Sistemas y Señales I

Respuesta al escalón de sistemas de 2do orden

Temario: Cap. 3

Respuesta al Escalón Sistemas de 2º Orden

Nos interesa analizar la respuesta al escalón de un sistema de segundo orden, a partir de condiciones iniciales nulas, con una función transferencia (normalizada) de la forma:

- ***Función Transferencia:***

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s - p_1)\cdot(s - p_2)}$$

con:

ξ : coeficiente de amortiguamiento

ω_n : pulsación natural (no amortiguada)

$p_{1,2}$: polos del sistema

La forma de la respuesta al escalón va a depender de la localización de los polos en el plano complejo que, para una pulsación natural ω_n dada, dependerá del coeficiente de amortiguamiento ξ.

Consideraremos solo los casos para los cuales la respuesta es acotada. Estos son:

1. $\xi > 1$ → polos reales negativos distintos

2. $\xi = 1$ → polos reales negativos iguales

3. $0 < \xi < 1$ → polos complejos conjugados on parte real negativa

4. $\xi = 0$ → polos complejos conjugados imaginarios puros

- ***Polos:*** raíces del polinomio denominador

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Aplicando la resolvente:

$$p_{1,2} = -\xi\,\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \qquad (1)$$

La ubicación de los polos en el plano complejo va a depender del valor del coef. de amortiguamiento ξ.

1. Si $1 < \xi$, la expresión es la (1) y resultan dos **polos reales negativos distintos**. Notar que en este caso es

$$\xi\omega_n > \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

La respuesta al escalón en este caso es **sobreamortiguada**.

2. Si $\xi = 1$, los polos resultan $p_{1,2} = -\omega_n$, es decir se tienen dos **polos reales negativos iguales**, y la respuesta al escalón se dice que tiene **amortiguamiento crítico**.

3. Si $0 < \xi < 1$, los polos resultan

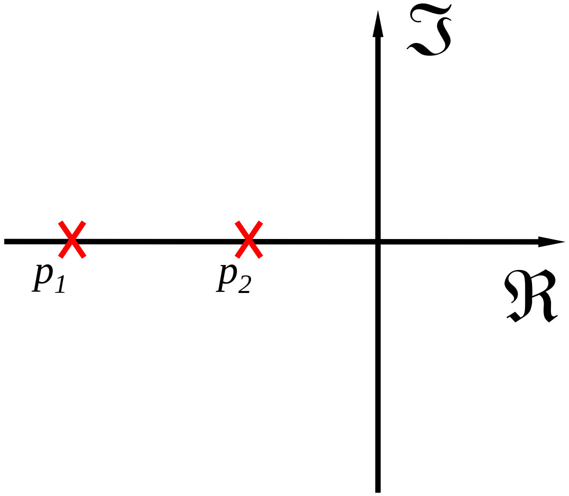
$$p_{1,2} = -\xi\,\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Es decir, se tienen dos **polos complejos conjugados con parte real negativa**, y la respuesta al escalón se dice que es **subamortiguada**.

4. Si $\xi = 0$, los polos resultan $p_{1,2} = \pm j\omega_n$, es decir se tiene dos **polos complejos conjugados imaginarios puros**, y la respuesta al escalón se dice que es **sin amortiguamiento**.

