Sistemas y Señales I

Estabilidad Entrada-Salida de Sistemas LE

Temario: Cap. 2: Item 2.5

Estabilidad de Sist. Lineales Estacionarios
BIBO Estabilidad

BIBO: Bounded Input – Bounded Output
(Entrada Acotada – Salida Acotada)

Definición: un sistema es **BIBO estable** si para toda entrada acotada la correspondiente salida es acotada.

- La definición es válida para cualquier sistema, no necesariamente lineal y estacionario.
- Es claro que no puede usarse la definición para probar si un sistema es BIBO estable, ya que deberíamos verificar que para las infinitas entradas acotadas posibles las correspondientes salidas son acotadas.

- Podemos, en cambio, usar la definición para probar que el sistema no es BIBO estable, ya que basta con encontrar una entrada acotada para la cual la correspondiente salida es no acotada.
- Para Sistemas Lineales Estacionarios, que quedan completamente representados por su respuesta al impulso, existe una condición necesaria y suficiente sobre la misma que garantiza la BIBO estabilidad del sistema.
- Consideraremos separadamente sistemas en tiempo continuo y sistemas en tiempo discreto.

1. Sistemas en Tiempo Continuo:

Teorema: La condición necesaria y suficiente para que un SLE caracterizado por su respuesta al impulso *h(t)* sea BIBO estable es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \qquad (1)$$

(**respuesta al impulso absolutamente integrable**)

Prueba: La respuesta del sistema a una entrada arbitraria viene dada por:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau) h(\tau) d\tau$$

Se tiene entonces que:

$$\left|y(t)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|u(t-\tau)\right| \left|h(\tau)\right| d\tau$$

Si la entrada es acotada entonces

$$\left|u(t-\tau)\right| \leq M < \infty$$

y resulta

$$\left|y(t)\right| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} \left|h(\tau)\right| d\tau$$

Luego, la salida es acotada siempre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|h(\tau)\right| d\tau < \infty$$

Esto prueba que (1) es una condición **suficiente**. Para probar que (1) es también una condición necesaria consideremos la entrada acotada

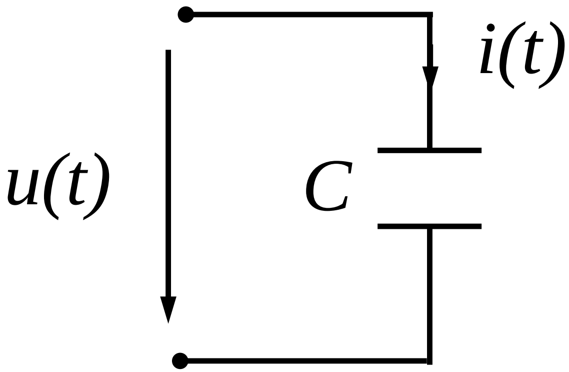
$$u(t-\tau)=sign(h(\tau))=\begin{cases} 1 & si \quad h(\tau)>0 \\ 0 & si \quad h(\tau)=0 \\ -1 & si \quad h(\tau)<0 \end{cases}$$

Para esto caso

$$\left|y(t)\right|=\left|\int_{-\infty}^{\infty} sign(h(\tau))h(\tau)\,d\tau\right|=\left|\int_{-\infty}^{\infty} \left|h(\tau)\right|d\tau\right|=\int_{-\infty}^{\infty} \left|h(\tau)\right|d\tau$$

y la salida será entonces no acotada si no se verifica (1). Concluimos que (1) es también una condición **necesaria** para la BIBO estabilidad del sistema.

Ejemplo 1:



$$C=\frac{q(t)}{u(t)}\Rightarrow q(t)=Cu(t)$$

$$i(t)=Cu'(t)\;\Rightarrow\; u(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

$i(t): entrada$

$u(t): salida$

La respuesta al impulso se obtiene para $i(t)=\delta(t)$, y resulta $u(t)=h(t)=\mu(t)/C$. Luego

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|h(\lambda)\right|d\lambda=\frac{1}{C}\int_0^{\infty}d\lambda\;\rightarrow\;\infty$$

que es no acotada $\Longrightarrow$ **No es BIBO estable**.

La función transferencia en este caso es: $H(s)=\dfrac{1}{sC}$

que tiene un polo en cero (**inestable**).

