

Sistemas y Señales I

Modelado de Sistemas usando Diagramas de Bloques

Temario: Cap. 1: Item 1.2.4

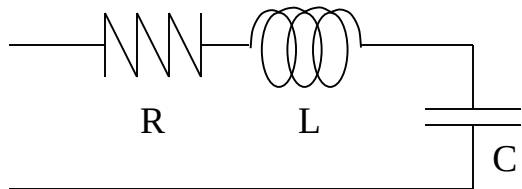
Sistemas a Parámetros Concentrados y a Parámetros Distribuidos

Parámetros Concentrados:

Las variables que parametrizan las relaciones constitutivas de los componentes del sistema se asumen independientes de coordenadas espaciales (los parámetros están **concentrados espacialmente**)

Ejemplo:

Modelo de un circuito eléctrico a bajas frecuencias:



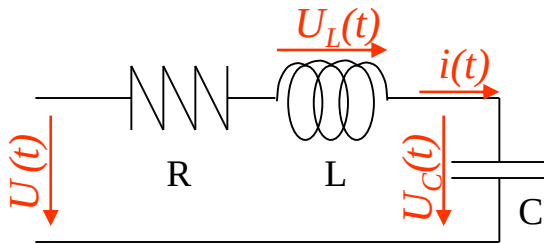
Los fenómenos resistivo, inductivo y capacitivo se concentran en un único elemento, R, L y C respectivamente.

Los sistemas LE a parámetros concentrados pueden ser modelados con Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) de la forma:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 \cdot y(t) = b_m \cdot u^{(m)}(t) + b_{m-1} \cdot u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_0 \cdot u(t)$$

donde $u(t)$ es la entrada del sistema e $y(t)$ la salida correspondiente.

Ej.: Circuito RLC



$$u(t) = R \cdot i(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

$$\text{donde: } u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} \text{ y } u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

$$u(t) = R \cdot \frac{dq(t)}{dt} + L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} q(t)$$

$$\ddot{q}(t) + \frac{R}{L} \dot{q}(t) + \frac{1}{LC} q(t) = \frac{1}{L} u(t)$$

Ecuación diferencial de 2do. orden en la carga $q(t)$ del capacitor

Parámetros Distribuidos:

Las variables que parametrizan las relaciones constitutivas están distribuidas espacialmente, es decir dependen también de coordenadas espaciales.

Ejemplo:

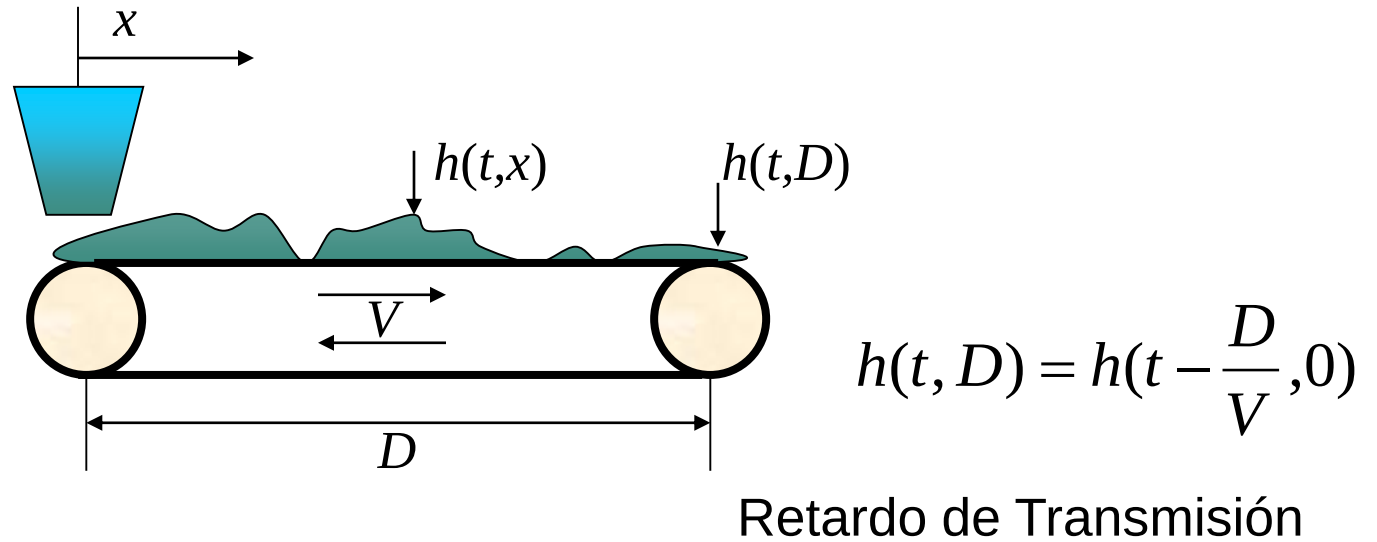
Línea de Transmisión: Fenómenos resistivo, capacitivo e inductivo distribuidos a lo largo de la línea.

