Problema Resuelto 1:

Sea *H(s)* la función transferencia de un sistema lineal estacionario que se desea controlar mediante un control **Proporcional-Derivativo** (con constantes k_P y k_D), tal como se muestra en la Figura 1.

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 61s^2 + 2500s - 500}$$

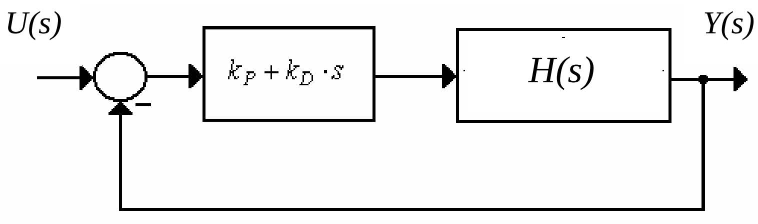


Figura 1. Sistema en lazo cerrado del Problema 2.

a. Indique si el sistema en lazo abierto (es decir *H(s)*) es BIBO estable. Justifique su respuesta.

b. Determine para que rango de valores de k_P y k_D el sistema en lazo cerrado de la Figura 2 resulta BIBO estable. Realice una gráfica en el plano (k_P, k_D) en caso de que sea una región.

c. Calcule los valores de k_P y k_D de forma que los polos del sistema en lazo cerrado estén ahora ubicados en:

$$\begin{cases} s_1 = -30 + j40 \\ s_2 = -30 - j40 \\ s_3 = -1 \end{cases}$$

Solución:

a. Vemos que no se verifica la condición necesaria para BIBO estabilidad que es que el polinomio denominador de *H(s)* esté completo con todos los coeficientes del mismo signo, ya que el coeficiente de s^0 es negativo. En conclusión la transferencia en lazo abierto **no es BIBO estable**. Notar que en este caso no es necesario aplicar el Criterio de Routh.

Los polos de *H(s)* resultan:

p_1 = -30.5995 +39.6970i

p_2 = -30.5995 -39.6970i

p_3 = 0.1990 **polo inestable (en el semiplano derecho)**

b. La función transferencia en lazo cerrado resulta

$$G(s)=\frac{\dfrac{k_P+k_D s}{s^3+61s^2+2500s-500}}{1+\dfrac{k_P+k_D s}{s^3+61s^2+2500s-500}}=\frac{k_P+k_D s}{s^3+61s^2+2500s-500+k_P+k_D s}$$

$$G(s)=\frac{k_P+k_D s}{s^3+61s^2+\left(2500+k_D\right)s+\left(k_P-500\right)}$$

$$G(s)=\frac{k_D\left(s+\dfrac{k_P}{k_D}\right)}{s^3+61s^2+\left(2500+k_D\right)s+\left(k_P-500\right)} \qquad (1)$$

Para determinar el rango de valores de k_P y k_D para que el sistema en lazo cerrado resulte BIBO estable construímos la Tabla de Routh:

