Sistemas y Señales I

Análisis de Sistemas LE en TD en el Dominio Transformado Z

Temario: Cap. 5

Análisis de Sistemas LE en TD en el Dominio Transformado Z

- La Transformada *Z* tiene un papel fundamental en el análisis de sistemas lineales estacionarios en tiempo discreto.
- Su importancia es similar a la que tiene la Transformada de Laplace en el análisis de SLE en tiempo contínuo.
- La aplicación de la Transformada Z nos permitirá convertir la ecuación en diferencias que describe al sistema en una ecuación algebraica en las transformadas de las variables, lo que facilita su resolución.
- La Transformada *Z* nos permitirá caracterizar a los sistemas LE en TD mediante su función transferencia.

1. Transformada Z Bilateral

Definimos la Transformada *Z* bilateral de la señal $x(n)$ como:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} = Z\left[x(n)\right]$$

z: **variable compleja**

$x(n)$: **señal en tiempo discreto**

- La transformada *Z* (serie infinita) existe para los valores de la variable *z* donde la serie converge. La región se denomina **Región de Convergencia (RDC).**
- Las señales de duración finita tienen como RDC a todo el plano complejo (exceptuando posiblemente $z=0$ y/o $z\to\infty$)

Ejemplo:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \mu(n)$$

Vemos que *x(n)* posee duración infinita

La transformada *Z* resulta:

$$X(z) = Z\left[x(n)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n$$

que es una serie geométrica. La serie converge para:

$$\left|\frac{1}{2} z^{-1}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z| > \frac{1}{2}$$

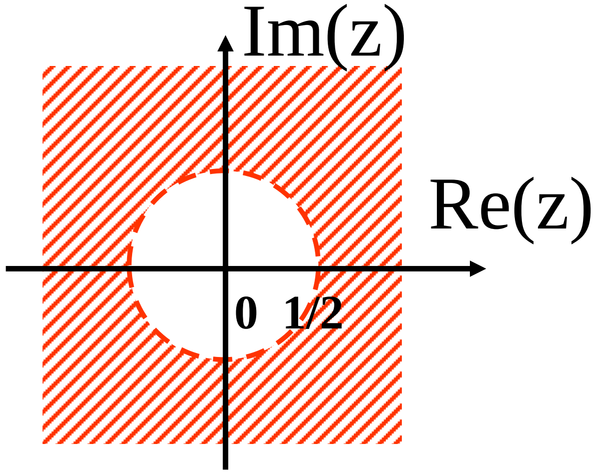
La serie converge al valor: $$\frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

Es decir, que la Transformada *Z* de *x(n)* es:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \qquad \mathrm{RDC}: |z| > \frac{1}{2}$$

X(z) es una representación alternativa, compacta, de la señal *x(n)*

Gráficamente, la RDC es:



- Región de Convergencia

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$$

Expresando la variable z en forma polar, tenemos:

$$z=r\,.e^{j\varphi}$$

donde: $r=|z|$

$$\varphi=\measuredangle z$$

entonces:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, \overbrace{r^{-n}\,.e^{-j\varphi n}}^{z^{-n}}$$

En la región de convergencia de $X(z)$ es:

$$|X(z)|<\infty$$

Es decir:

$$|X(z)| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, r^{-n} . e^{-j\varphi n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n)\, r^{-n} . e^{-j\varphi n} \right|$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n)\, r^{-n} \right| < \infty$$

Hallar la RDC es hallar el rango de valores de r para el cual la secuencia $x(n)\, r^{-n}$ es absolutamente sumable.

La RDC es usualmente una región anular

$$r_2 < r_c(z) < r_1$$

Si la señal es **causal** $\rightarrow$ RDC: **Exterior** de un círculo

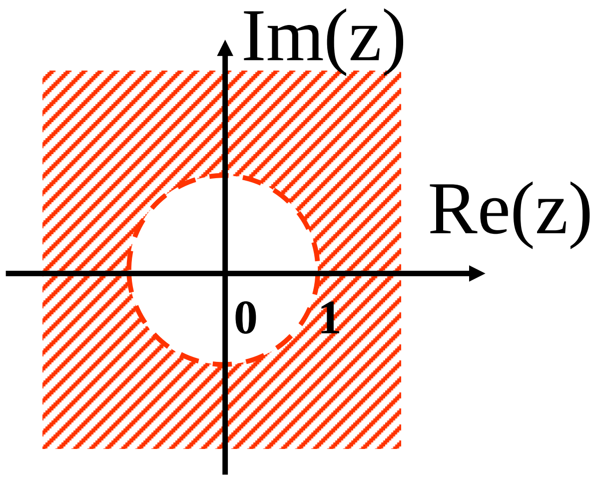
Si la señal es **anticausal** $\rightarrow$ RDC: **Interior** de un círculo

Ejemplo: Transformada del escalón

$$x(n) = \mu(n) \Rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(z^{-1}\right)^{n}$$

$$\text{serie geométrica } \rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$\text{RDC} = \left\{ z \,/ \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \right\} = \left\{ z \,/ |z| > 1 \right\}$$



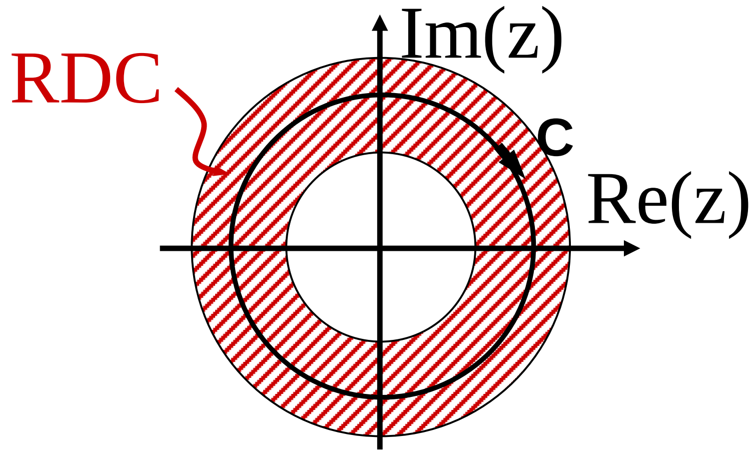
2. Transformada Z inversa

$$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, z^{-k}$$

Multiplicamos por z^{n-1}

$$X(z)\, z^{n-1}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, z^{n-1-k}$$