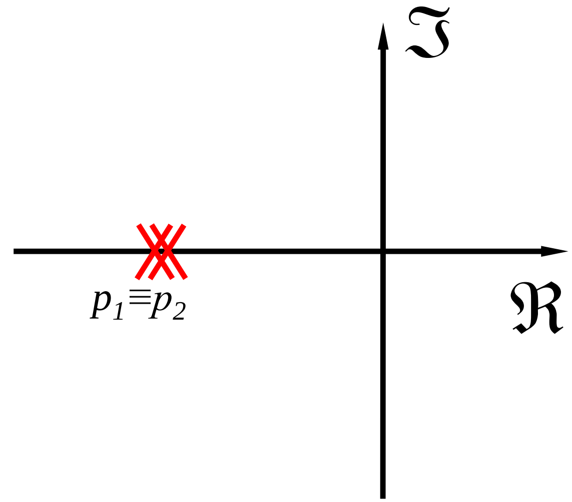
Caso Sobre-amortiguado

$$\xi^2 - 1 > 0$$



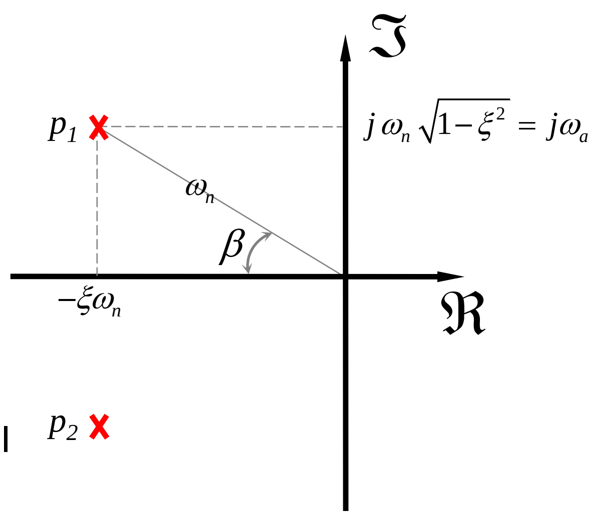
Caso Crítico

$$\xi^2 - 1 = 0$$



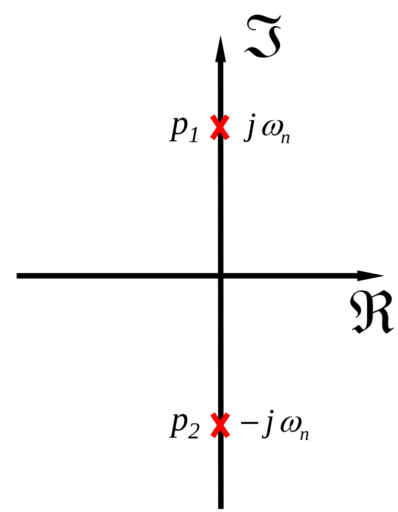
Caso Sub-amortiguado

$$\xi^2 - 1 < 0$$



Caso Sin Amortiguamiento

$$\xi = 0$$



- ***Respuesta al escalón:***

$$\mu(t) \longrightarrow \boxed{\;G(s)\;} \longrightarrow y(t)$$

$$u(t) = \mu(t) \quad \rightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\,\mu(t-\tau)\,d\tau \quad \rightarrow \quad Y(s) = G(s)U(s)$$

Reemplazando $G(s)$, tenemos:

$$Y(s) = \frac{1}{s}\,\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \rightarrow \quad y(t) = \mathbf{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

Dependiendo de la ubicación de los polos de $G(s)$ tendremos diferentes respuestas $y(t)$.

- **Caso Sobre-amortiguado ($\xi > 1$):**

$$p_{1,2} = -\xi\,\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\ , \qquad p_{1,2} \in \mathbb{R}^-$$

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s\cdot(s-p_1)\cdot(s-p_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-p_1} + \frac{C}{s-p_2} \rightarrow y(t) = A + B\,e^{p_1 t} + C\,e^{p_2 t}$$

$$A = \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = 1$$

$$B = \lim_{s\to p_1}(s-p_1)Y(s) = \frac{\omega_n^2}{p_1(p_1-p_2)}$$

$$C = \lim_{s\to p_2}(s-p_2)Y(s) = \frac{\omega_n^2}{p_2(p_2-p_1)}$$

Reemplazando, tenemos:

$$\boxed{y(t) = \left[1 + \frac{\omega_n^2}{p_1 - p_2}\left(\frac{1}{p_1}e^{p_1 t} - \frac{1}{p_2}e^{p_2 t}\right)\right]\mu(t)}$$

Para poder graficar la respuesta calcularemos primero

$$y(0^+) \;,\; \dot{y}(0^+) \;,\; y(\infty)$$

lo que nos permitirá determinar si la respuesta tiene un salto en cero, con que derivada arranca la respuesta y a que valor tiende. Para el cálculo podemos hacer uso del Teorema de Valor Inicial (TVI) de la Transformada de Laplace para $y(t)$ y su derivada, y del Teorema del Valor Final (TVF) de la Transformada de Laplace para $y(t)$.

$$y(0^+) = \lim_{s \to \infty} sY(s)$$ **TVI para $y(t)$**

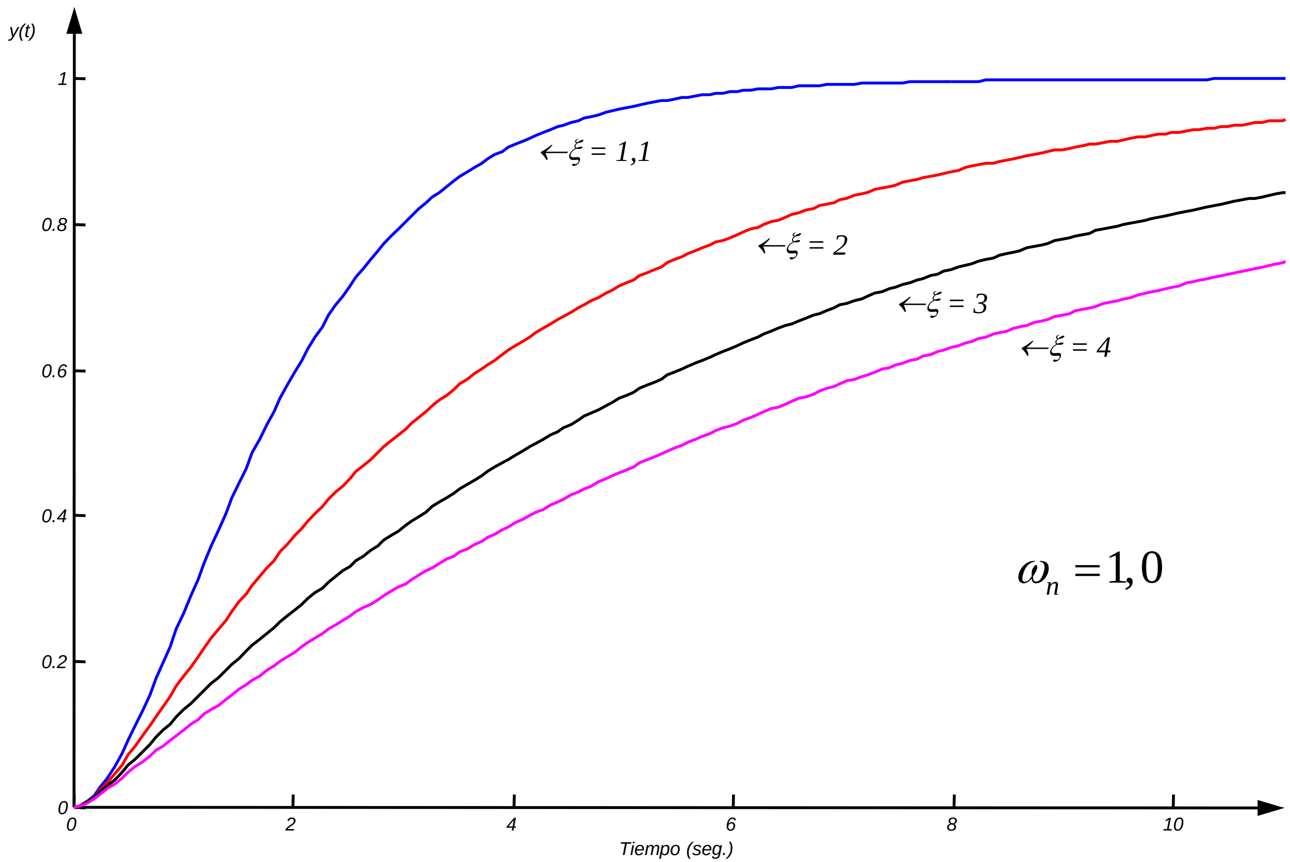
$$\dot{y}(0^+) = \lim_{s \to \infty} s\left[sY(s)\right]$$ **TVI para la derivada de $y(t)$**

