Sistemas y Señales I

Criterios algebraicos de estabilidad
Criterio de Routh

Temario: **Cap. 3: Item 3.4.2**

Criterios Algebraicos de Estabilidad para SLE en TC

Probamos que la **condición necesaria y suficiente** para que un SLE en TC representado por su función transferencia, sea **BIBO estable**, es que la función transferencia sea **propia** y tenga todos sus **polos en el semiplano izquierdo abierto** ($\Re\mathrm{e}\{p_\ell\} < 0$).

La forma de verificar la estabilidad de un sistema consiste entonces en calcular las raíces del polinomio denominador de la FT. Esto es relativamente fácil si uno dispone de un software como Matlab.

Por ejemplo, si el polinomio denominador es

$$D(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

los comandos Matlab que permiten calcular las raíces son

```
>> d = [1, 6, 11, 6];
>> polos = roots(d);
>> polos
   polos =
              -3.0000
              -2.0000
              -1.0000
```

Surge el interrogante de si existirá alguna condición sobre los **coeficientes** del polinomio denominador de la función transferencia que asegure que sus raíces (es decir, los polos de la FT) estén todas en el semiplano izquierdo abierto, es decir que asegure que el sistema sea estable, **sin necesidad de calcular las raíces**.

De hecho esta condición existe y es conocida como **Criterio de Estabilidad de Routh**.

Si bien el criterio es del siglo 19, cuando no existía Matlab, es todavía de utilidad para determinar el rango de valores de coeficientes del polinomio que aseguran la estabilidad, cuando estos coeficientes están en forma simbólica.

Supongamos que el polinomio denominador de la FT de un SLE está dado por:

$$D(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

donde sin pérdida de generalidad asumimos que el polinomio es **mónico** (coeficiente del término de mayor grado en s, unitario).

Probamos que una condición necesaria para la estabilidad es que todas las raíces de $D(s)$ tengan parte real negativa. Esto requiere que todos los coeficientes $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ sean positivos (esto es fácil de probar expresando el polinomio como producto de términos de primero y segundo orden).

Condición necesaria de estabilidad de Routh: Una condición necesaria (pero no suficiente) de estabilidad es que todos los coeficientes del polinomio $D(s)$ sean positivos.

Polinomio completo + coeficientes mismo signo

Si alguno de los coeficientes es cero o negativo entonces el sistema tendrá polos en el semiplano derecho (inestables).

Routh (1874) y Hurwitz (1895) probaron que una **condición necesaria y suficiente** para estabilidad es que todos los elementos de la primer columna de la tabla de Routh sean positivos. La tabla es un arreglo triangular que se construye a partir de los coeficientes.

Condición necesaria y suficiente de estabilidad de Routh: Un sistema es estable si y sólo si todos los elementos de la primer columna de la Tabla de Routh son positivos.

Tabla de Routh

$$
\begin{array}{cccccc}
n & s^n : & 1 & a_2 & a_4 & \cdots \\
n-1 & s^{n-1} : & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
n-2 & s^{n-2} : & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
n-3 & s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
2 & s^2 : & * & * & & \\
1 & s : & * & & & \\
0 & s^0 : & * & & &
\end{array}
$$

$$b_1 = -\frac{\det\begin{bmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix}}{a_1} \qquad b_2 = -\frac{\det\begin{bmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{bmatrix}}{a_1}$$

$$b_3 = -\frac{\det\begin{bmatrix} 1 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{bmatrix}}{a_1} \qquad c_1 = -\frac{\det\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}}{b_1}$$

$$c_2 = -\frac{\det\begin{bmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}}{b_1} \qquad c_3 = -\frac{\det\begin{bmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{bmatrix}}{b_1}$$

Normalmente hay $n+1$ elementos en la primer columna de la Tabla de Routh. Si todos los elementos de la primer columna son positivos, entonces todas las raíces de $D(s)$ están en el semiplano izquierdo y por lo tanto el sistema es estable. Si los elementos de la primer columna no son todos positivos, entonces el número de raíces en el semiplano derecho (*i.e.,* polos inestables) es igual al número de cambios de signo en la primer columna. Por ejemplo, si se tiene +,-,+,+ , corresponde a dos cambios de signo, y por lo tanto habrá dos raíces en el semiplano derecho.

Ejemplo 1

$$D(s) = s^6 + 4s^5 + 3s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 4$$

Tiene raíces en $\left\{ -3.2644, \underbrace{0.7797 \pm 0.7488i}_{\text{inestables}}, -0.6046 \pm 0.9935i, -0.8858 \right\}$