Consideremos la siguiente RDC, y una curva cerrada **C** en el interior de la misma



Integrando ambos miembros de la expresión anterior sobre el contorno C

$$\oint_C X(z)\, z^{n-1}\, dz = \oint_C \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, z^{n-1-k}\, dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \oint_C z^{n-1-k}\, dz$$

Como la serie converge en el contorno C

(C está dentro de la RDC)

Recordando el **Teorema de Cauchy** resulta:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{n-1-k}\, dz = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

y por lo tanto:

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)\, z^{n-1}\, dz}$$

Transformada Z Inversa

3. Propiedades de la Transformada Z

- Linealidad

$$Z\left[a\,x_1(n)+b\,x_2(n)\right]=a\,Z\left[x_1(n)\right]+b\,Z\left[x_2(n)\right]$$

- Corrimiento en tiempo

$$Z\left[x(n-k)\right]=z^{-k}\,Z\left[x(n)\right]$$

- Escalado en el Dominio Z

$$Z\left[a^{n}x(n)\right]=X\left(a^{-1}z\right)$$

donde $X(z)=Z\left[x(n)\right]$

- Reversión de Tiempo

$$Z\left[x(-n)\right]=X\left(z^{-1}\right) \qquad \text{con} \quad X(z)=Z\left[x(n)\right]$$

- Derivada en el Dominio Z

$$Z\left[n\,x(n)\right]=-z\frac{d\,X(z)}{dz} \qquad \text{con} \quad X(z)=Z\left[x(n)\right]$$

- Convolución de 2 secuencias

$$Z\left[x_1(n)*x_2(n)\right]=Z\left[x_1(n)\right].Z\left[x_2(n)\right]$$

- Teorema del Valor Inicial

Si $x(n)$ es causal (es decir $x(n)=0 \ \forall\, n<0$)

$$x(0)=\lim_{z\to\infty} X(z)$$

4. Transformadas Z Racionales

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}$$

polinomios en z^{-1} (o z)

$$X(z)=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+\ldots+b_M z^{-M}}{a_0+a_1 z^{-1}+\ldots+a_N z^{-N}}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

ceros de $X(z)$: valores de z tal que $X(z)=0$

polos de $X(z)$: valores de z tal que $X(z)\to\infty$

$$X(z)=z^{N-M}\,\frac{b_0 z^{M}+b_1 z^{M-1}+\ldots+b_M}{a_0 z^{N}+a_1 z^{N-1}+\ldots+a_N}$$

$$X(z) = K\ z^{N-M}\ \frac{\prod_{i=1}^{M}(z - z_i)}{\prod_{j=1}^{N}(z - p_j)} \qquad \text{con} \quad K = \frac{b_0}{a_0}$$

M ceros finitos $\quad z_1, z_2, \ldots, z_M$

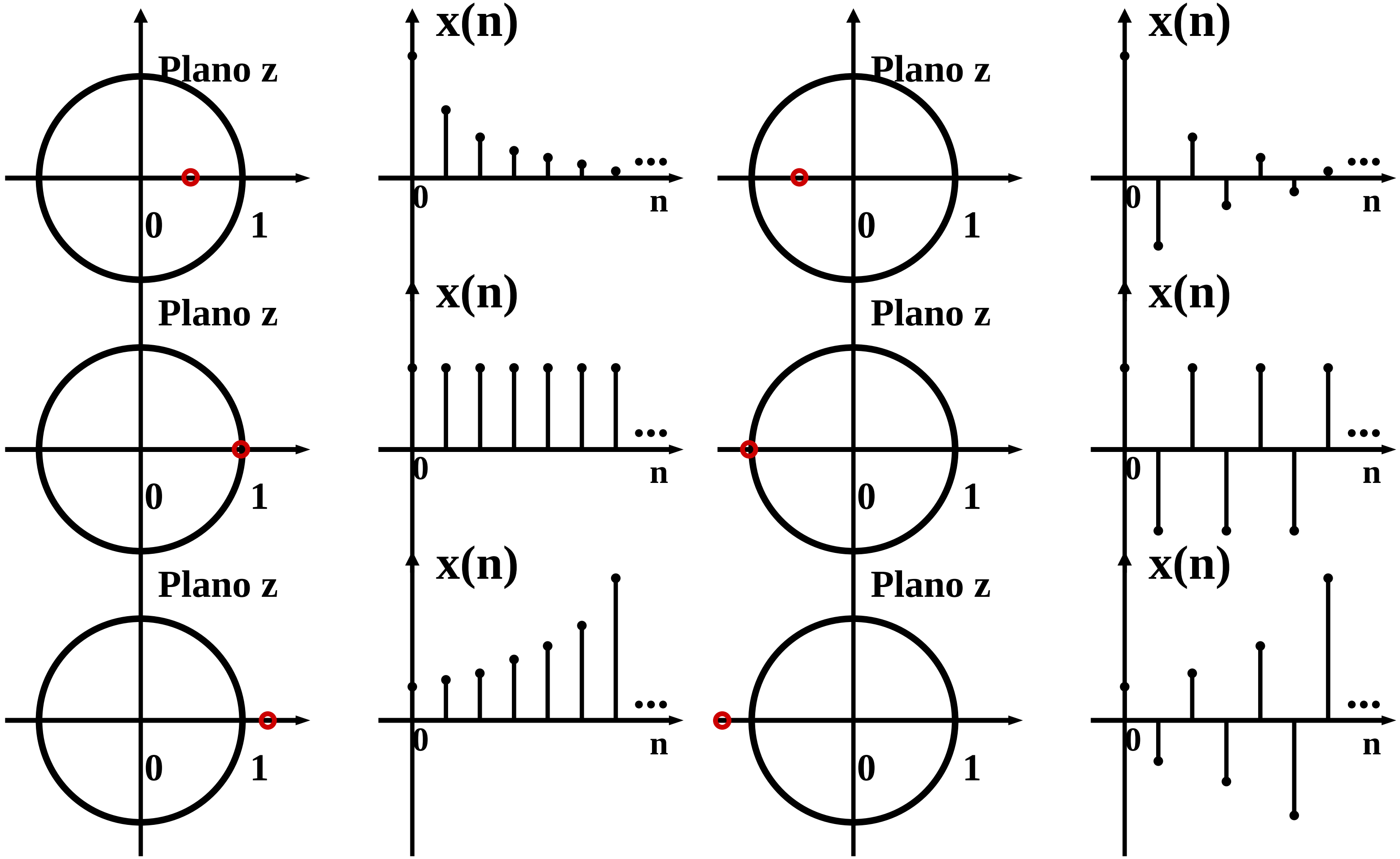
N polos finitos $\quad p_1, p_2, \ldots, p_N$