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} sY(s)$$ **TVF para $y(t)$**

Las condiciones iniciales y el valor final resultan:

$$y(0^+) \overset{TVI}{\downarrow}= \lim_{s\to\infty} sY(s) = 0 \qquad , \qquad y(\infty) \overset{TVF}{\downarrow}= \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = 1$$

$$\dot{y}(0^+) \overset{TVI}{\downarrow}= \lim_{s\to\infty} s\underbrace{\left[sY(s)\right]}_{L\left\{\frac{dy}{dt}\right\}} = \lim_{s\to\infty} \frac{s\,\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{'\infty'}{'\infty'} \overset{L'H}{\downarrow}= \lim_{s\to\infty} \frac{\frac{d}{ds}\left(s\,\omega_n^2\right)}{\frac{d}{ds}\left(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2\right)} = \lim_{s\to\infty} \frac{\omega_n^2}{2s + 2\xi\omega_n} = 0$$



- **Caso Amortiguamiento Crítico $(\xi = 1)$:**

$$p_{1,2} = -\omega_n \qquad \xi = 1$$

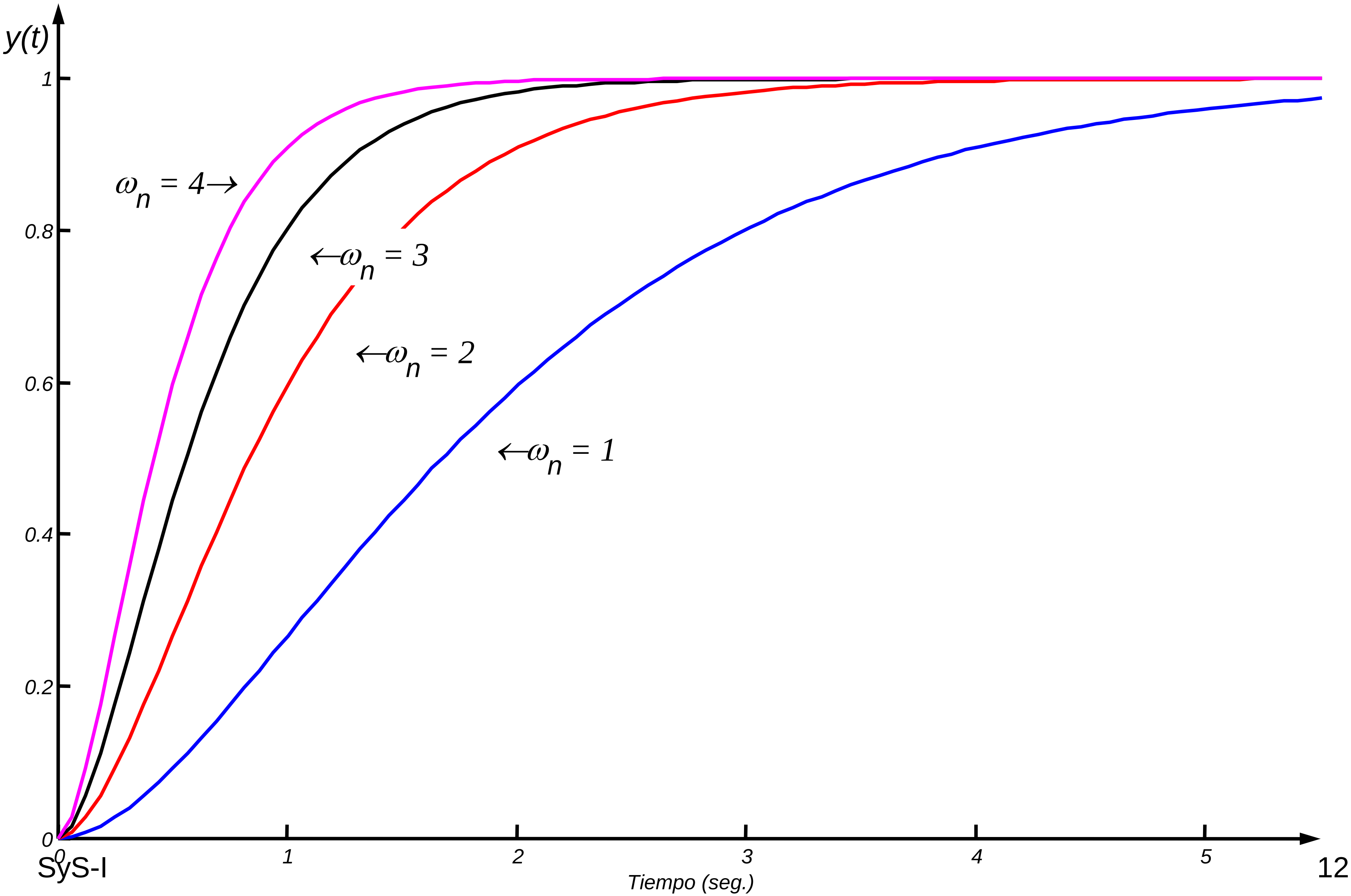
$$Y(s) = \frac{1}{s}\,\frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+\omega_n)} + \frac{C}{(s+\omega_n)^2} \rightarrow y(t) = A + B\,e^{-\omega_n t} + C\,t\,e^{-\omega_n t}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = 1 \\ B &= \lim_{s\to -\omega_n} \frac{d}{ds}\left[(s+\omega_n)^2\, Y(s) \right] = -1 \\ C &= \lim_{s\to -\omega_n} (s+\omega_n)^2\, Y(s) = -\omega_n \end{aligned}\right\} \quad Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+\omega_n)} - \frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}$$

