Sistemas y Señales I

Análisis Frecuencial de Señales en Tiempo Continuo

Temario: Cap. 6: Items 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5

Serie de Fourier de Señales Periódicas en TC

Si $x(t)$ es periódica y satisface las **condiciones de Dirichlet**:

- $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en un período.
- $x(t)$ contiene un número finito de máximos y mínimos en un período.
- $x(t)$ es absolutamente integrable en un período

$$\int_{T_P} |x(t)|\, dt < \infty$$

Entonces $x(t)$ puede ser representada por la **serie de Fourier**

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \; e^{j2\pi k F_0 t}} \qquad (1)$$

La serie converge a $x(t)$ para todo t, excepto para los valores de t para los cuales $x(t)$ es discontinua, en cuyo caso converge al valor medio de la discontinuidad.

c_k : coeficientes de Fourier.

F_0 : frecuencia fundamental

La señal $x(t)$ se expresa como la combinación lineal de (en general infinitas) componentes senoidales de frecuencias múltiplos de la frecuencia fundamental F_0 .

Los coeficientes de Fourier se computan como

$$\boxed{c_k = \frac{1}{T_P} \int_{T_P} x(t)\, e^{-j2\pi k F_0 t}\, dt} \qquad (2)$$

En general, los coeficientes c_k son complejos. Si la señal periódica es a valores reales, entonces:

$$c_k = c_{-k}^*$$

donde $(.)^*$ indica complejo conjugado. Escribiendo:

$$c_k = |\, c_k \,|\, e^{j\,\theta_k}$$

resulta

$$c_{-k} = |\, c_k \,|\, e^{-j\,\theta_k}$$

La forma real de la Serie de Fourier resulta:

$$\boxed{x(t) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cos(2\pi k F_0 t + \theta_k)} \qquad (3)$$

Donde $c_0 \in \Re$.

Otra expresión de la serie de Fourier es

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(2\pi k F_0 t) - b_k \sin(2\pi k F_0 t) \right)} \qquad (4)$$

con $a_0 = c_0$

$a_k = 2\ |\ c_k\ |\ \cos\ \theta_k$

$b_k = 2\ |\ c_k\ |\ \sin\ \theta_k$

Espectro de Densidad de Potencia de Señales Periódicas

Una señal periódica tiene energía infinita y potencia media finita:

$$P_x = \frac{1}{T_P} \int_{T_P} |x(t)|^2 \; dt$$

$$= \frac{1}{T_P} \int_{T_P} x(t)\, x^*(t) \; dt$$

Usando (1)

$$= \frac{1}{T_P} \int_{T_P} x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* \; e^{-j2\pi k F_0 t} \; dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* \underbrace{\left[\frac{1}{T_P} \int_{T_P} x(t) \; e^{-j2\pi k F_0 t} \; dt \right]}_{c_k}$$