N-M ceros en el origen si $N>M$

M-N polos en el origen si $M>N$

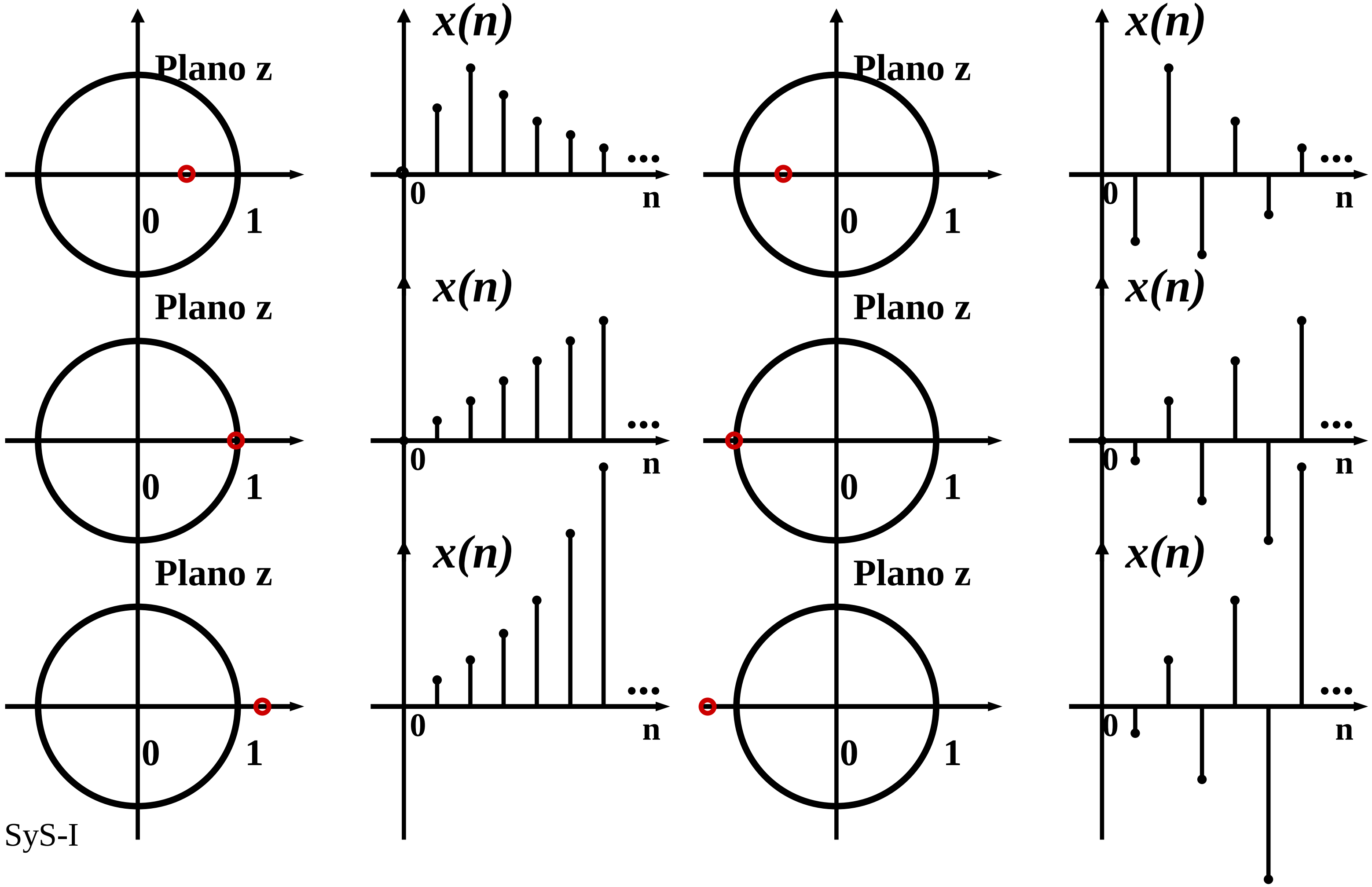
5. Ubicación de polos y Comportamiento Temporal

$$\text{Señal causal } x(n) = a^{n}\mu(n) \leftrightarrow X(z) = \frac{1}{1 - a\,z^{-1}} \quad RDC: |z| > |a|$$



$$\text{Señal causal } x(n) = n\,a^{n}\,\mu(n) \leftrightarrow X(z) = \frac{a\,z^{-1}}{\left(1 - a\,z^{-1}\right)^{2}},$$

$$\text{RDC}: |z| > |a|$$



$$Z\left[na^{n}\mu(n)\right] = -z\,\frac{dZ\left[a^{n}\mu(n)\right]}{dz} = -z\,\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-a}\right)$$

$$= -z\,\frac{z-a-z}{(z-a)^{2}} = \frac{az}{(z-a)^{2}} = \frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^{2}}$$

6. Función Transferencia Z

$$u(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

$$y(n) = h(n) * u(n)$$

$$\Big\downarrow \, \boldsymbol{Z}$$

$$Y(z) = H(z).U(z)$$

$$H(z) = Z\left[\ h(n)\ \right]$$ **Función Transferencia Z**

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\, z^{-n} = \left.\frac{Y(z)}{U(z)}\right|_{C.I.nulas}$$