2. Sistemas en Tiempo Discreto:

Teorema: La condición necesaria y suficiente para que un SLE caracterizado por su respuesta al impulso $h(n)$ sea BIBO estable es:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \qquad (2)$$

(respuesta al impulso absolutamente sumable)

Prueba: La respuesta del sistema a una entrada arbitraria viene dada por la convolución:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k)$$

Se tiene entonces que:

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, u(n-k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|\, |u(n-k)|$$

Si la entrada es acotada, entonces

$$|u(n-k)| \leq M < \infty$$

y resulta

$$|y(n)| \leq M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

Luego, la salida es acotada siempre que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

Esto prueba que (2) es una condición **suficiente**. Para probar que (2) es también una condición necesaria consideremos la entrada acotada

$$u(n-k) = sign(h(k)) = \begin{cases} 1 & si \quad h(k) > 0 \\ 0 & si \quad h(k) = 0 \\ -1 & si \quad h(k) < 0 \end{cases}$$

Para esto caso

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} sign(h(k))h(k) \right| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \right| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

y la salida será entonces no acotada si no se verifica (2). Concluimos que (2) es también una condición **necesaria** para la BIBO estabilidad del sistema.

Ejemplo 2:

$$h(n) = a^n \mu(n)$$

Determinar el rango de valores de ‘a’ para tener BIBO estabilidad.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \left|a^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n$$

La serie converge a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|}$$

siempre que $|a| < 1$. En caso contrario, diverge.

Luego el sistema es BIBO estable si $|a| < 1$

Ejemplo 3: Sistema descrito por la ecuación en diferencias

$$y(n) = \frac{1}{2}\, y(n-1) \quad + \quad u(n) \tag{1}$$

Determinar si el sistema es estable.

Debemos hallar la respuesta al impulso del sistema a partir de condiciones iniciales nulas, es decir la respuesta a una entrada $u(n) = \delta(n)$. Para ello podemos iterar la ecuación en diferencias (1).

$$y(0) = \frac{1}{2}\, y(-1) + 1 = 1$$

$$y(1) = \frac{1}{2}\, y(0) + 0 = \frac{1}{2}$$

$$y(2) = \frac{1}{2}\, y(1) + 0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \mu(n) = a^n \mu(n) \quad , \quad a = \frac{1}{2}$$

Respuesta al impulso

Usando el resultado del Ejemplo 2, podemos concluir que el sistema (1) es BIBO estable, ya que verifica

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 < \infty$$

Estabilidad de SLE en tiempo continuo en el dominio transformado de Laplace

Hemos visto que los SLE quedan completamente caracterizados por su respuesta al impulso $h(t)$, o equivalentemente por su Función Transferencia $H(s) = L\{h(t)\}$, por lo que deberíamos poder encontrar condiciones sobre $H(s)$ que garanticen la BIBO estabilidad del sistema, así como lo hicimos para $h(t)$.

Veremos que esas condiciones son sobre la localización de los polos de la función transferencia en el plano complejo, y que la localización de los ceros en ese plano no afecta la BIBO estabilidad del sistema.

Estabilidad y localización de polos de la FT

Consideremos un SLE con FT de la forma

$$H(s) = K\,\frac{s^m + b_{m-1}\,s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}\,s^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Buscamos condiciones sobre la localización de los polos de $H(s)$ en el plano complejo que aseguren la BIBO estabilidad del sistema.

- Si imponemos la condición de BIBO estabilidad entonces debe ser: $m \leq n \quad (FT\ propia)$, ya que si este no fuera el caso, efectuando el cociente de polinomios $N(s)/D(s)$, tendríamos

$$H(s) = c_{m-n}\, s^{m-n} + \cdots + c_1 s + c_0 + \frac{\tilde{N}(s)}{D(s)}$$

por lo que si aplicamos una entrada acotada, por ejemplo un escalón

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

la correspondiente respuesta tendrá un término c_1, que corresponde a $c_1\,\delta(t)$ en el dominio temporal, que no es acotada.

