Apéndice

Valores Característicos de la Respuesta Sub-amortiguada

- ***Sobrevalor (SV)***

Sea la respuesta al escalón de un sistema de 2º orden sub-amortiguado:

$$y(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos(\omega_a t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_a t)\right),$$

para encontrar el valor máximo de la curva debemos derivar *y(t)* e igualar a cero.

$$\dot{y}(t) = 0$$

$$\dot{y}(t) = \xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos(\omega_a t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_a t)\right) - e^{-\xi\omega_n t}\omega_a\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\cos(\omega_a t) - \sin(\omega_a t)\right) = 0$$

$$\dot{y}(t) = \underbrace{e^{-\xi\omega_n t}}_{\neq 0}\left\{\left(\frac{\xi^2\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} + \omega_a\right)\cdot\sin(\omega_a t) + \left(\xi\omega_n - \frac{\xi\omega_a}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\cdot\cos(\omega_a t)\right\} = 0$$

Entonces:

$$\left(\frac{\xi^2\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} + \omega_a\right)\cdot\sin(\omega_a t) + \left(\xi\omega_n - \frac{\xi\omega_a}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\cdot\cos(\omega_a t) = 0$$

$$\left(\frac{\xi^2\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} + \omega_a\right)\cdot\sin(\omega_a t) = \left(-\xi\omega_n + \frac{\overbrace{\xi\omega_a}^{\xi\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\cdot\cos(\omega_a t)$$

$$\tan(\omega_a t) = \frac{\cancel{\xi\omega_n} - \cancel{\xi\omega_n}}{\dfrac{\xi^2\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} + \omega_a} = 0$$

$$\tan(\omega_a t) = \tan\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t = k\pi$$

Para *k=1* (primer máximo), tenemos:

$$\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t = \pi$$

$$t = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_a}$$

Así,

$$\boxed{t_P = \frac{\pi}{\omega_a}}$$

Para calcular el sobrevalor, evaluamos *y(t)* para $t=t_P$:

$$y\left(\pi/\omega_a\right) = 1 - e^{-\xi\omega_n \frac{\pi}{\omega_a}} \left(\underbrace{\cos\left(\phi_a \frac{\pi}{\phi_a}\right)}_{-1} + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \underbrace{\sin\left(\phi_a \frac{\pi}{\phi_a}\right)}_{0} \right)$$

$$y\left(\pi/\omega_a\right) = 1 + e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Así:

$$SV = y\left(\pi/\omega_a\right) - y(\infty) = \cancel{1} + e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} - \cancel{1}$$

$$\boxed{SV = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$$

• *Settling Time (tiempo de asentamiento)*

El *settling time* (t_{ST}) se define como el tiempo necesario para que *y(t)* alcance su valor final con un porcentaje de error determinado. Así, por ejemplo, se habla de *settling time* de 5% o de 2%. Demostraremos aquí una ecuación que aproxima el valor de t_{ST}.

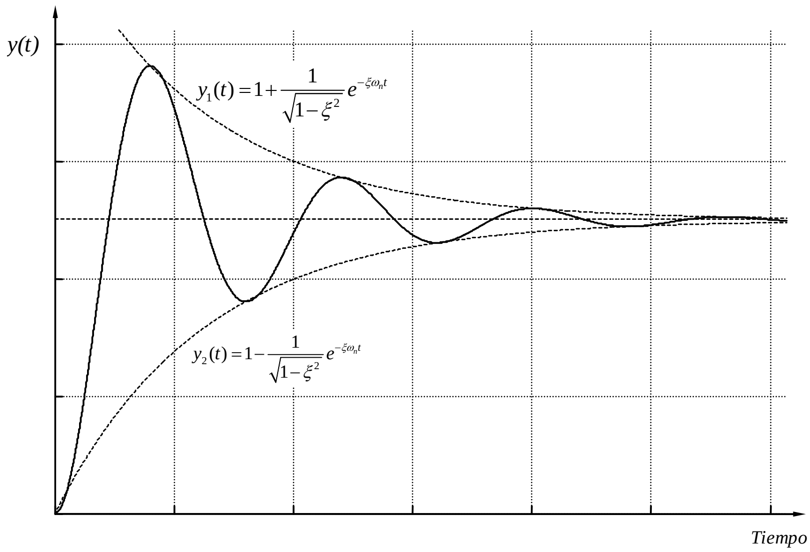
Reescribimos la respuesta al escalón de un sist. sub-amortiguado:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \underbrace{\sin\left(\omega_a t + \beta\right)}_{-1 \le \sin() \le 1}$$

Ya que la función *sen(x)* varía entre -1 y 1, podemos decir que *y(t)* se encuentra confinada por las siguientes envolventes:

$$y_1(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t}$$

$$y_2(t) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t}$$



Planteamos ahora la definición de *settling time* al 5%:

$$\left|y(\infty) - y_1(t_{ST})\right| = \left|y(\infty) - y_2(t_{ST})\right| \le \overbrace{0,05}^{5\%}$$

$$\left|1 - \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_{ST}}\right)\right| \le 0,05$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_{ST}} \le 0,05$$

$$e^{-\xi\omega_n t_{ST}} \le 0,05 \cdot \sqrt{1-\xi^2}$$

Aplicando logaritmo m. a m. tenemos:

$$\ln\left(e^{-\xi\omega_n t_{ST}}\right) \le \ln\left(0,05\cdot\sqrt{1-\xi^2}\right)$$

$$-\xi\omega_n t_{ST} \le \ln\left(0,05\cdot\sqrt{1-\xi^2}\right)$$

$$t_{ST} \ge \frac{-1}{\xi\omega_n}\ln\left(0,05\cdot\sqrt{1-\xi^2}\right) = \frac{1}{\xi\omega_n}\ln\left[\left(0,05\cdot\sqrt{1-\xi^2}\right)^{-1}\right]$$

$$t_{ST} \ge \frac{1}{\xi\omega_n}\left(\underbrace{\ln(20)}_{2,996\approx 3} - \ln\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)\right)$$

Si $\xi<1 \Rightarrow \xi^2 \ll 1 \Rightarrow \ln\left(\sqrt{1-\xi^2}\right) \approx \ln(1) = 0.$ Así:

$$t_{ST} \ge \frac{3}{\xi\omega_n}$$

Así, el valor de *settling time* al 5% queda:

$$\boxed{t_{ST_{5\%}} \cong \frac{3}{\xi\omega_n}}$$

Con el mismo procedimiento se calcula $t_{ST\,2\%}$, dando como resultado:

$$\boxed{t_{ST_{2\%}} \cong \frac{4}{\xi\omega_n}}$$