Los sistemas a parámetros distribuidos pueden ser modelados por Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP)

Ejemplo 1: Ecuaciones de Maxwell de Teoría Electromagnética

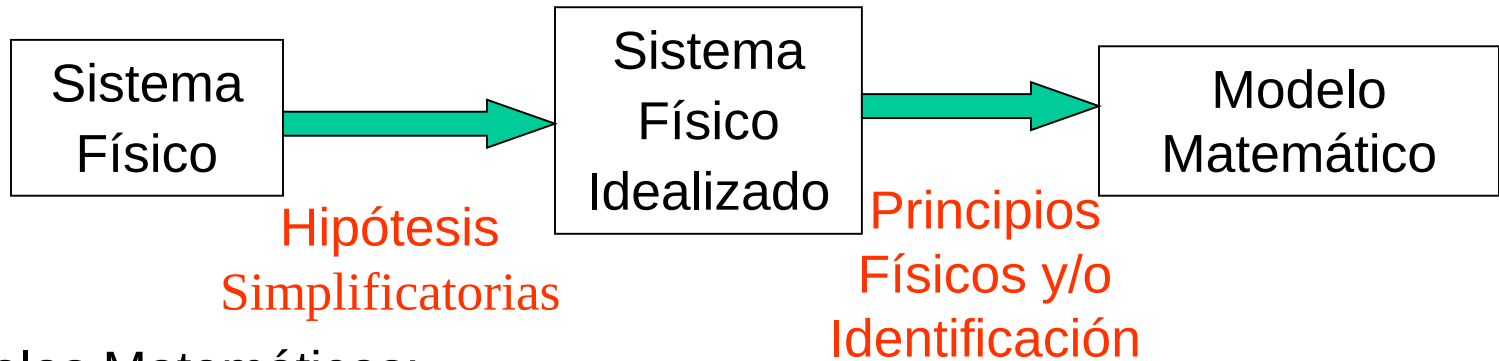
$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

Ejemplo 2:



La evolución de $h(t,x)$ es descrita por una EDP

Modelos de Sistemas Dinámicos



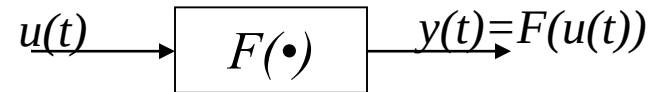
Modelos Matemáticos:

- Gráficos:
 - Diagramas de Bloques
 - Grafos
 - Diagramas de Flujo de Potencia (Bond Graphs)
- Análíticos:
 - EDO
 - EDP
 - Ecuaciones de Estado
 - Función Transferencia
 - Ecuaciones en Diferencias
- Computacionales: algoritmos

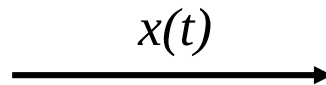
Modelado con Diagramas de Bloques

Elementos Constitutivos de un DB

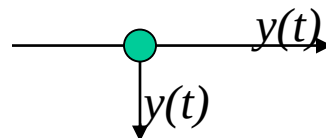
- **Bloques operacionales** caracterizados por la relación causal entrada/salida



- **Líneas de conexión** donde **viven** las variables. Tienen flechas que indican el flujo de información (señal) entre las distintas componentes del sistema.