Para un sistema descripto por una ecuación en diferencias:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k\, y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k\, u(n-k)$$

$$\Big\downarrow\ \mathbf{Z}\quad \textbf{(C.I. nulas)}$$

$$Y(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k\, Y(z)\, z^{-k} + \sum_{k=0}^{M} b_k\, U(z)\, z^{-k}$$

$$Y(z)\left[\, 1 + \sum_{k=1}^{N} a_k\, z^{-k} \,\right] = U(z)\left[\, \sum_{k=0}^{M} b_k\, z^{-k} \,\right]$$

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{M} b_k\, z^{-k}}{\displaystyle 1 + \sum_{k=1}^{N} a_k\, z^{-k}}}$$

Transferencia Z Racional

Casos especiales

- $a_k = 0 \quad , \quad \forall k$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k \; z^{-k} = \frac{1}{z^{M}} \sum_{k=0}^{M} b_k \; z^{M-k}$$

M ceros $\rightarrow$ determinados por los coeficientes b_k

1 polo de orden M en z= 0

El sistema se denomina **FIR (Finite Impulse Response)**

- $b_k = 0 \quad , \quad$ para $\quad 1 \leq k \leq M$

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k \; z^{-k}} = \frac{b_0 \; z^{N}}{\sum_{k=0}^{N} a_k \; z^{N-k}} \quad \text{con } a_0 = 1$$

N polos $\rightarrow$ determinados por los coeficientes a_k

1 cero de orden N en z= 0

Casos especiales (continuación)

El sistema anterior es de tipo **IIR (Infinite Impulse Response)**. Para ver esto calculemos $h(n)$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{b_0\, z^{N-1}}{\sum_{k=0}^{N} a_k\, z^{N-k}} = \frac{b_0\, z^{N-1}}{\prod_{k=1}^{N} (z - p_k)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{(z - p_k)}$$

Expansión en fracciones simples

Luego:

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{\left(1 - p_k\, z^{-1}\right)} \xrightarrow{Z^{-1}} h(n) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k\, p_k^{\,n}\, \mu(n)$$

Está definida para infinitos valores de $n \Rightarrow$ IIR

7. Cálculo de la Transformada Z inversa

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)\, z^{n-1}\, dz$$

C: contorno cerrado que encierra al origen y está dentro de la RDC de $X(z)$

Métodos de Resolución

- Evaluación directa de la integral de contorno
- Expansión en serie de potencias en z y z^{-1}
- **Expansión en Fracciones Simples + Tabla de pares Transformados Z**

Evaluación directa de la integral de Contorno

Por el Teorema de los Residuos de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \begin{cases} f(z_0) & \text{si } z_0 \text{ interior a } C \\ 0 & \text{si } z_0 \text{ exterior a } C \end{cases}$$

f(z) derivable sobre y en el interior del contorno C y sin polos en $z = z_0$

En su forma más general:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{g(z)}dz = \sum_{i=1}^{n} A_i(z_i)} \quad \text{con } A_i(z) = (z-z_i)\frac{f(z)}{g(z)}$$

f(z) no tiene polos en el interior de C

g(z) es un polinomio con raíces distintas $z_1, z_2, \ldots, z_N$ dentro de C

$\{A_i(z_i)\}$ Residuos correspondientes a los polos $z_1, z_2, \ldots, z_N$

Aplicado al cálculo de la transformada Z inversa se tiene:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)\, z^{n-1}\, dz = \sum_{\substack{\text{todos los polos} \\ z_i \text{ interiores a C}}} \left[\text{residuo de } X(z) z^{n-1} \text{ en } z = z_i \right]$$

<u>Ejemplo:</u>

$$X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} \qquad \text{RDC}: |z| > |a|$$

(**Hacerlo !!**)

Expansión en Serie de Potencias

Expandimos $X(z)$ como:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, z^{-n}$$

que converge en la RDC de X(z). Por la unicidad de la Transformada *Z*

$$x(n) = c_n \quad \forall n$$

Expansión en Fracciones Simples

Expresamos $X(z)$ como la combinación lineal

$$X(z) = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i \; X_i(z)$$

donde los $X_i(z)$ tienen transformada inversa conocida $x_i(n)$

Entonces por linealidad:

$$x(n) = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i \; x_i(n)$$

8. Transformada Z Unilateral

$$X^{+}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$$

$X^{+}(z)$: No contiene información de $x(n)$ para $n < 0$

$X^{+}(z)$: Es única sólo para señales causales

Ejemplo:

$$x_1(n) = \{1, 2, \underset{\uparrow}{5}, 7, 0, 1\} \quad \overset{\mathbf{Z}}{\longleftrightarrow} \quad X_1^{+}(z) = 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$$

$$x_2(n) = \{2, 4, \underset{\uparrow}{5}, 7, 0, 1\} \quad \overset{\mathbf{Z}}{\longleftrightarrow} \quad X_2^{+}(z) = 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$$

$$\boxed{Z^{+}\left[x(n)\right] = Z\left[x(n)\mu(n)\right]}$$

Como $x(n)\mu(n)$ es causal, la RDC de $X^{+}(z)$ es el exterior de un círculo.