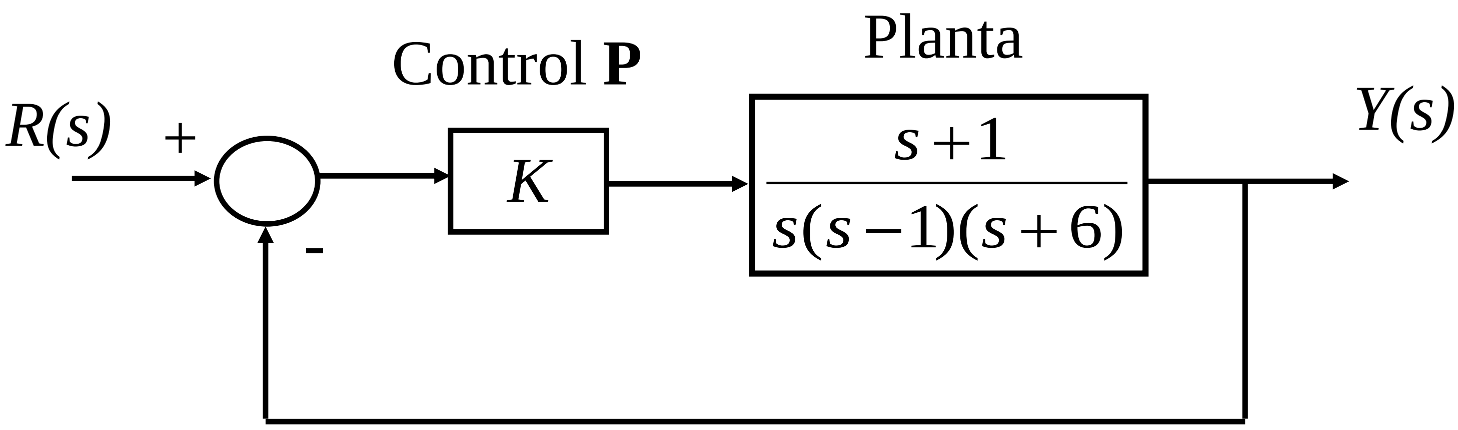
Tabla de Routh

$$
\begin{array}{lllllll}
 & s^6: & 1 & 3 & 1 & 4 \\
 & s^5: & 4 & 2 & 4 & 0 \\
 & s^4: & \frac{5}{2} & 0 & 4 & \\
 & s^3: & 2 & -\frac{12}{5} & 0 & \\
 & s^2: & 3 & 4 & & \\
1 & s: & -\frac{76}{15} & 0 & & \\
2 & s^0: & 4 & & &
\end{array}
$$

Hay dos cambios de signo en la primer columna, por lo tanto *D(s)* tiene dos raíces en el semiplano derecho (inestables).

Estabilidad vs. Rango de parámetros

El criterio de Routh es útil para determinar el rango de ganancias del controlador que aseguran la estabilidad de un sistema retroalimentado. Por ejemplo:



La función transferencia en lazo cerrado resulta:

$$G_{LC}(s)=\frac{K(s+1)}{s^3+5s^2+(K-6)s+K}$$

Notar que la planta en lazo abierto es **inestable** (tiene polos inestables en 0 y 1). La tabla de Routh resulta

$$
\begin{array}{llll}
s^3: & 1 & (K-6) \\
s^2: & 5 & K \\
s: & (4K-30)/5 & \\
s^0: & K &
\end{array}
$$

Para que el sistema sea estable debe ser

$$\frac{4K-30}{5} > 0 \quad \text{y} \quad K > 0$$

Es decir

$$K > 7.5 \quad \text{y} \quad K > 0 \quad \Rightarrow \quad K > 7.5$$

Criterio de Routh – Caso Especial 1

Si el **primer elemento en una de las filas de la tabla de Routh es cero**, el procedimiento para determinar la estabilidad debe modificarse, reemplazando el cero por una $\varepsilon > 0$ constante pequeña que luego se hace tender a cero.

Ejemplo: Sea el polinomio $D(s) = s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 6s + 9$

$$
\begin{array}{llll}
s^5 & 1 & 2 & 6 \\
s^4 & 3 & 6 & 9 \\
s^3 & 0 & 3 & 0 \\
s^3 & \varepsilon & 3 & 0 \\
s^2 & \dfrac{6\varepsilon - 9}{\varepsilon} & 9 & 0 \\
s & \dfrac{9\varepsilon - 3\dfrac{6\varepsilon - 9}{\varepsilon}}{-\dfrac{6\varepsilon - 9}{\varepsilon}} & 0 & 0 \\
s^0 & 9 & 0 &
\end{array}
$$

Nueva fila

Reemplazo 0 por ε

Vemos que cuando ε tiende a cero hay dos cambios de signo en la primer columna, por lo que $D(s)$ tiene dos raíces en el semiplano derecho (inestables). En efecto, las raíces son

$$\left\{-2.9043, \underbrace{0.6567 \pm 1.2881i}_{\text{inestables}}, -0.7046 \pm 0.9929i\right\}$$

Criterio de Routh – Caso Especial 2

Otro caso especial ocurre cuando **toda una fila de la tabla de Routh es cero**. Esto indica que hay raíces complejas conjugadas sobre el eje imaginario. Si la *i*-ésima fila es cero, se forma un polinomio auxiliar con los coeficientes de la fila anterior, y se reemplaza la fila de ceros por los coeficientes de la derivada del polinomio auxiliar, y se completa la tabla.

Ejemplo: $D(s) = s^5 + 5s^4 + 11s^3 + 23s^2 + 28s + 12$

s^5	1	11	28
s^4	5	23	12
s^3	6.4	25.6	0
s^2	3	12	
s	0	0	
s	6	0	
s^0	12		

polinomio auxiliar

$$a_1(s) = 3s^2 + 12 \longrightarrow s = \pm 2i$$

$$\frac{da_1(s)}{ds} = 6s$$

Vemos que los coeficientes de la primer columna son todos positivos, sin embargo, como las raices del polinomio auxiliar $s = \pm 2i$ son tambien raíces del polinomio original, y están sobre el eje imaginario, el sistema es **inestable**.