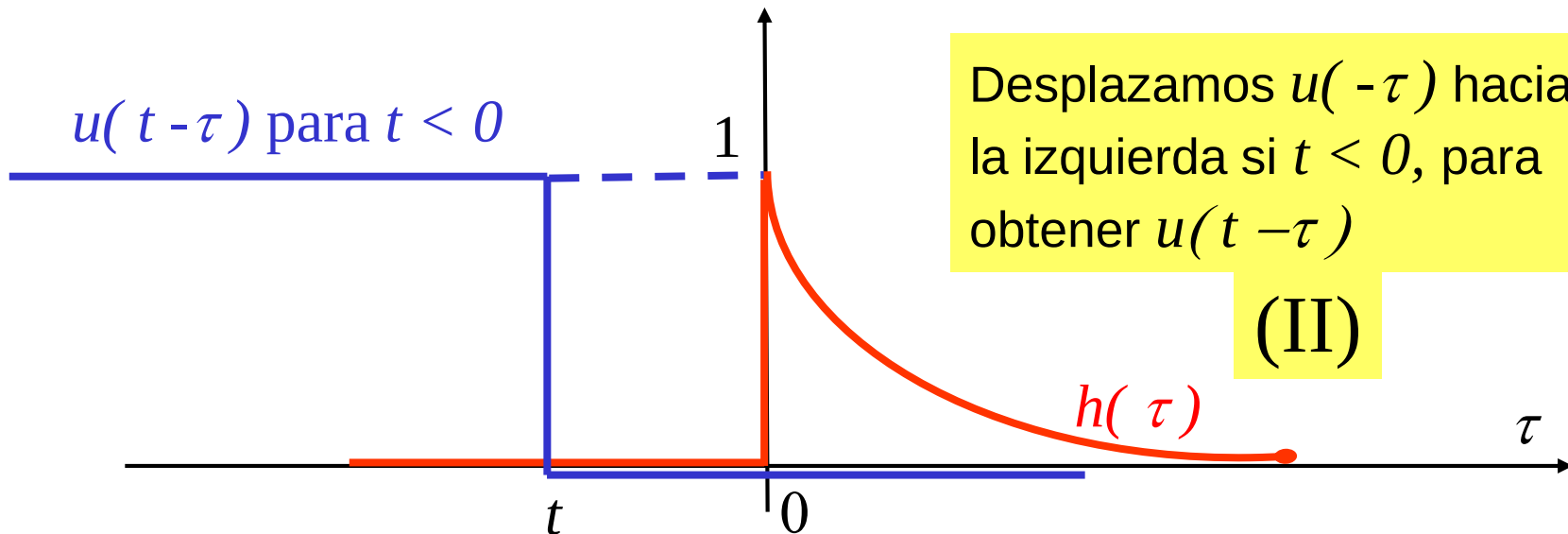
(I)