Propiedades de la $X^{+}(z)$

Posee las mismas propiedades de la $X(z)$, exceptuando la propiedad de corrimiento en el tiempo

Caso 1: Retardo de Tiempo

$$x(n) \longleftrightarrow X^{+}(z)$$

$$x(n-k) \longleftrightarrow z^{-k}\left[\, X^{+}(z) + \sum_{n=1}^{k} x(-n) z^{n} \,\right] \quad , \; k > 0$$

En el caso en que $x(n)$ sea causal, entonces

$$x(n-k) \longleftrightarrow z^{-k} X^{+}(z)$$

Prueba:

$$Z^{+}\left[x(n-k)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}x(n-k)z^{-n}$$

$$n-k=m\rightarrow \quad =\sum_{m=-k}^{\infty}x(m)z^{-m-k}=z^{-k}\sum_{m=-k}^{\infty}x(m)z^{-m}$$

$$=z^{-k}\left[\sum_{m=0}^{\infty}x(m)z^{-m}+\sum_{m=-k}^{-1}x(m)z^{-m}\right]$$

$$=z^{-k}\left[X^{+}(z)+\sum_{m=1}^{k}x(-m)z^{m}\right]$$

Caso 2: Avance de Tiempo

$$x(n)\longleftrightarrow X^{+}(z)$$

$$x(n+k)\longleftrightarrow z^{k}\left[X^{+}(z)-\sum_{n=0}^{k-1}x(n)z^{-n}\right],\quad k>0$$

Teorema del Valor Final

$$\text{Si} \quad x(n) \longleftrightarrow X^{+}(z)$$

$$\text{entonces:}$$

$$\lim_{n \to \infty} x(n) = \lim_{z \to 1} (z-1)\, X^{+}(z)$$

El límite existe si la RDC de $(z - 1)\, X^{+}(z)$ incluye al circulo unitario

Ejemplo:

La respuesta al impulso de un SLE relajado es:

$$h(n) = \alpha^{n} \mu(n) \quad ; \quad 0 < \alpha < 1$$

Determine el valor de la respuesta al escalón cuando $n \to \infty$

Tenemos:

$$y(n) = h(n) * u(n)$$

donde:

$$u(n) = \mu(n)$$

Por la propiedad de la transformada de la convolución

$$Y(z) = H(z)U(z)$$

(como las señales *h(n)*, *y(n)* y *u(n)* son señales causales, la transformada Z unilateral y bilateral son idénticas)

$$Y(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z^2}{(z-1)(z-\alpha)} \qquad RDC: |z| > 1$$

Luego:

$$(z-1)Y(z) = \frac{z^2}{(z-\alpha)} \qquad RDC: |z| > |\alpha|$$

Como $|\alpha| < 1$, la RDC *(z - 1) Y(z)* incluye a la circunferencia unitaria. Luego, por TVF:

$$\lim_{n\to\infty} y(n) = \lim_{z\to 1} (z-1)Y(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z^2}{z-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \quad (1)$$

Verifiquemos el límite en el dominio temporal. Se tiene

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-\alpha)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-\alpha}$$

$$A = \lim_{z\to 1} \frac{z}{z-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

$$B = \lim_{z\to \alpha} \frac{z}{z-1} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

Luego

$$Y(z)=\frac{1}{1-\alpha}\frac{z}{z-1}-\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{z}{z-\alpha}$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

$$\Rightarrow y(n)=\frac{1}{1-\alpha}\mu(n)-\frac{\alpha}{1-\alpha}\alpha^{n}\mu(n)$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} y(n)=\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (2)$$

Comparar (1) y (2).

Uso de la Transformada Z unilateral para la solución de las Ecuaciones en Diferencias con condiciones iniciales no nulas

Ejemplo:

$$(1) \qquad y(n) = \alpha\, y(n-1) + u(n) \quad , \quad |\alpha| < 1$$

Calcular la respuesta del sistema a un escalón unitario, con condición inicial $y(-1)=1$

Solución:

Tomando la Transformada Z^+ en ambos miembros de la ecuación (1) , tenemos:

$$Y^{+}(z) = \alpha\left[z^{-1}\,Y^{+}(z)+y(-1)\right]+U^{+}(z)$$

$$Y^{+}(z)\left(1-\alpha\,z^{-1}\right)= \alpha\,y(-1)+U^{+}(z)$$

$$Y^{+}(z) = \frac{\alpha\,y(-1)}{\left(1-\alpha\,z^{-1}\right)} + \frac{1}{\left(1-\alpha\,z^{-1}\right)}U^{+}(z)$$

Para:

$$u(n)=\mu(n) \quad \Rightarrow \quad U^{+}(z) = \frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)}$$

$$Y^{+}(z)=\frac{\alpha}{\left(1-\alpha\,z^{-1}\right)}+\frac{1}{\left(1-\alpha\,z^{-1}\right)}\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)}=\frac{\alpha\,z}{z-\alpha}+\frac{z^{2}}{(z-\alpha)(z-1)}$$

$$\frac{Y^{+}(z)}{z}=\frac{\alpha}{z-\alpha}+\frac{z}{(z-\alpha)(z-1)}=\frac{\alpha(z-1)+z}{(z-\alpha)(z-1)}$$

$$=\frac{A}{z-\alpha}+\frac{B}{z-1}$$

$$A=\lim_{z\to\alpha}\frac{\alpha(z-1)+z}{z-1}=-\frac{\alpha^{2}}{1-\alpha}$$

$$B=\lim_{z\to 1}\frac{\alpha(z-1)+z}{z-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow Y^{+}(z)=-\frac{\alpha^{2}}{(1-\alpha)}\frac{1}{\left(1-\alpha z^{-1}\right)}+\frac{1}{(1-\alpha)}\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)}$$

$$\Rightarrow y(n)=-\frac{\alpha^{2}}{(1-\alpha)}\alpha^{n}\mu(n)+\frac{1}{(1-\alpha)}\mu(n)$$

Respuesta de Sistemas con funciones Transferencia Z Racionales

$$U(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z)$$

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$ polinomios en z^{-1} (o z)

Asumimos $u(n)$ con transformada Z^{+} racional

$$U(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Asumimos además $H(z)$ con polos simples $p_1 , p_2 , \ldots , p_N$ y $U(z)$ con polos simples $q_1 , q_2 , \ldots , q_L$; con:

$$p_k \neq q_m \qquad \forall \qquad k = 1, \ldots, N \;\wedge\; m = 1, \ldots, L$$

Asumiendo además que no hay cancelación de polo-cero

Suponiendo condiciones iniciales nulas, la respuesta del sistema a la entrada resulta:

$$Y(z) = \frac{N(z)\ P(z)}{D(z)\ Q(z)}$$

Expandiendo en fracciones simples obtenemos

$$Y(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k\ z^{-1}} + \sum_{k=1}^{L} \frac{B_k}{1 - q_k\ z^{-1}}$$

$$\downarrow \mathbf{Z^{-1}}$$

$$Y(z) = \sum_{k=1}^{N} A_k\ p_k^n\ \mu(n) + \sum_{k=1}^{L} B_k\ q_k^n\ \mu(n)$$

Respuesta Natural **Respuesta Forzada**

9. Causalidad y Estabilidad de Sistemas en TD

- **Causalidad:**

Vimos que la condición necesaria y suficiente para que un SLE sea causal es que:

$$h(n) = 0 \qquad \forall \quad n < 0$$

Vimos también que la RDC de la Transformada *Z* de una secuencia causal es el exterior de un círculo.