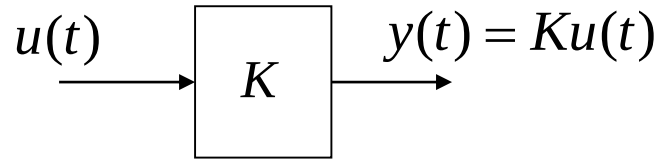


- **Puntos de Derivación**

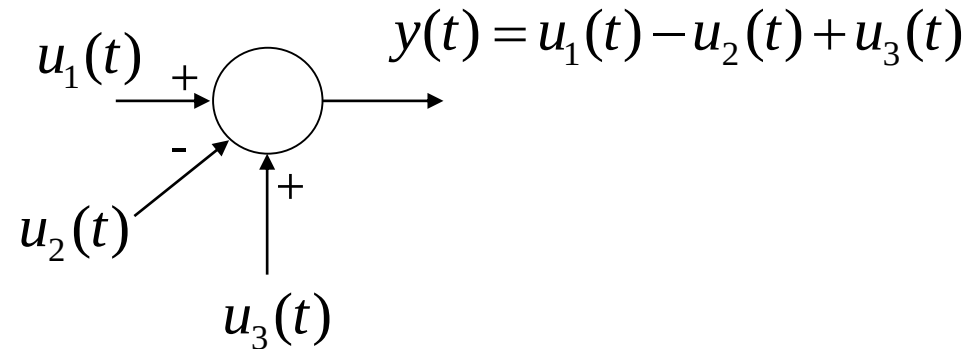


Bloques Operacionales más usados

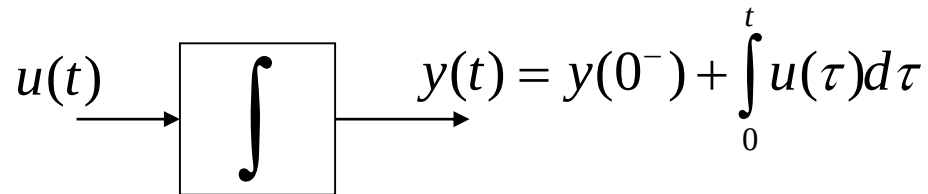
1. Bloque ganancia



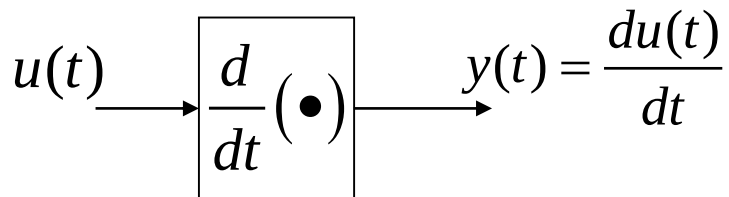
2. Bloque sumador



3. Bloque integrador



4. Bloque Derivador

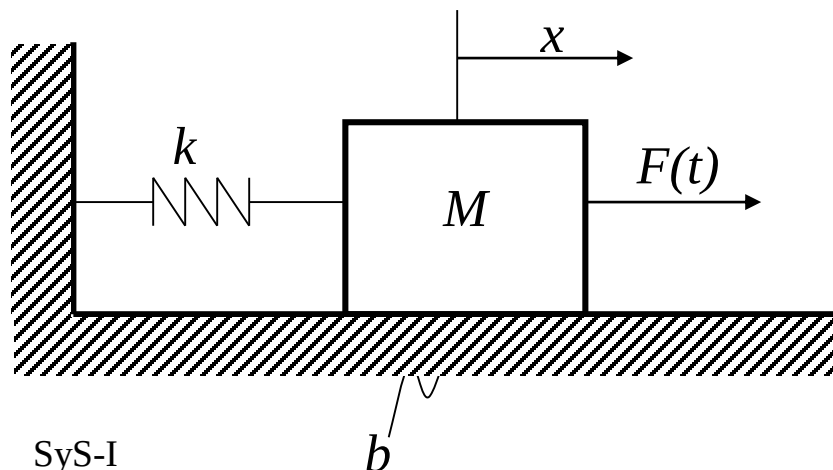


Ejemplo 1: Sistema Mecánico Traslacional

Para el modelado consideraremos las siguientes hipótesis simplificadoras:

