Sistemas y Señales I

Transparencias:

Transformada de Fourier de Señales periódicas en TC

Autor: Dr. Juan Carlos Gómez

Transformada de Fourier de señales periódicas en TC

Si se admiten como posibles transformadas los **impulsos**, puede ampliarse la clase de funciones en TC que son transformables Fourier para incluir a las funciones periódicas.

Consideremos la señal

$$\boxed{x(t) = e^{j\Omega_0 t}} \qquad (1)$$

Su Transformada de Fourier (calculada aplicando la definición) resulta

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega_0 t} e^{-j\Omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\Omega-\Omega_0)t} dt$$

Puede probarse que resulta igual a

$$X(\Omega) = 2\pi\delta\left(\Omega - \Omega_0\right) \qquad (2)$$

Para ver esto, basta con calcular la Transformada Inversa y verificar que es igual a $x(t)$. En efecto

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \Omega_0\right) e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= e^{j\Omega_0 t} \end{aligned}$$

Si consideramos la expresión de la transformada en función de F , resulta entonces

$$X(F) = \delta\left(F - F_0\right) \tag{3}$$

Y en este caso se tiene entonces:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X\left(F\right)e^{j2\pi Ft}dF \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(F - F_0\right)e^{j2\pi Ft}dF \\ &= e^{j2\pi F_0 t} \end{aligned}$$

Consideremos ahora una señal $x(t)$ **periódica** con frecuencia fundamental F_0, representada con su Serie de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{j2\pi k F_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk\Omega_0 t}$$

Teniendo en cuenta (2) y (3), la Transformada de Fourier de $x(t)$ resulta:

$$\boxed{X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta\left(\Omega - k\Omega_0\right)} \qquad (4)$$

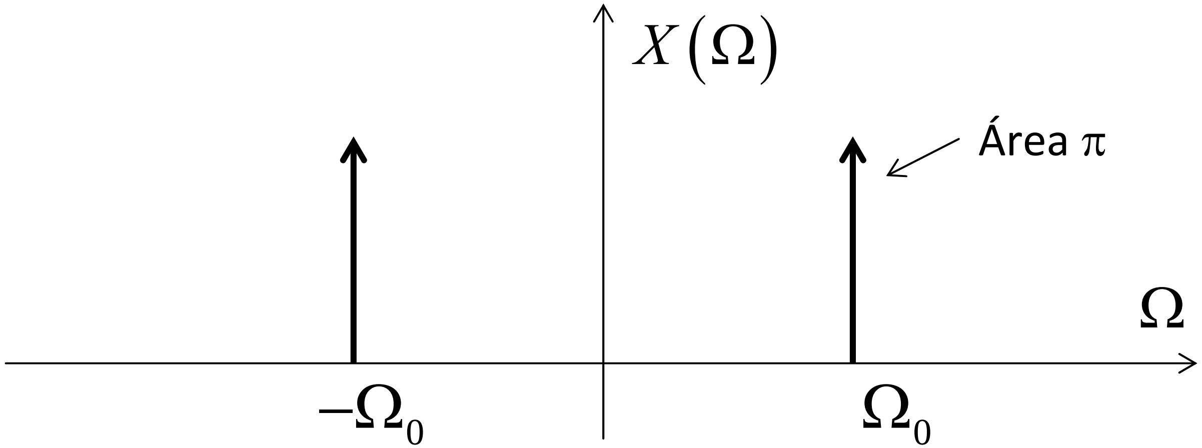
$$\boxed{X(F) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta\left(F - kF_0\right)} \qquad (5)$$

Ejemplo:

$$x(t) = \cos(\Omega_0 t) = \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 t}$$

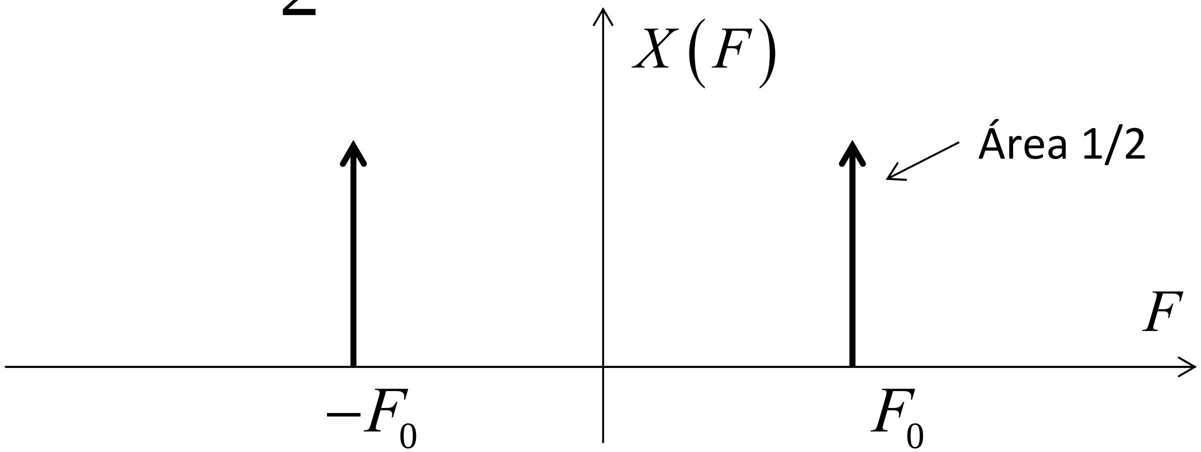
La transformada de Fourier resulta entonces

$$X(\Omega) = \pi\left[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)\right]$$



Expresando la Transformada en función de F resulta:

$$X(F) = \frac{1}{2}\left[\delta(F - F_0) + \delta(F + F_0)\right]$$



Si graficamos los coeficientes de la Serie de Fourier de *x(t)* resulta