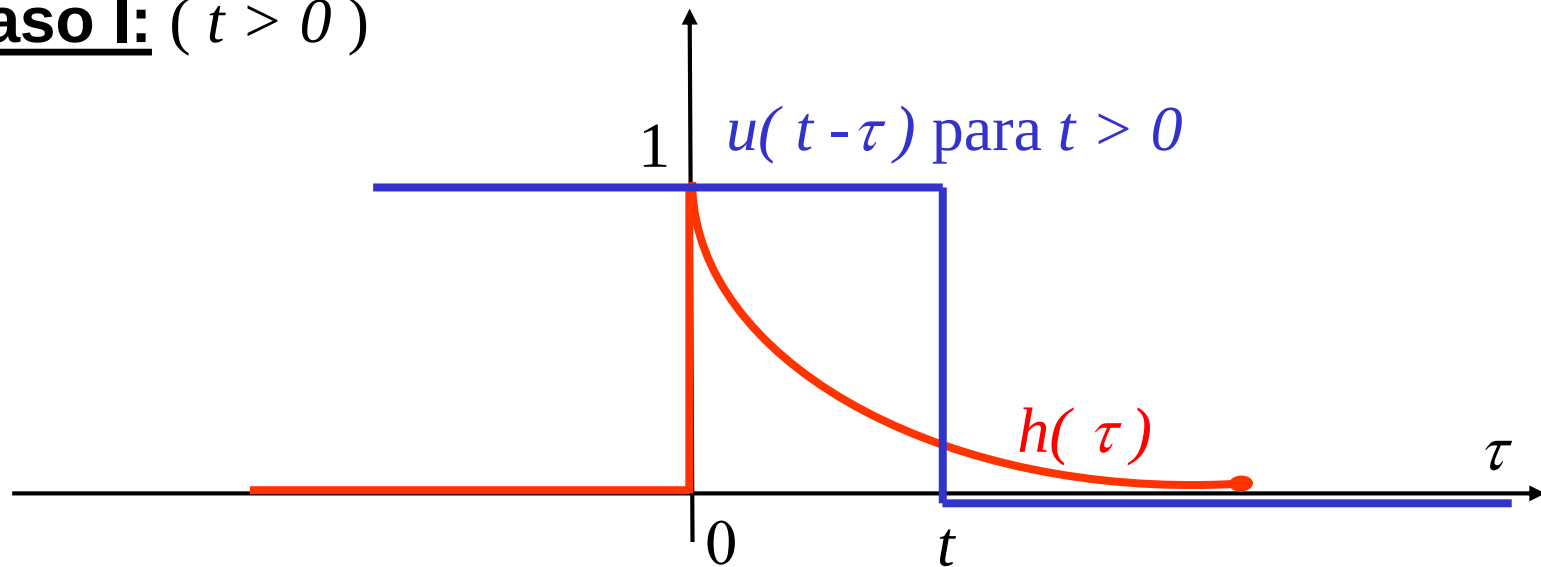
$u(t-\tau)$ para $t < 0$

Desplazamos $u(-\tau)$ hacia la izquierda si $t < 0$, para obtener $u(t-\tau)$

(II)



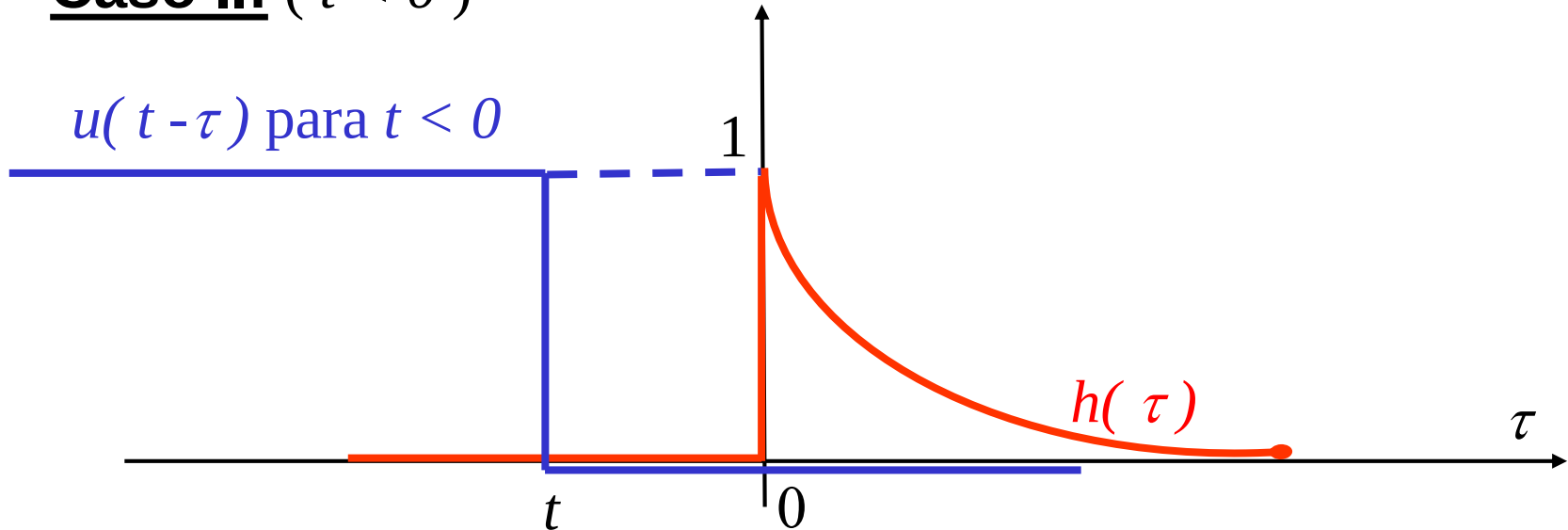
Caso I: ($t > 0$)



Vemos que la integral (1) resulta para este caso ($t > 0$) :

$$y(t) = \int_0^t e^{-\alpha\tau} d\tau = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \quad (2)$$

Caso II: ($t < 0$)



Vemos que la integral (1) resulta para este caso ($t < 0$) :

$$y(t) = \int_0^t 0 \, d\tau = 0 \quad (3)$$

Finalmente, considerando (2) y (3) podemos concluir que

$$y(t) = \frac{1}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha t} \right) \mu(t) \quad , \quad \forall t$$