s^3	1	$\left(2500+k_D\right)$
s^2	61	$\left(k_P-500\right)$
s^1	b_1	0
s^0	c_1	0

$$b_1=-\frac{\left(k_P-500\right)-61\left(2500+k_D\right)}{61}$$

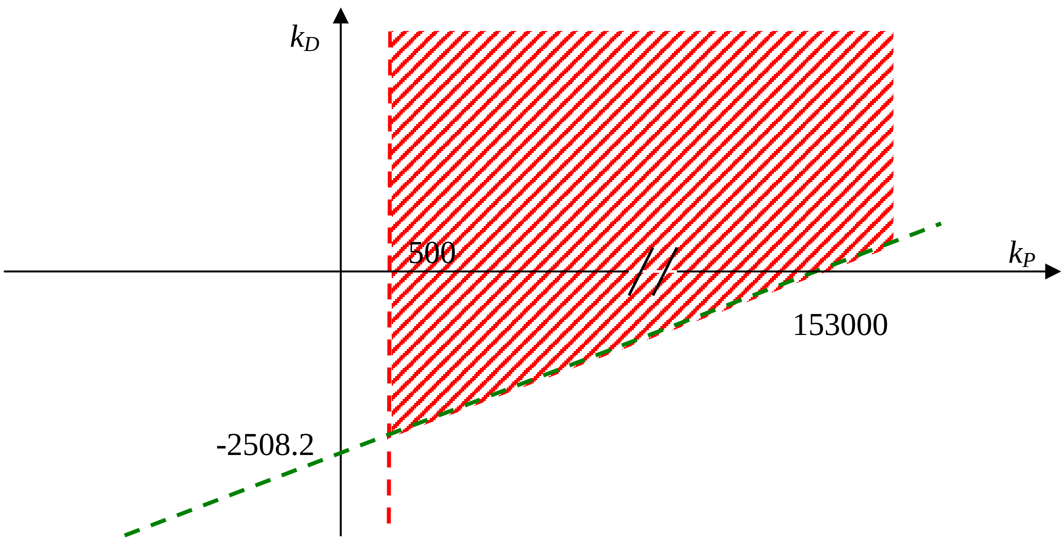
$$c_1=\left(k_P-500\right)$$

El Criterio de Routh establece que para que el sistema sea BIBO estable no debe haber cambios de signo en la primer columno del arreglo, es decir debe ser:

$$\begin{cases} -\dfrac{\left(k_P-500\right)-61\left(2500+k_D\right)}{61}>0 \\ k_P-500>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(k_P-500\right)-61\left(2500+k_D\right)<0 \\ k_P>500 \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} k_P-61k_D-153000<0 \\ k_P>500 \end{cases}$$



c. Se quieren determinar los valores de k_P y k_D de manera que los polos del sistema en lazo cerrado resulten:

$$\begin{cases} s_1 = -30 + j40 \\ s_2 = -30 - j40 \\ s_3 = -1 \end{cases}$$

El polinomio denominador de la transferencia en lazo cerrado será entonces de la forma:

$$\begin{aligned} (s-s_1)(s-s_2)(s-s_3) &= (s+30-j40)(s+30+j40)(s+1) \\ &= (s^2+60s+1600)(s+1) \\ &= s^3+61s^2+1660s+1600 \end{aligned}$$

Comparando con el denominador en (1), resulta:

$$\begin{cases} 2500+k_D = 1660 \\ k_P - 500 = 1600 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} k_D = -840 \\ k_P = 2100 \end{cases}}$$

De la ecuación (1) vemos que para que el sistema sea de **mínima fase** k_P y k_D deberían ser del mismo signo. Como esto no se verifica para los valores calculados el sistema en lazo cerrado resulta de **no mínima fase**.

Problema Resuelto 2:

La Fig. 2 muestra los Diagramas de Bode de Amplitud y Fase correspondientes a un sistema cuya Función Transferencia es la siguiente