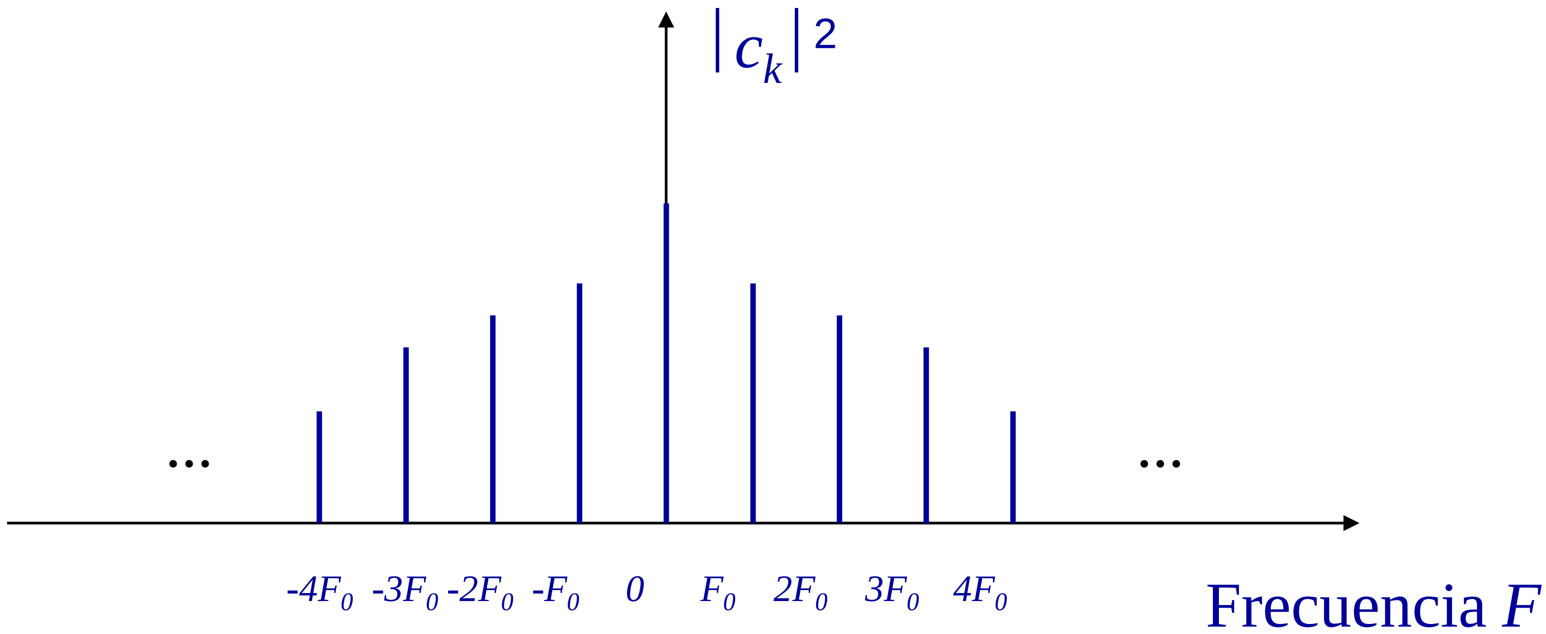
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Hemos establecido la relación:

$$\boxed{P_x = \frac{1}{T_P} \int_{T_P} |x(t)|^2 \; dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2} \qquad (5)$$

que es la llamada **Identidad de Parseval**. Si graficamos $|c_k|^2$ en función de las frecuencias kF_0, con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, el diagrama obtenido muestra como la potencia de la señal periódica está distribuida entre las diferentes componentes armónicas.

El diagrama se denomina **Espectro de densidad de Potencia** de la señal periódica $x(t)$.



Como la potencia de una señal periódica existe sólo para valores discretos de frecuencias $F = 0, \pm F_0, \pm 2F_0, \ldots$ se dice que la señal tiene un **espectro de líneas**.

También se puede graficar

$|c_k|$ vs. F $\longrightarrow$ **Espectro de magnitud**

θ_k vs. F $\longrightarrow$ **Espectro de fase**

Si la señal periódica es real, entonces

$$c_{-k} = c_k^* \quad \Rightarrow \quad |c_k|^2 = |c_{-k}|^2$$

Y el espectro es simétrico respecto al eje de ordenadas, es decir, es representado por una función par. El espectro de amplitud es también una función par y el de fase una función impar.

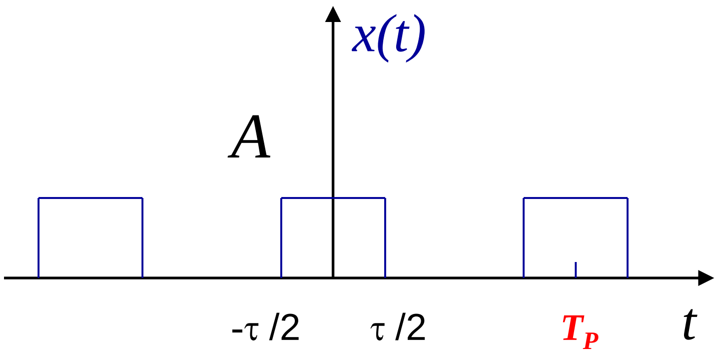
La potencia media total resulta

$$P_x = {c_0}^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$$

$$= {a_0}^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left({a_k}^2 + {b_k}^2\right)$$