Podemos concluir que:

Un sistema LE es causal si y solo si la RDC de la función transferencia *Z* del sistema es el exterior de un circulo de radio $r < \infty$, incluyendo el punto $z = \infty$

- **Estabilidad:**

La estabilidad de un sistema LE puede expresarse en término de las características de la función transferencia Z del sistema.

Vimos que la condición necesaria y suficiente para la BIBO estabilidad de un sistema lineal estacionario es:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| h(n) \right| < \infty$$

Veremos que esta condición implica que $H(z)$ debe contener a la circunferencia unitaria en su RDC.

En efecto, considerando que:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\, z^{-n}$$

Luego:

$$\left|H(z)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\, z^{-n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h(n)\, z^{-n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h(n)\right| \left|z^{-n}\right|$$

Si se evalúa en la circunferencia unitaria ($|z|=1$) por lo que resulta:

$$\left|H(z)\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h(n)\right|$$

De donde podemos concluir que si el sistema es BIBO estable, entonces la RDC de $H(z)$ contiene a la circunferencia unitaria.

Lo converso también es válido. Concluyendo así que:

Un sistema LE es BIBO estable si y solo si la RDC de la función transferencia *Z* del sistema incluye a la circunferencia unitaria

- Las condiciones para causalidad y estabilidad son diferentes y una no implica la otra. De hecho podemos tener sistemas:

  - Estab. / Causal
  - Inestab. / Causal
  - Estab. / No Causal
  - Inestab. / No Causal

- Para un **sistema causal**, la condición necesaria y suficiente se puede restringir un poco, como:

Sistema causal $\longleftrightarrow$ RDC de $H(z)$ es el exterior de un circulo de radio r

Sistema estable $\longleftrightarrow$ RDC de $H(z)$ contiene a la circunferencia unitaria

Sistema **causal y estable** $\longleftrightarrow$ RDC de $H(z)$ es $|\,z\,| > r\ ;\ \ r < 1$

Como la RDC no puede contener polos de $H(z)$ podemos concluir que:

Un sistema LE causal, es BIBO estable si y solo si todos los polos de $H(z)$ están en el interior del círculo unitario

<u>Ejemplo:</u>

Sea el sistema LE con transferencia Z:

$$H(z) = \frac{3-4z^{-1}}{1-3.5z^{-1}+1.5z^{-2}} = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} + \frac{2}{1-3z^{-1}}$$

Especifique la RDC de $H(z)$ y determine $h(n)$ para las siguiente condiciones:

a. El sistema es estable
b. El sistema es causal
c. El sistema es anticausal

a. Sistema BIBO estable

La condición necesaria y suficiente para BIBO estabilidad es que la RDC de $H(z)$ contenga a la circunferencia unitaria