$$G(s) = K \; \frac{s+200}{s^2+2020\,s+40000}$$

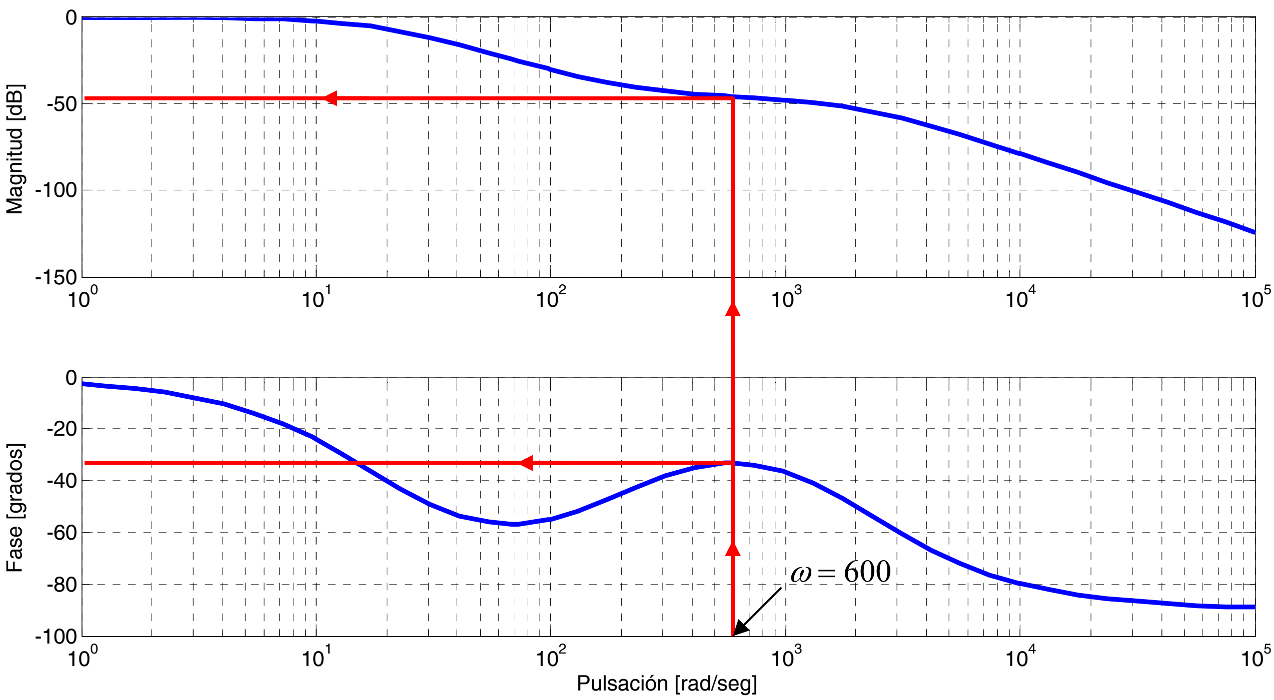


Figura 2. Diagramas de Bode de Amplitud y Fase.

a. Calcule el valor de K a partir del Diagrama de Bode y de la Función Transferencia dada.

b. Halle la respuesta del sistema en **règimen permanente senoidal** a una entrada

$$u(t) = 4\sin(600t)$$

c. Hallar la respuesta del sistema a un **escalón unitario**, a partir de condiciones iniciales $y(0)=0$, $y'(0)=1$, siendo $y(t)$ la salida del sistema, y para un valor de K = 1.

Solución:

a. La función transferencia puede escribirse como:

$$G(s) = K\ \frac{s+200}{s^2+2020s+40000} = K\frac{(s+200)}{(s+20)(s+2000)}$$

$$= \frac{200K}{20\times 2000}\frac{\left(\frac{s}{200}+1\right)}{\left(\frac{s}{20}+1\right)\left(\frac{s}{2000}+1\right)}$$

Del diagrama de Bode de amplitud vemos que:

$$\left|G(j0)\right|_{dB} = 0 \text{ dB} \ \Rightarrow\ \left|G(j0)\right| = 1$$

Por lo que se verifica que:

$$\frac{200|K|}{20\times 2000} = 1 \Rightarrow |K| = 200$$

Por otra parte, del diagrama de Bode de fase vemos que $\measuredangle G(j0) = 0 \Rightarrow K > 0$. En conclusión resulta K = 200

b. Del diagrama de Bode vemos que para $\omega = 600$ rad/s es:

$$\left|G(j600)\right|_{dB} \approx -49 \text{ dB} \Rightarrow 20\log_{10}\left|G(j600)\right| \approx -49 \text{ dB}$$

$$\Rightarrow \left|G(j600)\right| \approx 10^{-\frac{49}{20}} = 0.0035$$

$$\measuredangle G(j600) \approx -34^{\circ} = -\frac{34\pi}{180}\text{rad} \ = -0.5934 \text{ rad}$$

La respuesta en régimen permanente senoidal a la entrada $u(t) = 4\sin(600t)$ resulta entonces:

$$y_{RPS} = 4\left|G(j600)\right|\text{sen}\left(600t + \measuredangle G(j600)\right)$$

$$= 4\times 0.0035 \text{ sen}(600t - 0.5934)$$

$$y_{RPS} = 0.014 \text{ sen}(600t - 0.5934)$$

c. La función transferencia para K = 1 resulta:

$$G(s)=\frac{(s+200)}{(s+20)(s+2000)}=\frac{(s+200)}{s^2+2020s+40000}=\frac{Y(s)}{U(s)}$$
$$\Rightarrow Y(s)\left(s^2+2020s+40000\right)=U(s)(s+200)$$
$$\Rightarrow y''(t)+2020y'(t)+40000y(t)=u'(t)+200u(t)$$