Ejemplo

Tren de pulsos rectangulares



$x(t)$ es periódica con período T_P

τ : período activo del pulso

$\dfrac{\tau}{T_p}$ ciclo de trabajo (**duty cycle**)

Para $k = 0$ (**componente de contínua**)

$$\boxed{c_0 =} \frac{1}{T_P}\int_{-T_P/2}^{T_P/2} x(t)\ dt = \frac{1}{T_P}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A\ dt = \boxed{\frac{A\tau}{T_P}}$$

Para $k \neq 0$ tenemos

$$c_k = \frac{1}{T_P} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \; e^{-j2\pi k F_0 t} dt$$

$$= \frac{A}{T_P} \left. \frac{e^{-j2\pi k F_0 t}}{-j2\pi k F_0} \right|_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

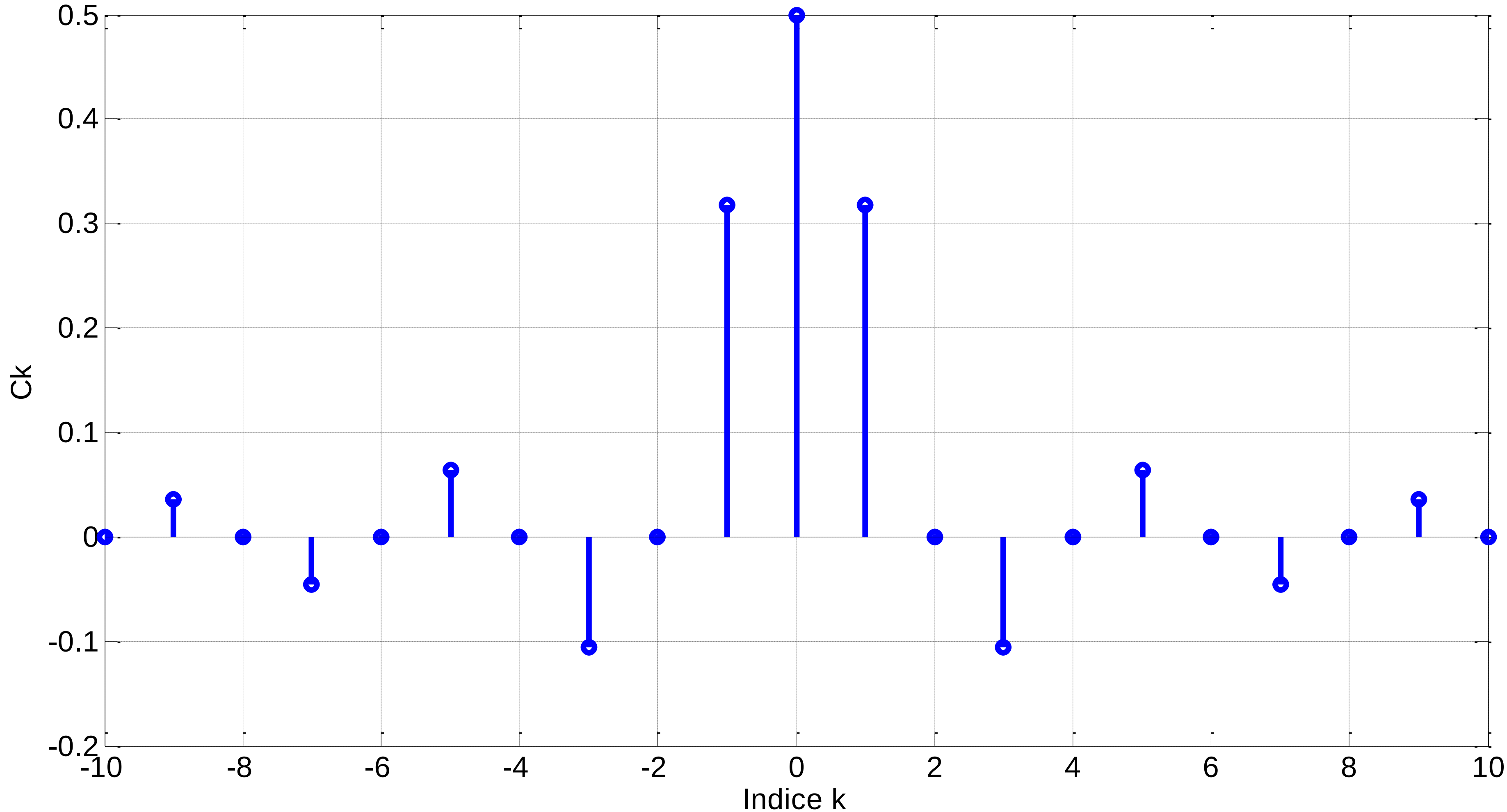
$$= \frac{A}{\pi F_0 k T_P} \frac{e^{j\pi k F_0 \tau} - e^{-j\pi k F_0 \tau}}{j2}$$