$$H(z) = \frac{1}{1-0.5\,z^{-1}} + \frac{2}{1-3z^{-1}}$$

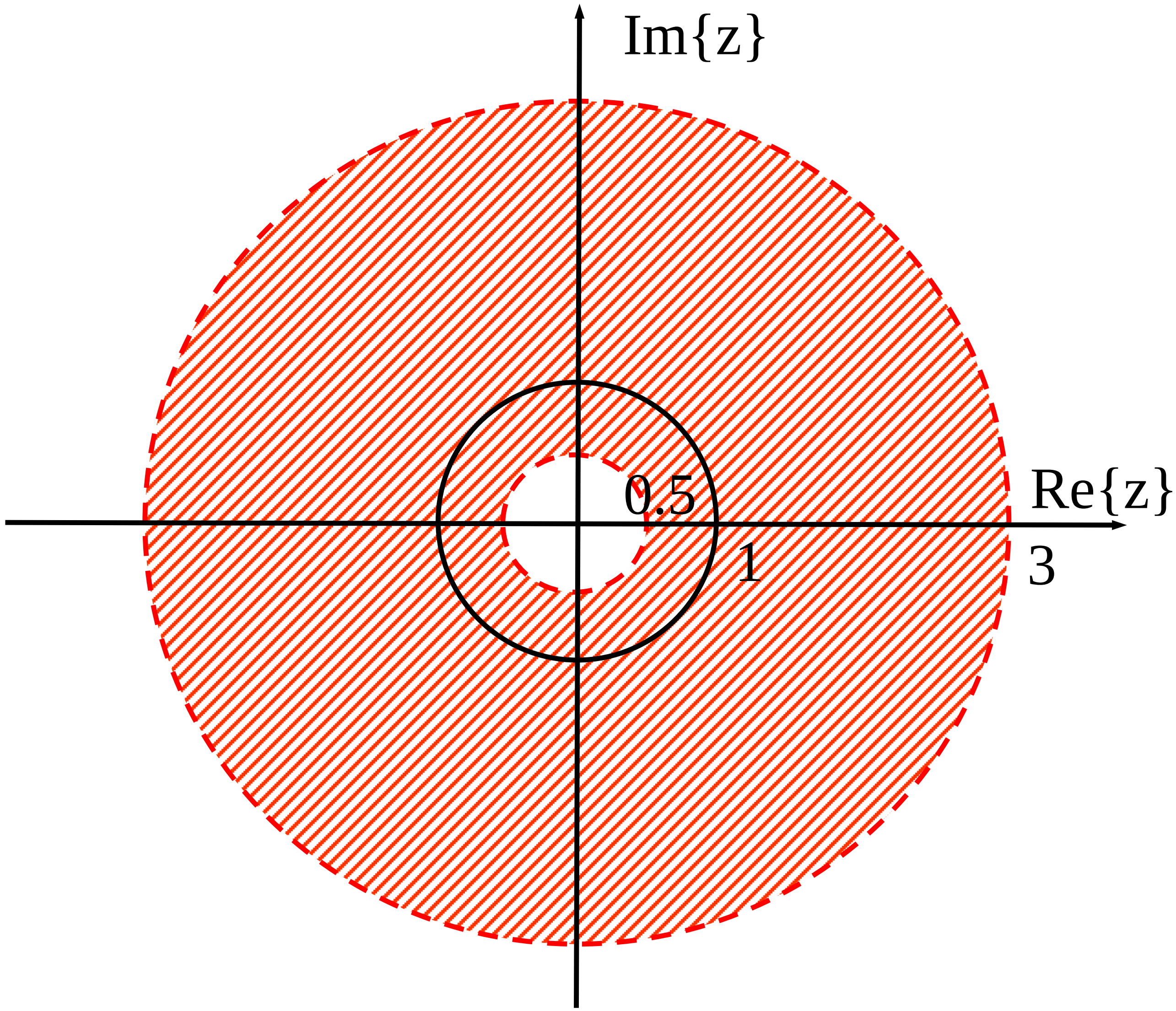
causal **anticausal**

$$\mathrm{RDC}_1 = \left\{ z \,/\, |z| > \frac{1}{2} \right\} \qquad \mathrm{RDC}_2 = \left\{ z \,/\, |z| < 3 \right\}$$

$$\mathrm{RDC}\{H(z)\} = \mathrm{RDC}_1 \cap \mathrm{RDC}_2 = \left\{ z \,/\, \frac{1}{2} < |z| < 3 \right\} \supset \left\{ z \,/\, |z| = 1 \right\}$$

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \mu(n) - 3^n \mu(-n-1)$$

no causal
BIBO estable



$$\mathrm{RDC}\{H(z)\} = \mathrm{RDC}_1 \cap \mathrm{RDC}_2 = \left\{ z \,/\, \frac{1}{2} < |z| < 3 \right\} \supset \{ z \,/\, |z| = 1 \}$$

b. Sistema causal

La RDC de *H(z)* debe ser el exterior de un círculo

$$H(z) = \frac{1}{1-0.5\,z^{-1}} + \frac{2}{1-3z^{-1}}$$

causal

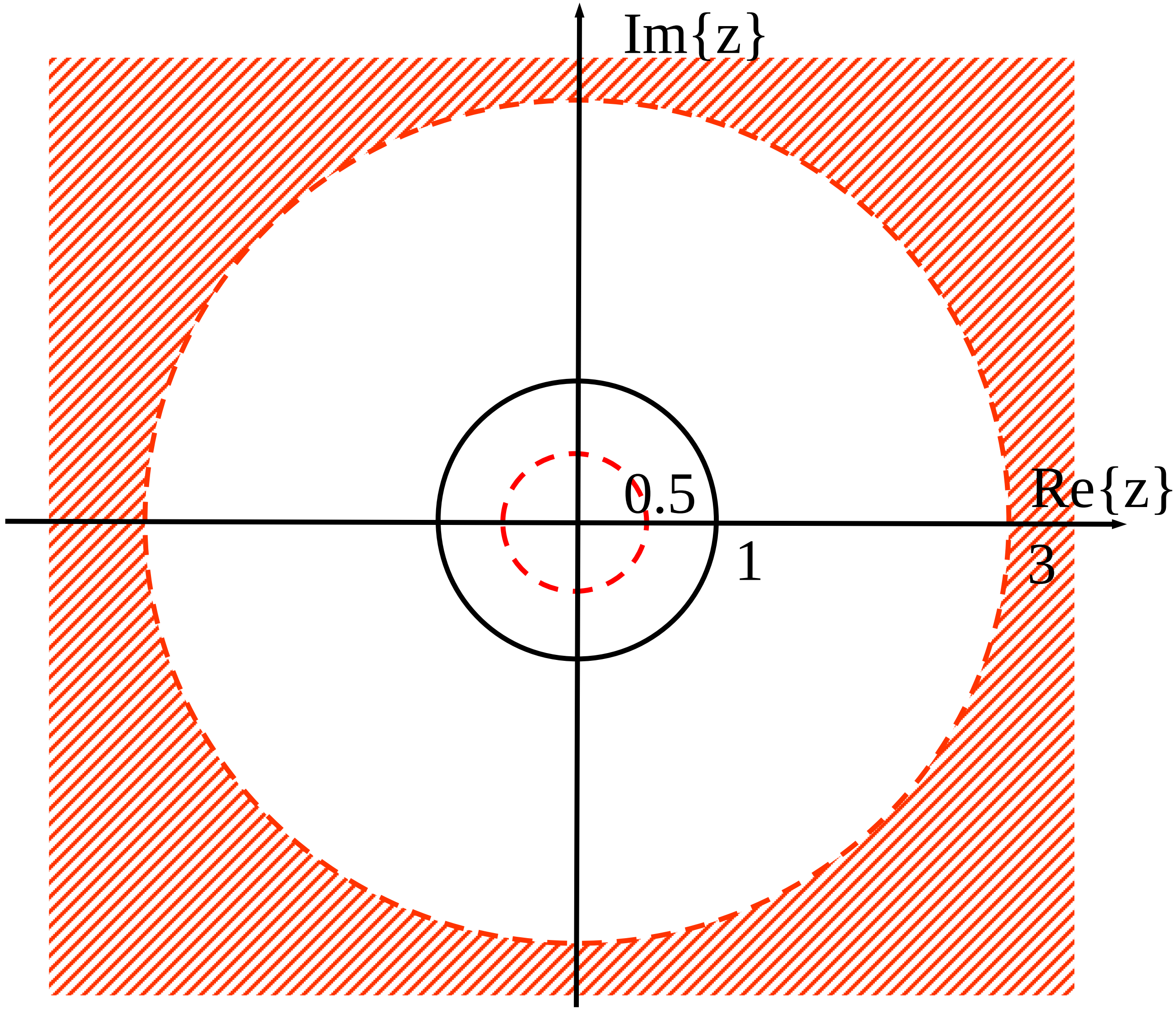
causal

$$\mathrm{RDC}_1 = \left\{ z \,/\, |z| > \frac{1}{2} \right\} \qquad \mathrm{RDC}_2 = \left\{ z \,/\, |z| > 3 \right\}$$

$$\boxed{\mathrm{RDC}\{H(z)\}} = \mathrm{RDC}_1 \cap \mathrm{RDC}_2 \boxed{= \{ z \,/\, |z| > 3 \}} \not\supset \{ z \,/\, |z| = 1 \}$$

$$\boxed{h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \mu(n) + 3^n \mu(n)}$$