Transformando Laplace con condiciones iniciales no nulas resulta:

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2020sY(s)-2020y(0)+40000Y(s)=U(s)(s+200)$$
$$Y(s)\left(s^2+2020s+40000\right)-(s+2020)y(0)-y'(0)=U(s)(s+200)$$
$$Y(s)=\frac{(s+2020)}{\left(s^2+2020s+40000\right)}y(0)+\frac{1}{\left(s^2+2020s+40000\right)}y'(0)+\frac{(s+200)}{\left(s^2+2020s+40000\right)}U(s)$$

Considerando que $y(0)=0$, $y'(0)=1$, y la entrada es un escalón unitario, es decir $u(n)=\mu(n)\Rightarrow U(s)=\frac{1}{s}$, resulta

$$\begin{aligned}Y(s)&=\frac{1}{\left(s^2+2020s+40000\right)}+\frac{(s+200)}{\left(s^2+2020s+40000\right)}\frac{1}{s}\\&=\frac{2(s+100)}{s\left(s^2+2020s+40000\right)}=\frac{2(s+100)}{s(s+20)(s+2000)}\\&=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+20)}+\frac{C}{(s+2000)}\end{aligned}$$

Calculamos los coeficientes de fracciones simples por residuos, es decir:

$$A=\lim_{s\to 0}\frac{2(s+100)}{(s+20)(s+2000)}=\frac{1}{200}$$
$$B=\lim_{s\to -20}\frac{2(s+100)}{s(s+2000)}=-\frac{2}{495}$$
$$C=\lim_{s\to -2000}\frac{2(s+100)}{s(s+20)}=-\frac{19}{19800}$$

Luego tomando la transformada de Laplace inversa resulta:

$$y(t)=\frac{1}{200}\mu(t)-\frac{2}{495}e^{-20t}\mu(t)-\frac{19}{19800}e^{-2000t}\mu(t)$$

Problema Resuelto 3:
Considere el sistema lineal estacionario en tiempo discreto representado por su función transferencia *H(z)* :

$$H(z)=\frac{1}{\left(1-0.5z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}\quad,\quad \mathrm{RDC}\left\{H(z)\right\}=\left\{z\,/\,0.5<|z|<2\right\}$$

a. Indique si el sistema es BIBO estable. Justifique su respuesta.
b. Indique si el sistema es causal, no causal o anticausal. Justifique su respuesta.
c. Determine la respuesta al impulso *h(n)* del sistema.

Solución:

a. Como se verifica que $\mathrm{RDC}\{H(z)\} = \{z/0.5 < |z| < 2\} \supset \{z/|z| = 1\}$, el sistema es BIBO estable (recordar que esta es una condición necesaria y suficiente para BIBO estabilidad).

b. La función transferencia *Z* puede escribirse como

$$H(z) = \frac{1}{(1-0.5z^{-1})(1-2z^{-1})} = \frac{z^2}{(z-0.5)(z-2)} \quad ; \quad \begin{cases} \text{ceros: } c_1 = c_2 = 0 \\ \text{polos: } p_1 = 0.5 \text{ , } p_2 = 2 \end{cases}$$

Como su región de convergencia es un anillo el sistema tiene una parte causal y una anticausal, es decir el sistema es **no causal.**

c. Separamos $H(z)$ en fracciones simples

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z}{(z-0.5)(z-2)} = \frac{A}{(z-0.5)} + \frac{B}{(z-2)}$$

$$\Rightarrow H(z) = \underbrace{\frac{A}{(1-0.5z^{-1})}}_{\substack{\text{causal} \\ \text{fila 3}}} + \underbrace{\frac{B}{(1-2z^{-1})}}_{\substack{\text{anticausal} \\ \text{fila 5}}}$$

Por residuos resulta:

$$A = \lim_{z \to 0.5} \frac{z}{(z-2)} = -\frac{1}{3}$$

$$B = \lim_{z \to 2} \frac{z}{(z-0.5)} = \frac{4}{3}$$

Luego

$$\boxed{h(n) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \mu(n) - \frac{4}{3} 2^n \mu(-n-1)}$$