$$c_k = \frac{A\tau}{T_P}\frac{\sin \pi k F_0 \tau}{\pi k F_0 \tau} \qquad\qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$x(t)$: función par $\longrightarrow$ c_k reales

El espectro de densidad de potencia es:

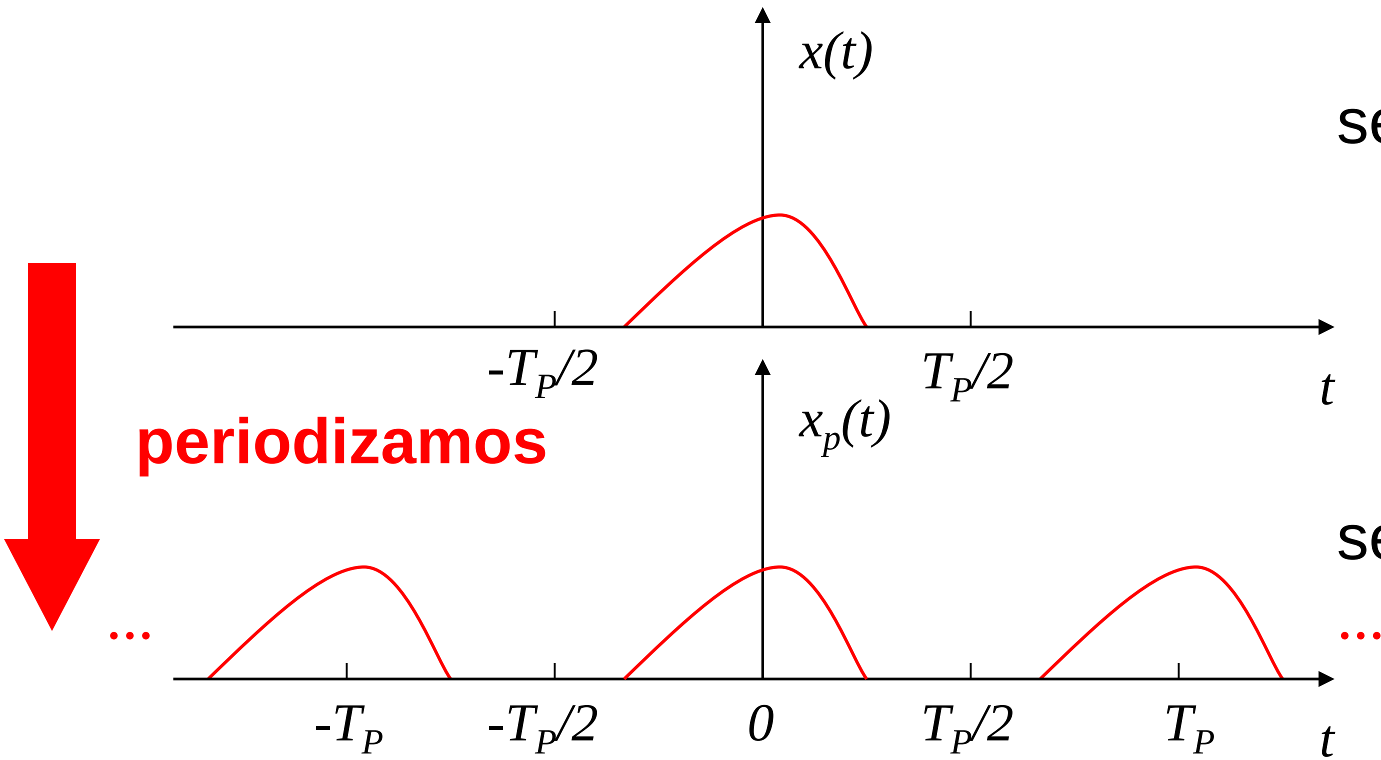
$$|c_k|^2 = \begin{cases} \left(\dfrac{A\tau}{T_P}\right)^2 & k = 0 \\ \left(\dfrac{A\tau}{T_P}\right)^2 \left(\dfrac{\sin \pi k F_0 \tau}{\pi k F_0 \tau}\right)^2 & k = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$