- Asumimos entonces que $H(s)$ es propia y la expresamos como

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K\,\frac{\prod_{\ell=1}^{m} (s - z_\ell)}{\prod_{\ell=1}^{n} (s - p_\ell)} \quad ; m \le n$$

donde por simplicidad hemos supuesto que los polos son reales y simples. La respuesta del sistema a un escalón unitario

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

será

$$Y(s) = \frac{K}{s} \frac{\prod_{\ell=1}^{m} (s - z_\ell)}{\prod_{\ell=1}^{n} (s - p_\ell)}$$

Expandiendo en fracciones simples se obtiene

$$Y(s) = \frac{K_0}{s} + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{K_\ell}{s - p_\ell}$$

donde

$$K_0 = \lim_{s \to 0} sY(s)$$

y

$$K_\ell = \lim_{s \to p_\ell} \left(s - p_\ell\right) Y(s) \qquad \ell = 1, \ldots, n$$

Tomando la Transformada de Laplace Inversa se obtiene:

$$y(t) = \left[K_0 + \sum_{\ell=1}^{n} K_\ell \, e^{p_\ell t} \right] \mu(t)$$

Vemos que para que la salida permanezca acotada los polos p_ℓ deberán ser negativos (de manera de tener exponenciales decrecientes)..

• Si consideramos ahora la posibilidad de tener polos complejos, los mismos deberán aparecer como **pares de polos complejos conjugados**.

La respuesta del sistema a un escalón unitario será ahora de la forma:

$$y(t) = K_0 + \sum_{\ell=1}^{r} K_\ell e^{p_\ell t} +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{q} \left[K_{1\ell} e^{\sigma_\ell t} \cos\omega_\ell t + K_{2\ell} e^{\sigma_\ell t} \sin\omega_\ell t \right]$$

donde hemos supuesto que hay 'r' polos reales simples y 'q' pares de polos complejos conjugados simples ($\sigma_\ell \pm j\omega_\ell$).

En este caso vemos que para que la salida permanezca acotada debe ser:

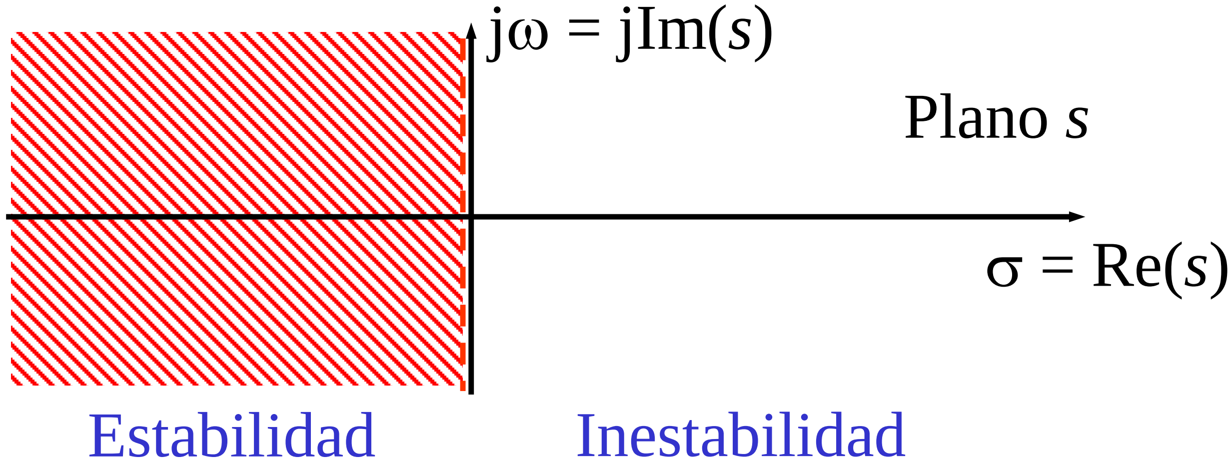
$$p_\ell < 0 \qquad \text{polos reales negativos}$$

$$\sigma_\ell < 0 \qquad \text{polos complejos conjugados}$$

$$\text{con parte real negativa}$$

- Un razonamiento similar se puede hacer para el caso de tener polos (reales y/o complejos) con multiplicidad.

•En conclusión: **Una condición necesaria y suficiente para la BIBO Estabilidad de un SLE es que la función transferencia sea propia y que los polos estén en el semiplano izquierdo abierto (polos con parte real negativa, $\Re e\{ p_\ell \} < 0$)**



La ubicación de los ceros no afecta la BIBO estabilidad del sistema. Se denominan

- sistemas **mínima fase** → todos sus ceros en el semiplano izquierdo
- sistemas **no mínima fase** → al menos un cero en el semiplano derecho. Se caracterizan por el hecho de que la respuesta a una excitación tiende a evolucionar en sentido contrario a la misma.