Antitransformando, queda:

$$\boxed{y(t) = \left[1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n\, t\, e^{-\omega_n t} \right] \mu(t)}$$

Evoluciones temporales (amotiguamiento crítico):



- **Caso Sub-amortiguado $(0 < \xi < 1)$:**

$$p_{1,2} = -\xi\,\omega_n \pm j \underbrace{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}_{\omega_a = \text{pulsación amortiguada}} \qquad \text{(polos complejos conjugados)}$$

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s\cdot(s-p_1)\cdot(s-p_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-p_1} + \frac{C}{s-p_2} \quad \rightarrow \quad y(t) = A + B\,e^{p_1 t} + C\,e^{p_2 t}$$

$$A = \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = 1$$

$$B = \lim_{s\to p_1}(s-p_1)Y(s) = \frac{\omega_n^2}{p_1(p_1-p_2)} = -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$C = \lim_{s\to p_2}(s-p_2)Y(s) = \frac{\omega_n^2}{p_2(p_2-p_1)} = -\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = B^*$$

$$y(t) = 1 + B\,e^{p_1 t} + C\,e^{p_2 t} = 1 + B\,e^{p_1 t} + B^*\,e^{p_1^* t} = 1 + B\,e^{p_1 t} + \left(B\,e^{p_1 t}\right)^*$$

$$y(t) = 1 + 2\cdot\Re\left\{B\,e^{p_1 t}\right\} = 1 + 2\cdot\Re\left\{\left(-\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\cdot e^{-\xi\omega_n t}\cdot\left(\cos(\omega_a t) + j\sin(\omega_a t)\right)\right\}$$

$$\boxed{y(t) = \left[1 - e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos(\omega_a t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_a t)\right)\right]\mu(t)}$$

$$y(t) = \left[1 - e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos(\omega_a t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_a t) \right) \right] \mu(t)$$

Teniendo en cuenta que:

$$u \cdot \cos\alpha + v \cdot \sin\alpha = (u,v) \bullet \left(\cos\alpha, \sin\alpha\right)$$

$$= \left|(u,v)\right| \cdot \left|(\cos\alpha, \sin\alpha)\right| \cdot \cos\left(\alpha - \arctan {}^{v}\!/_{u}\right) \; ,$$

podemos reescribir *y(t):*

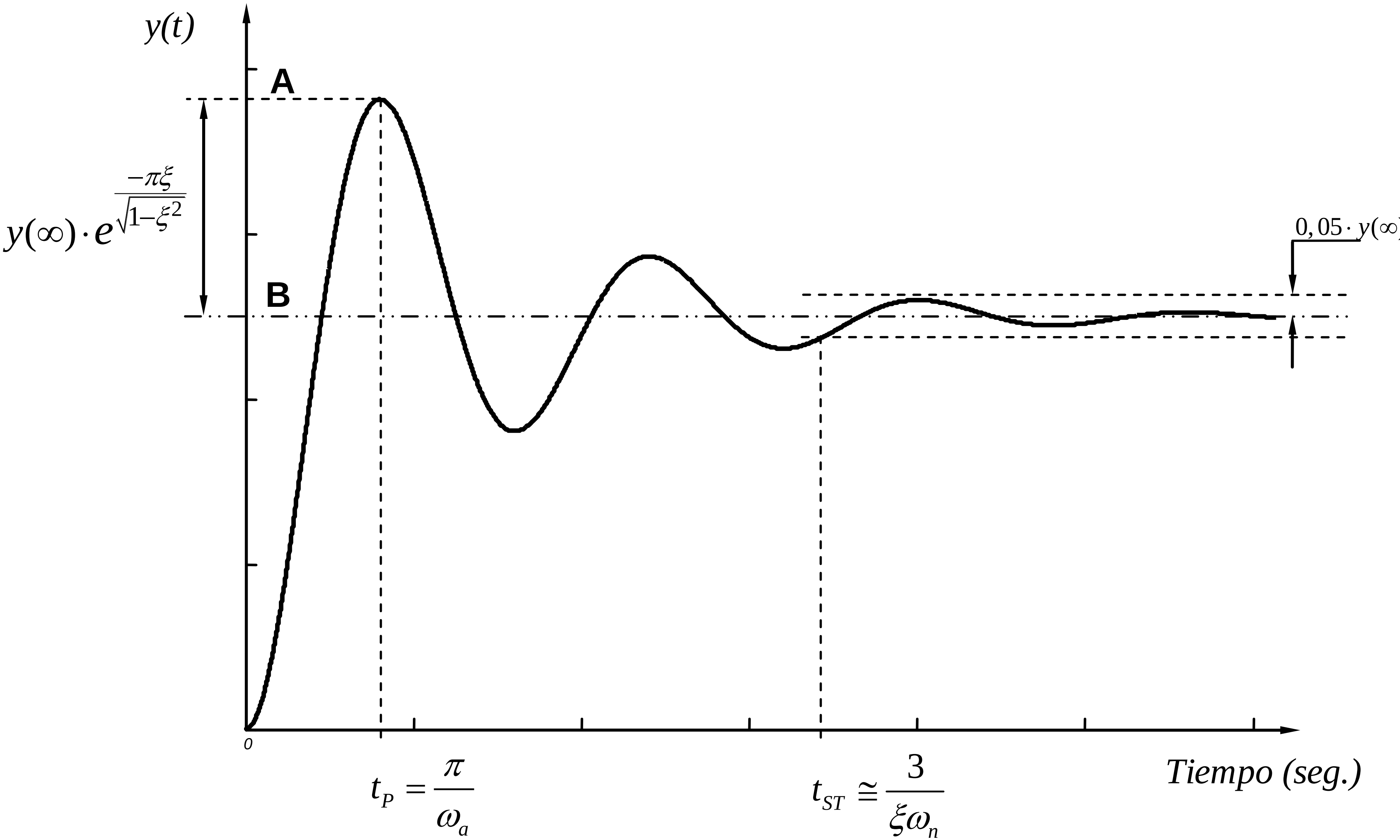
$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \cos\left(\omega_a t - \left({}^{\pi}\!/_{2} - \beta\right)\right)$$