Coeficientes de Fourier para $A=1,\ T_p=1\ ,\ \tau=0.5\ ,\ F_0=\dfrac{1}{T_p}=1$

Transformada de Fourier de Señales Aperiódicas en TC

Sea $x(t)$ una señal aperiódica. Derivaremos la expresión de la Transformada de Fourier en forma constructiva.



señal aperiódica

señal “periodizada”

$$\boxed{x(t) = \lim_{T_P \to \infty} x_P(t)}$$

$$\begin{array}{ccc} x_P(t) & \longrightarrow & x(t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Espectro de líneas} & \longrightarrow & \text{Espectro continuo} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Señal de Potencia} & \longrightarrow & \text{Señal de Energía} \end{array}$$

Tenemos

$$x_P(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \; e^{j2\pi k F_0 t} \quad , \quad F_0 = \frac{1}{T_P}$$

donde:

$$c_k = \frac{1}{T_P} \int_{-T_P/2}^{T_P/2} x_P(t) \; e^{-j2\pi k F_0 t} dt$$

Luego, como $x_P(t) = x(t)$ para $-T_P/2 \leq t \leq T_P/2$, entonces:

$$c_k = \frac{1}{T_P} \int_{-T_P/2}^{T_P/2} x(t) \; e^{-j2\pi k F_0 t} dt$$

Además, como $x(t) = 0$ para $|t| > T_P/2$, entonces podemos escribir:

$$c_k = \frac{1}{T_P}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\;\; e^{-j2\pi k F_0 t} dt \qquad (6)$$

Definamos ahora una función $X(F)$, llamada ***Transformada de Fourier*** de $x(t)$, como

$$\boxed{X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\;\; e^{-j2\pi F t} dt} \qquad (7)$$

Vemos que $X(F)$ es función de la variable continua F y no depende de T_P o F_0.

De (6) y (7) vemos que

$$T_P\, c_k = X\left(k\, F_0\right) = X\left(\frac{k}{T_P}\right) \qquad (8)$$

Es decir que los coeficientes de Fourier son muestras de $X(F)$ tomadas en múltiplos de F_0 y escaladas también por F_0.

Resulta entonces:

$$x_P(t) = \frac{1}{T_P} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T_P}\right) e^{j2\pi k F_0 t}$$

Definiendo $\qquad \Delta F = \dfrac{1}{T_P} = F_0$

resulta:

$$x_P(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(k\,\Delta F\right) e^{j2\pi k\,\Delta F t}\;\Delta F$$

En el límite cuando $T_P \longrightarrow \infty$

$$x_P(t) \longrightarrow x(t)$$

$$\Delta F \longrightarrow dF$$

y

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\quad\right]\Delta F \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\left[\quad\right]dF$$

Es decir:

$$\lim_{T_P \to \infty} x_P(t) = x(t) = \lim_{\Delta F \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\,\Delta F)\, e^{j2\pi k \Delta F t}\, \Delta F$$

con lo cual

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F)\, e^{j2\pi F t}\, dF} \qquad (9)$$

que es la llamada ***Transformada Inversa de Fourier***.