Causal
No BIBO estable



$$\boxed{\mathrm{RDC}\left\{H(z)\right\}} = \mathrm{RDC}_1 \cap \mathrm{RDC}_2 \boxed{= \left\{z / |z| > 3\right\}} \not\supset \left\{z / |z| = 1\right\}$$

c. Sistema anticausal

La RDC de *H(z)* es el interior de un círculo.

$$H(z) = \frac{1}{1-0.5\,z^{-1}} + \frac{2}{1-3z^{-1}}$$

anticausal

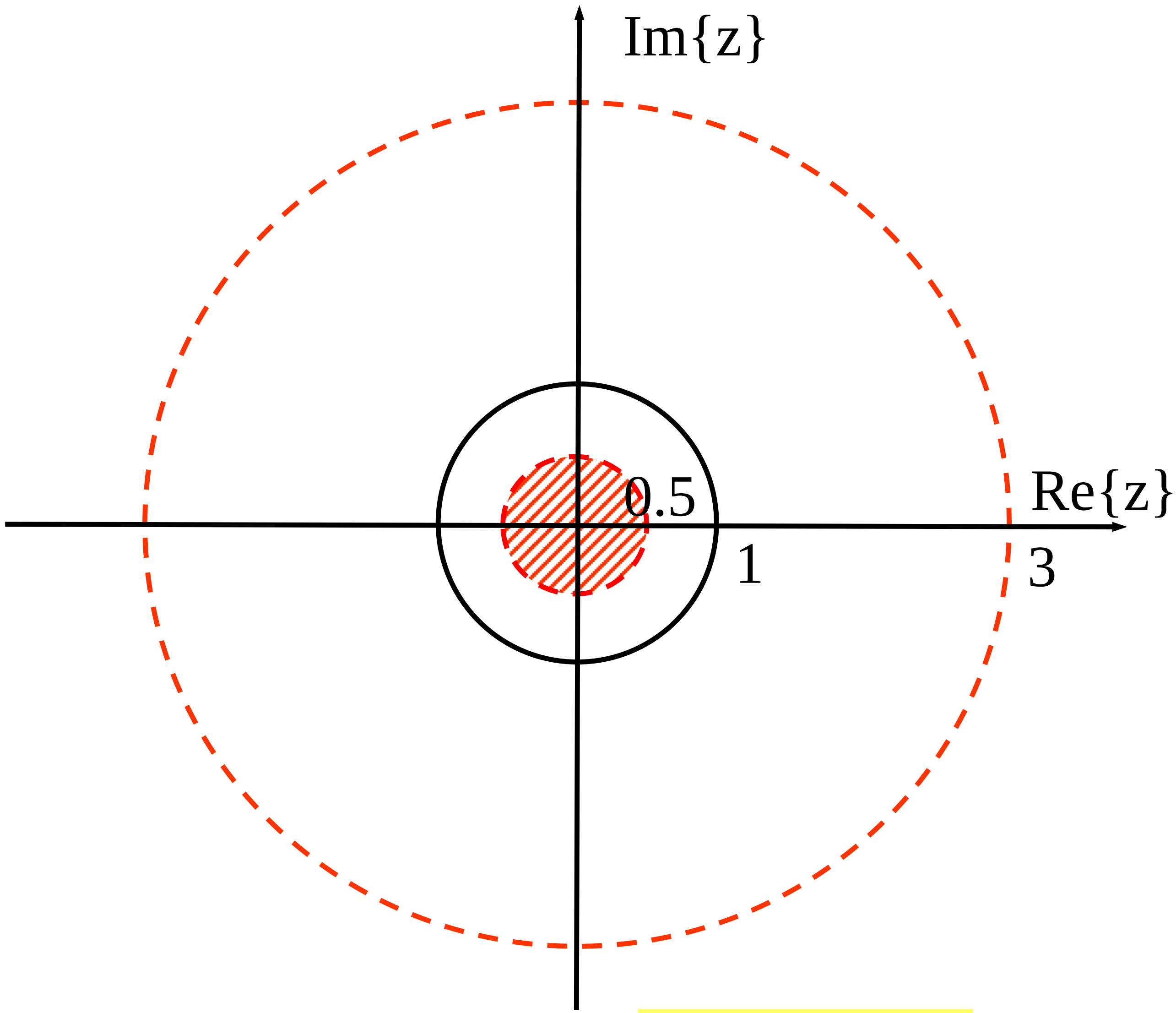
anticausal

$$\mathrm{RDC}_1 = \left\{ z \,/\, |z| < \frac{1}{2} \right\} \qquad \mathrm{RDC}_2 = \left\{ z \,/\, |z| < 3 \right\}$$

$$\mathrm{RDC}\{H(z)\} = \mathrm{RDC}_1 \cap \mathrm{RDC}_2 = \left\{ z \,/\, |z| < \frac{1}{2} \right\} \not\supset \left\{ z \,/\, |z| = 1 \right\}$$

$$h(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \mu(-n-1) - 3^n \mu(-n-1)$$

anticausal
no BIBO estable



$$\boxed{\mathrm{RDC}\left\{H(z)\right\}} = \mathrm{RDC}_1 \cap \mathrm{RDC}_2 \boxed{= \left\{ z \,/\, |z| < \frac{1}{2} \right\}} \not\supset \left\{ z \,/\, |z| = 1 \right\}$$