O bien:

$$y(t) = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_a t + \beta\right) \right] \mu(t)$$

$$\beta = \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \qquad \omega_a = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

Evolución temporal sub-amortiguada:



Para caracterizar la respuesta subamortiguada se suelen definir algunos parámetros sobre la misma. Por ejemplo:

1. **Tiempo de pico:** es el tiempo que tarda en alcanzar el primer pico y corresponde a un semiperíodo amortiguado, es decir

$$t_p = \frac{2\pi}{\omega_a}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{\omega_a} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

2. **Sobrevalor (SV)**

$$SV = \frac{A-B}{B} = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

3. **Tiempo de establecimiento al 5 % :** es el tiempo que tarda la respuesta en entrar en una banda de $\pm 5\%$ alrededor del valor final sin salir de ella.

$$t_{ST(5\%)} \approx \frac{3}{\xi\omega_n}$$

- ***Caso Sin Amortiguamiento*** $(\xi = 0)$**:**

$$p_{1,2} = \pm j\,\omega_n \quad \text{(polos imaginarios puros)}$$

$$\xi = 0$$

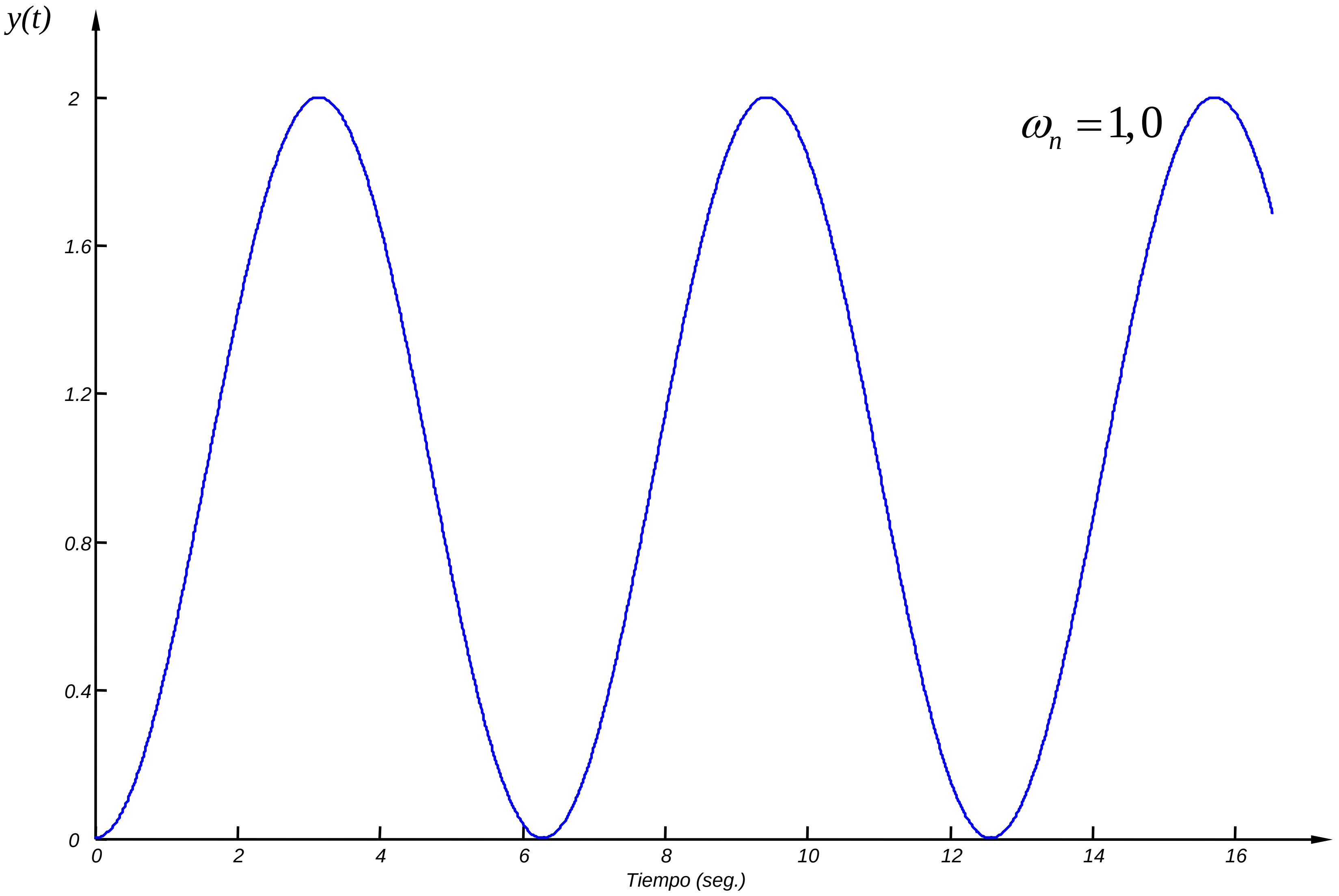
$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s\cdot(s - j\omega_n)\cdot(s + j\omega_n)} = \frac{\omega_n^2}{s\cdot(s^2+\omega_n^2)}^{(*)} = \frac{A}{s} + \frac{B\cdot s + C}{s^2+\omega_n^2}$$