Definiendo $\Omega = 2\pi F \Rightarrow dF = d\Omega/2\pi$, y por lo tanto los pares transformados de Fourier en función de Ω resultan:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega} \qquad (10)$$

$$\boxed{X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt} \qquad (11)$$

Las condiciones suficientes para la existencia de la ***Transformada de Fourier*** son las llamadas **condiciones de *Dirichlet***:

1. $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades finitas
2. $x(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos
3. $x(t)$ es absolutamente integrable

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$$

Teorema de modulación de la Transformada de Fourier

Sea $x(t)$ una señal de energía finita y $X(\Omega)$ su correspondiente Transformada de Fourier. Entonces:

$$F\left\{x(t)\cos\left(\Omega_0 t\right)\right\} = \frac{1}{2}\left[X\left(\Omega-\Omega_0\right)+X\left(\Omega+\Omega_0\right)\right]$$

Prueba:

$$F\left\{x(t)\cos\left(\Omega_0 t\right)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos\left(\Omega_0 t\right)e^{-j\Omega t}dt$$

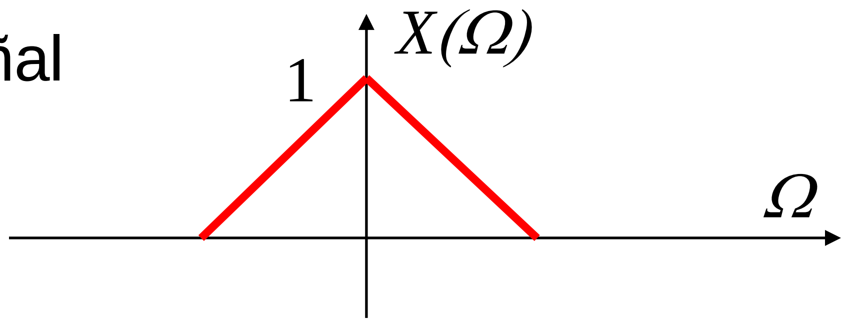
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega_0 t}e^{-j\Omega t}dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\Omega_0 t}e^{-j\Omega t}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\left(\Omega+\Omega_0\right)t}dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\left(\Omega-\Omega_0\right)t}dt$$

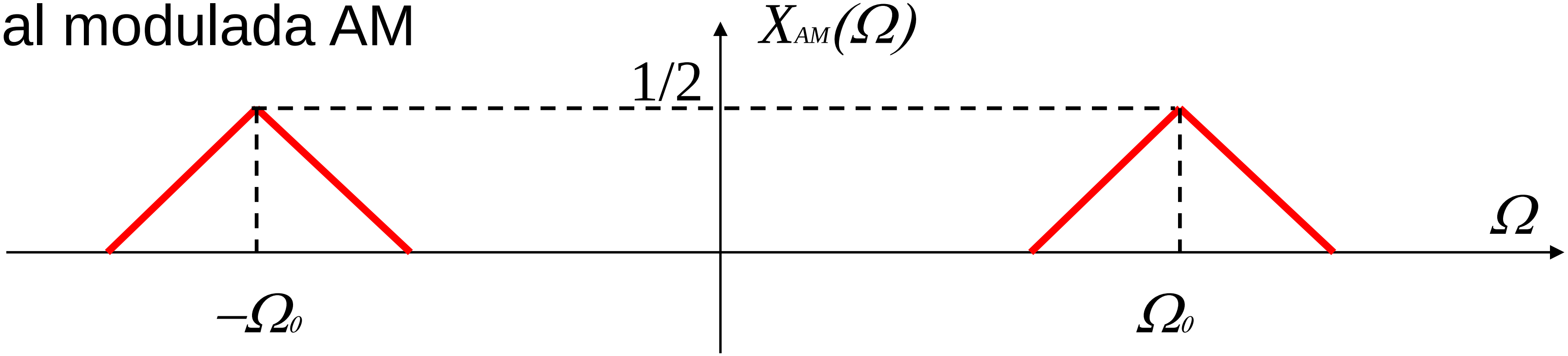
$$= \frac{1}{2}\left[X\left(\Omega+\Omega_0\right)+X\left(\Omega-\Omega_0\right)\right]$$