- El resorte tiene un comportamiento lineal, es decir: $F_k = kx$
- El rozamiento estático es despreciable y solo hay rozamiento dinámico que se asume lineal, es decir: $F_b = b\dot{x}$
- El origen de coordenadas $x = 0$ corresponde a la posición de la masa en la que el resorte no está ni comprimido ni extendido

Recurriendo a la segunda Ley de Newton puede escribirse la siguiente ecuación diferencial en la posición x de la masa

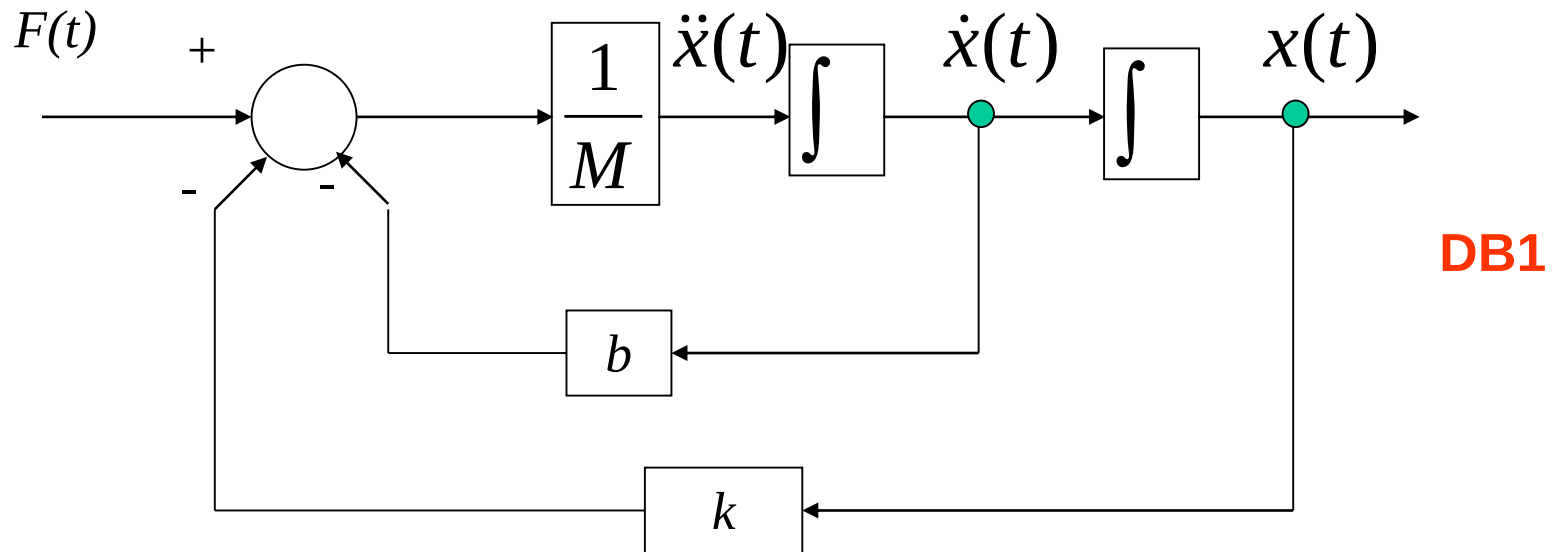


$$F(t) - k x(t) - b \dot{x}(t) = M \ddot{x}(t) \quad (1)$$

Se **causaliza** la EDO despejando la derivada de mayor orden de $x(t)$, y se obtiene