$$= \frac{A\cdot(s^2+\omega_n^2) + (B\cdot s + C)\cdot s}{s\cdot(s^2+\omega_n^2)} = \frac{(A+B)\cdot s^2 + C\cdot s + A\cdot\omega_n^2}{s\cdot(s^2+\omega_n^2)} \quad (**)$$

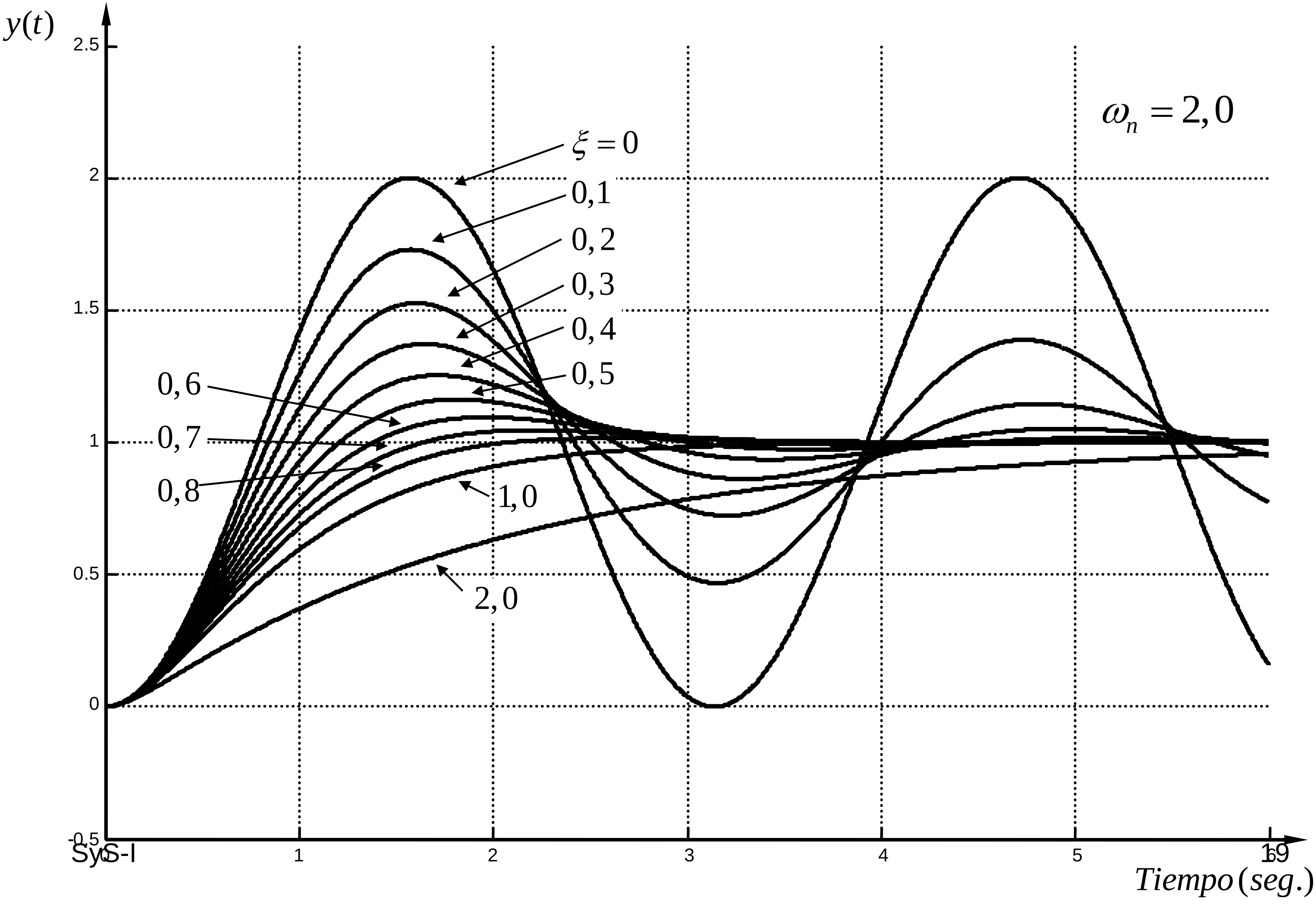
Comparando (*) y (**) tenemos que A = 1, B = -1 y C = 0. Entonces:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\omega_n^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{y(t) = \left[1 - \cos(\omega_n\, t)\right]\mu(t)}$$