Vemos que al modular la amplitud de una senoide (**portadora senoidal**) con la señal *x(t)* se traslada el espectro de la señal a la frecuencia de la portadora. Esto constituye la base del esquema de modulación de **Amplitud Modulada (AM)** muy usado en comunicaciones.

Espectro de la señal (en **banda base**)



Espectro de la señal modulada AM



Transformada de Fourier de la convolución de señales

Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos señales de energía finita y $X(\Omega)$ e $Y(\Omega)$ sus respectivas Transformadas de Fourier. Resulta entonces

$$F\left\{x(t) * y(t)\right\} = X(\Omega)Y(\Omega)$$

En efecto

$$F\left\{x(t) * y(t)\right\} = F\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right]e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau)e^{-j\Omega t}dt\ d\tau$$

$m = t - \tau$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} y(m)e^{-j\Omega(m+\tau)}dm\ d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau\int_{-\infty}^{\infty} y(m)e^{-j\Omega m}dm$$

$$= X(\Omega)Y(\Omega)$$

Espectro de Densidad de Energía de Señales Aperiódicas

Sea $x(t)$ una señal de energía finita con Transformada de Fourier $X(F)$. La energía es:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \; dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x^*(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \; dt \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(F)\, e^{-j2\pi Ft} \; dF \right]}_{x^*(t)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(F) \; dF \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt \right]}_{X(F)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| X(F) \right|^2 \; dF$$

Es decir:

$$\boxed{E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) \right|^2 \; dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| X(F) \right|^2 \; dF} \qquad (12)$$

que es la llamada ***Identidad de Parseval*** para señales aperiódicas de energía finita.

El espectro $X(F)$ de una señal es generalmente complejo

$$X(F) = |X(F)|\, e^{j\,\theta(F)}$$

donde:

$|X(F)|$ es la magnitud

$\theta(F)$ es la fase

La cantidad

$$S_{xx}(F) = |X(F)|^2$$

representa la distribución de energía en la señal en función de la frecuencia y se denomina **Espectro de Densidad de Energía** de $x(t)$.

La integral de $S_{xx}(F)$ sobre todas las frecuencias da la **energía total** de la señal. La energía de $x(t)$ en una banda de frecuencias $F_1 \leq F \leq F_2$ puede calcularse como:

$$\boxed{E_x\Big|_{F_1<F<F_2} = \int_{F_1}^{F_2} S_{xx}(F)\,dF}$$

Si la señal $x(t)$ es real, entonces:

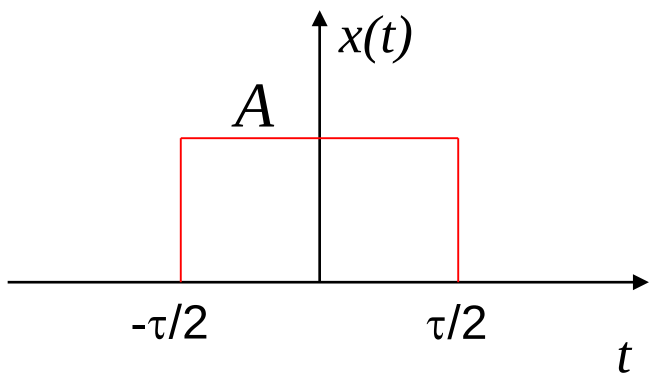
$$|X(-F)| = |X(F)| \qquad \textit{función par}$$

$$\theta(-F) = -\theta(F) \qquad \textit{función impar}$$

$$S_{xx}(-F) = S_{xx}(F) \qquad \textit{función par}$$

Ejemplo:

$$x(t) = \begin{cases} A & |t| \le \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