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{M} (F(t) - k.x(t) - b.\dot{x}(t)) \quad (2)$$

Luego, se lee causalmente (es decir el lado izquierdo de la ecuación se calcula como indica el lado derecho) para construir el Diagrama de Bloques, que resulta



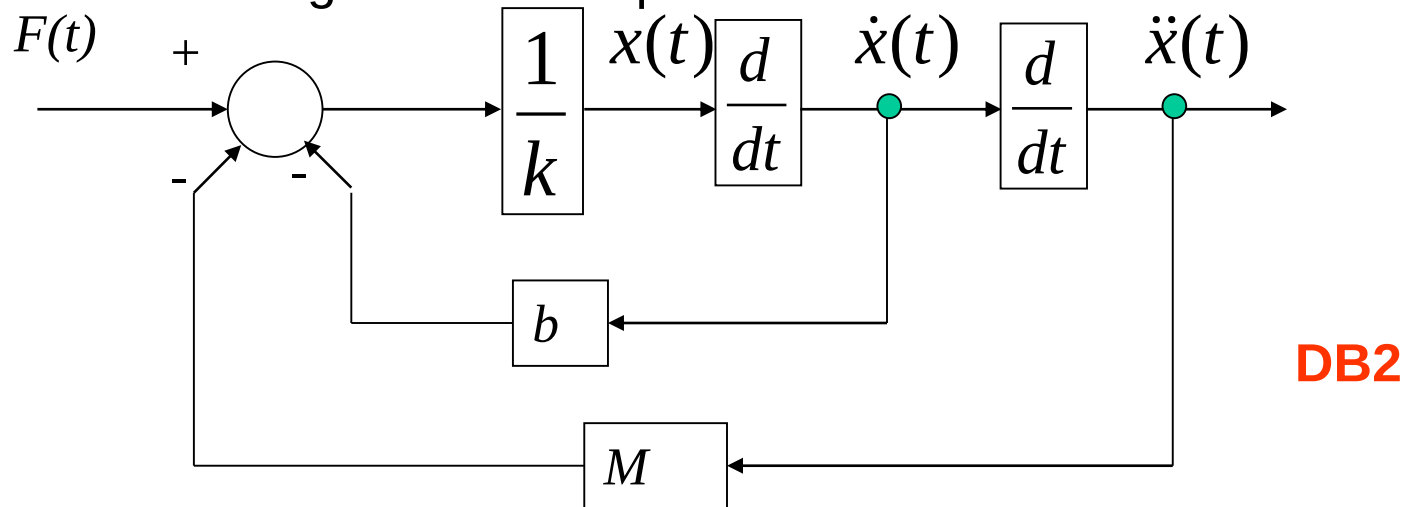
Notar que parándose en la línea de conexión asociada a $\ddot{x}(t)$ y mirando en sentido contrario al flujo de señal se puede leer la ecuación (2)

Otra posible forma de **causalización** de la EDO podría ser:

$$k.x(t) = F(t) - b.\dot{x}(t) - M.\ddot{x}(t)$$

$$x(t) = \frac{1}{k} (F(t) - b.\dot{x}(t) - M.\ddot{x}(t)) \quad (3)$$

que resulta en el diagrama de bloques



Los **DB1** y **DB2** son equivalentes, pero se **prefiere** un **DB sin derivadores** por:

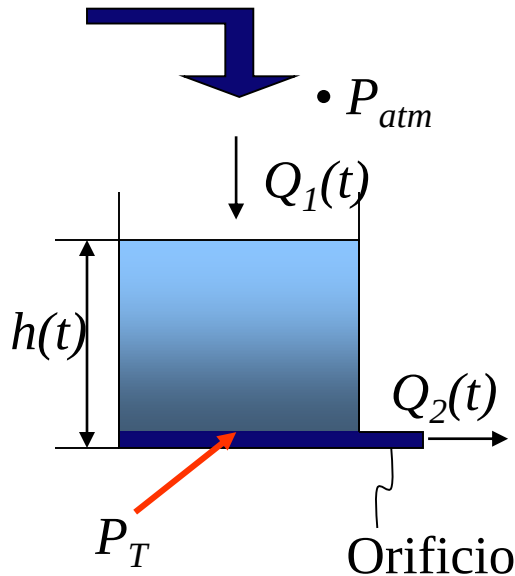
- Problemas de Implementación
- Relación Señal-Ruido del derivador **mala**: amplifica el ruido de alta frecuencia, lo que enmascara a la señal