Evolución temporal (caso sin amortiguamiento):

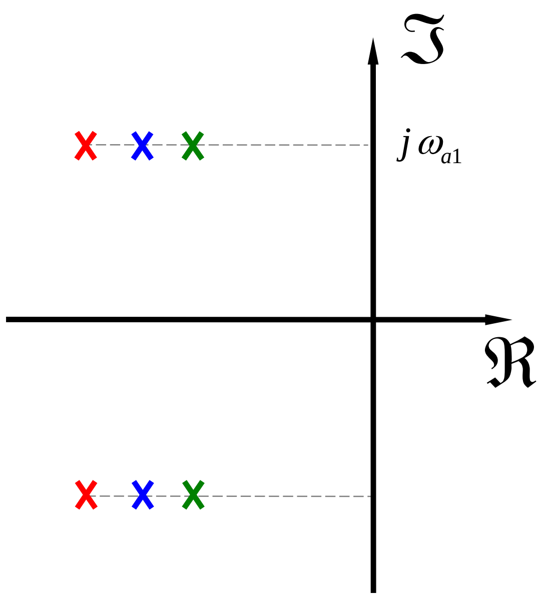


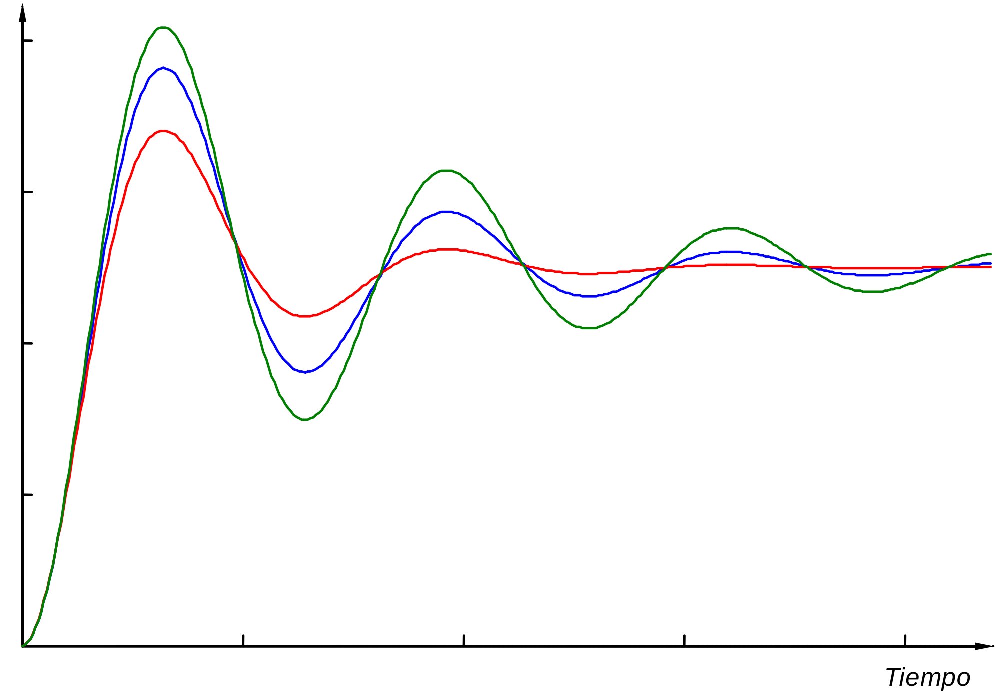
Rta. al escalón para distintos valores de ξ (ω_n constante)



• Caso Sub-amortiguado. Ejemplos:

Ejemplo 1: $\omega_{a1}=\omega_{a2}=\omega_{a3}$

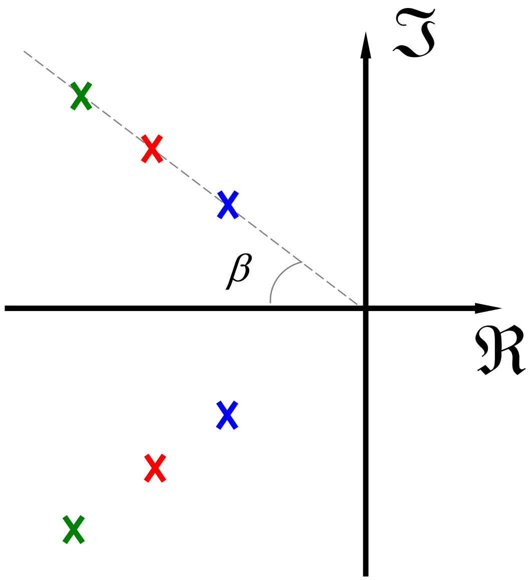


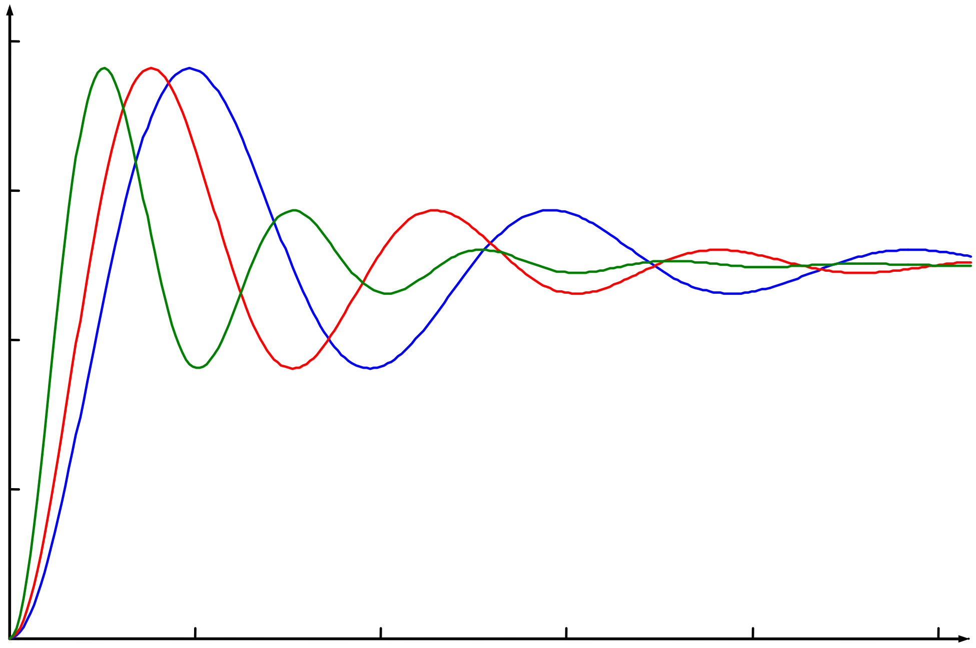


Al tener los sistemas igual frecuencia amortiguada ω_a, el tiempo de pico t_P coincide en las tres evoluciones.

$$t_P = \frac{\pi}{\omega_a}$$

Ejemplo 2: $\xi_1=\xi_2=\xi_3$

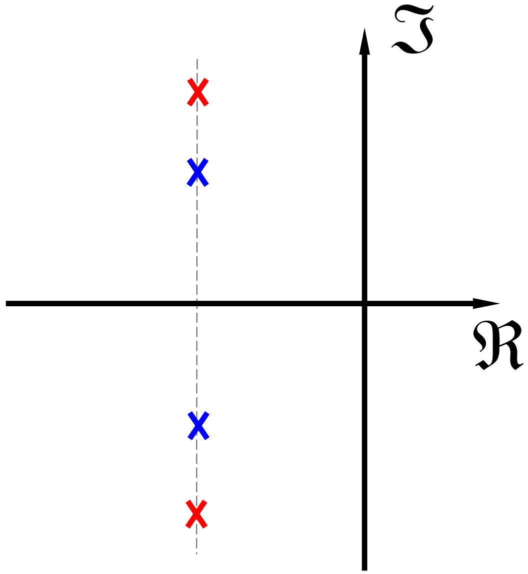


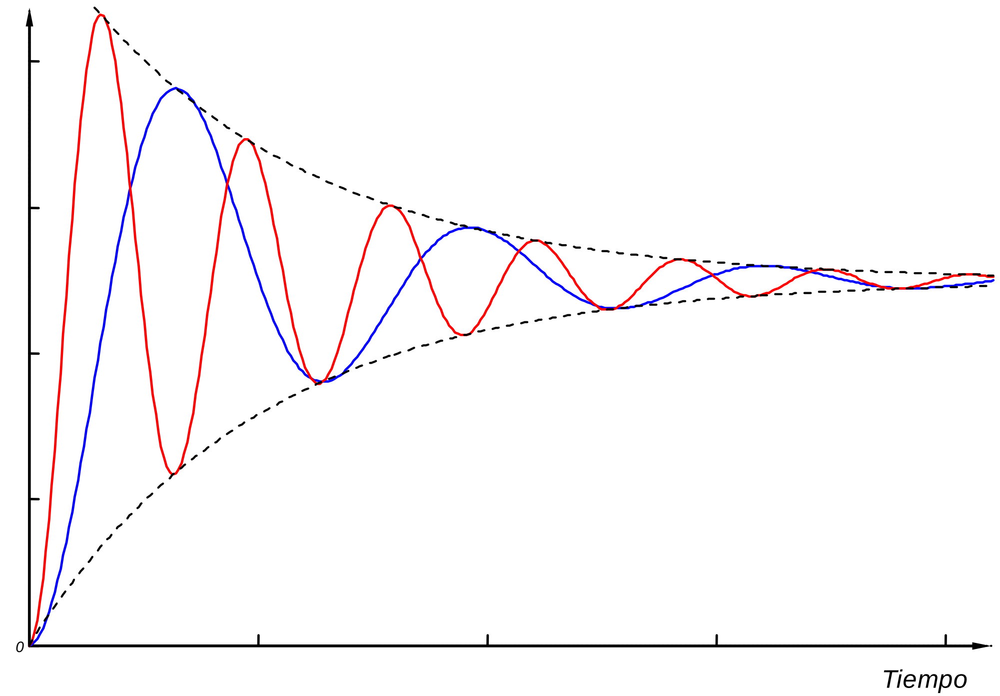


Los sistemas comparten el mismo ξ de modo que el sobrevalor es el mismo en los tres casos. Recordemos que el SV sólo depende de ξ:

$$SV = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Ejemplo 3: $\xi_1\omega_{n1}=\xi_2\omega_{n2}$





Los sistemas poseen polos con idéntica parte real

$$\Re\{p_i\} = -\xi\,\omega_n$$

por lo que el *settling time* t_{ST} coincidirá en ambas evoluciones.

$$t_{ST_{5\%}} \cong \frac{3}{\xi\omega_n}$$