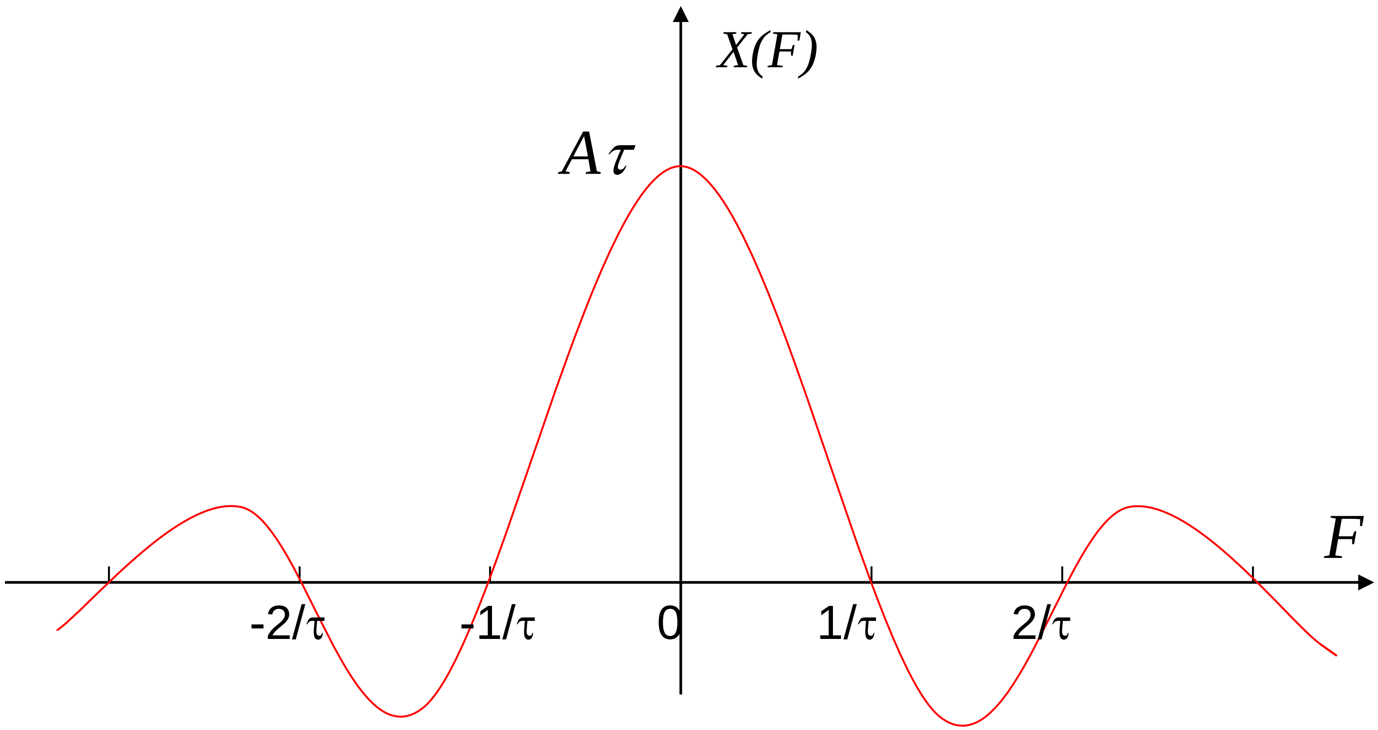


x(t) es no periódica y satisface las condiciones de Dirichlet. Su Transformada de Fourier es:

$$X(F) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A\, e^{-j2\pi F t}\, dt = A\tau \frac{\sin \pi F \tau}{\pi F \tau}$$

y su espectro de densidad de energía resulta:

$$S_{xx}(F) = (A\tau)^2 \left(\frac{\sin \pi F \tau}{\pi F \tau} \right)^2$$


X(F)
Aτ
F
-2/τ
-1/τ
0
1/τ
2/τ