En general, para obtener un diagrama de bloques sin derivadores, se causaliza la EDO de manera de despejar la derivada de mayor orden en la variable de salida de interés, y luego se lee esta ecuación en forma causal para construir el diagrama de bloques.

El número de integradores está asociado con el número de elementos **almacenadores de energía** del sistema. En el caso del ejemplo, los elementos almacenadores de energía son la **masa (inercia)** (energía cinética de movimiento) y el **resorte** (energía potencial elástica).

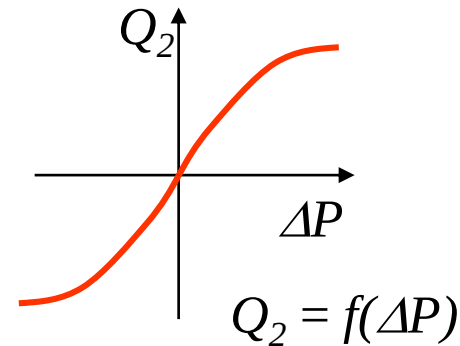
El número de integradores en el DB está también asociado con lo que se denomina **orden del modelo**. En el caso del ejemplo, el sistema resulta de **segundo orden**.

Ejemplo 2: Sistema Hidráulico



A: Area Transversal del tanque

Orificio: relación **no lineal** entre el flujo y la diferencia de presión



$$Q_1(t) - Q_2(t) = \frac{dVol}{dt}$$

Ecuación de Continuidad

$$Vol = A.h(t)$$

Volumen de Líquido

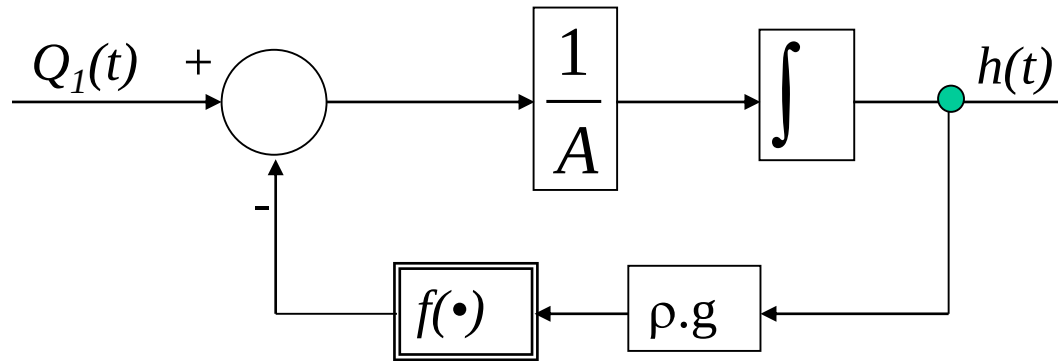
$$Q_1(t) - f(P_T - P_{atm}) = A.\dot{h}(t) \quad \text{Donde: } P_T - P_{atm} = \Delta P$$

$$P_T = \rho.g.h(t) + P_{atm}$$

de donde resulta:

$$\boxed{Q_1(t) - f(\rho.g.h(t)) = A.\dot{h}(t)} \Rightarrow \dot{h}(t) = \frac{1}{A} [Q_1(t) - f(\rho.g.h(t))]$$

Leyendo causalmente la ecuación (4) resulta el Diagrama de Bloques:



Notar que se ha representado al bloque **no lineal** con un **doble rectángulo** para diferenciarlo de los demás bloques que tienen una característica lineal.