Ejemplo: Sistema de No mínima fase

$$G(s)=\frac{-s+1}{s^2+5s+6}$$

Cero: c1=1 ; Polos: p1 = -2 , p2 = -3

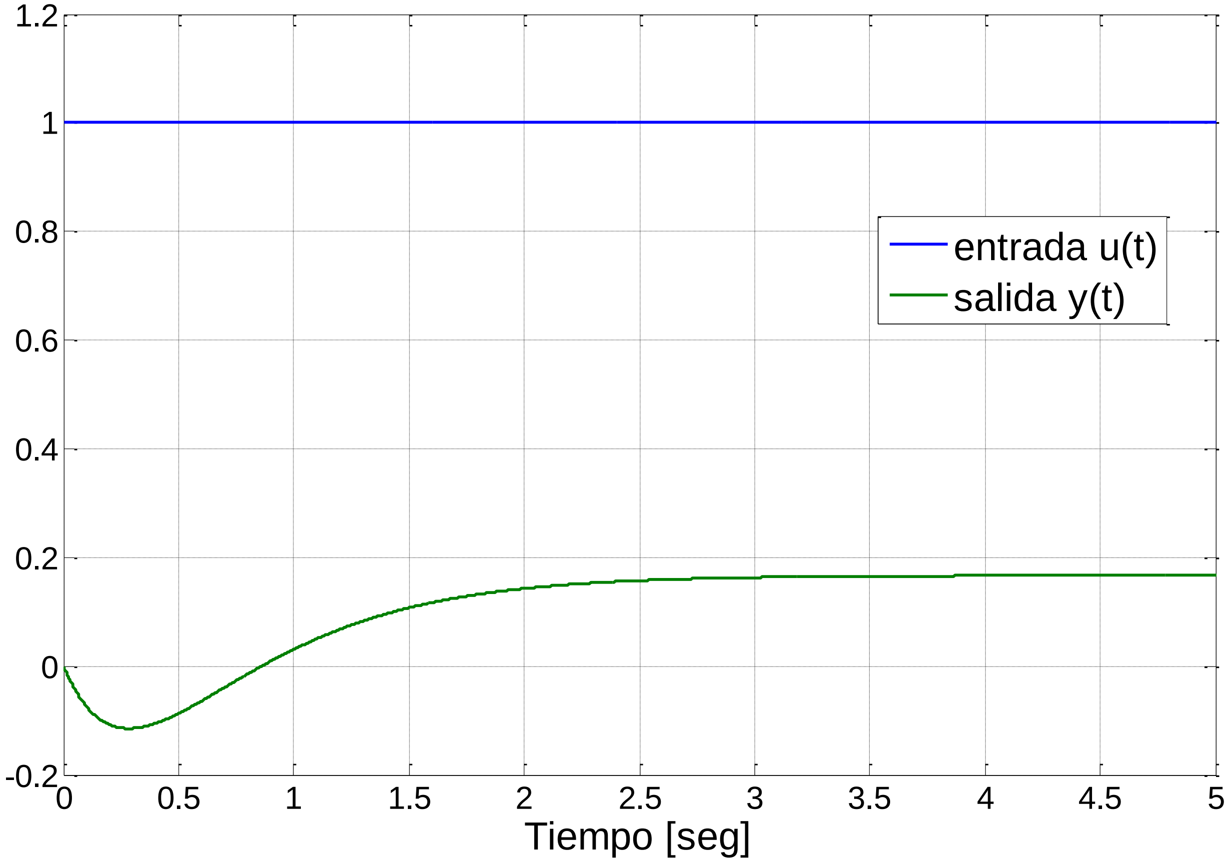


Diagrama de polos y ceros

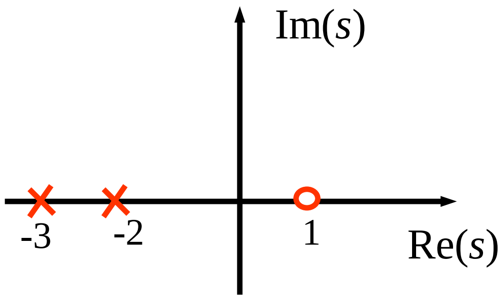


Fig.1: Respuesta al escalón

<u>Ejemplo:</u> Péndulo Invertido (No Mínima Fase)