A502 – Teoría de Sistemas y Señales

Problemas resueltos – Serie 1 – Partes I, II y III

<u>Problema 1:</u> Dadas las siguientes señales:

$$x_1(n) = 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right), \qquad x_2(n) = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right), \qquad x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

determine si son periódicas y, en caso de serlo, determine su período fundamental.

Una señal senoidal en TD es periódica si y sólo si su frecuencia f es un número racional. Entonces tendríamos que:

$$\cos(2\pi f(N+n)+\vartheta) = \cos(2\pi f\, n+\vartheta) \quad \forall \vartheta$$, que se verifica si y sólo si

$$2\pi f N = 2\pi f \Leftrightarrow f = \frac{k}{N} \Leftrightarrow f \text{ es racional}$$

siendo N el período de la señal senoidal y k entero.

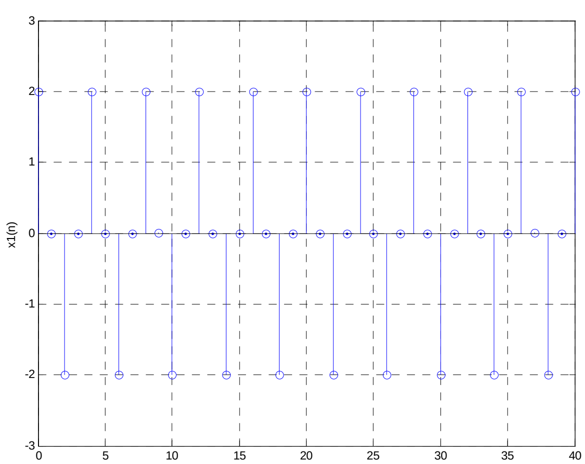
Considerando las señales propuestas tendríamos:

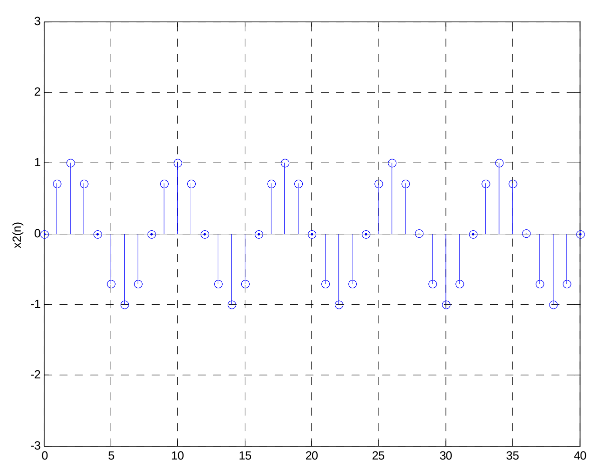
i. $x_1(N+n) = x_1(n) \Leftrightarrow 2\pi f_1 = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f_1 = \frac{1}{4}$ es **racional** $\Rightarrow$ $x_1(n)$ es periódica de período $N_1 = 4$

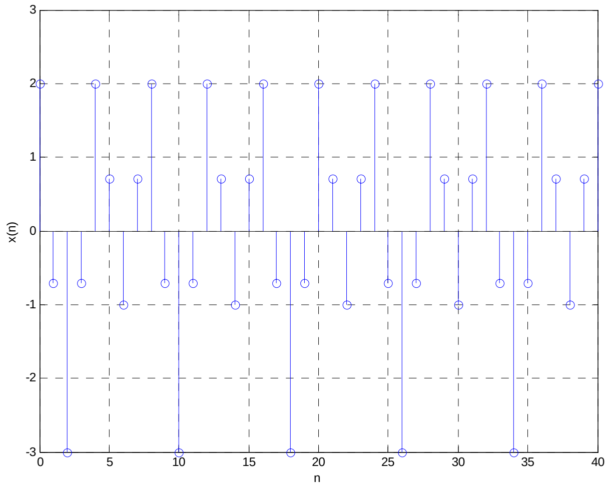
ii. $x_2(N+n) = x_2(n) \Leftrightarrow 2\pi f_2 = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow f_1 = \frac{1}{8}$ es **racional** $\Rightarrow$ $x_2(n)$ es periódica de período $N_2 = 8$

iii. Finalmente, $x(n)$ debe ser periódica con período igual al mínimo común múltiplo de N_1 y N_2, es decir, $N = 8$.

Esto se puede observar gráficamente:







Problema 2: Determine si las siguientes señales son de potencia y/o de energía. Calcule, cuando corresponda, la potencia y/o la energía.

i. $x(n) = 3 + (-1)^n$

$x(n)$ es una señal periódica de período N = 2, entonces si calculamos la potencia para una señal periódica resulta:

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{1}|x(n)|^2 = \frac{1}{2}(4^2 + 2^2) = 10 \quad \Rightarrow \quad \boxed{0 < P < \infty} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \infty}$$

$x(n)$ es una señal de **Potencia finita**.

ii. $x(n) = 2^n \cdot [\mu(n) - \mu(n-5)]$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{4}|x(n)|^2 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31 \quad \Rightarrow \quad \boxed{0 < E < \infty} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = 0}$$

Luego, $x(n)$ es una señal de **Energía finita**.

Problema 3: Analice si los siguientes sistemas son:

1. Estáticos o Dinámicos
2. Lineales o No lineales
3. Estacionarios o Inestacionarios
4. Causales o No Causales

i. $y''(t) + \sin(5t)y'(t) + 10y(t) = 3\sqrt{u(t)}$

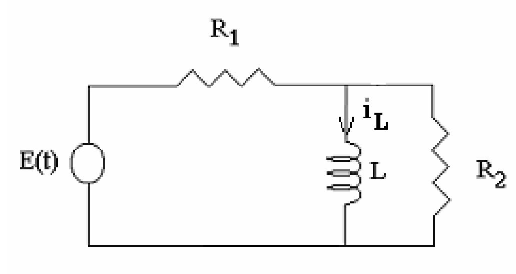
1. El sistema es **dinámico**, ya que $y(t)$ depende de valores pasados de la salida (depende del valor de las condiciones iniciales para la ecuación diferencial).
2. El sistema es **no lineal**, ya que no verifica el Principio de Superposición. Es decir:
   - Para una entrada $u_1(t)$, la ecuación diferencial resulta:
   $$y_1''(t) + \sin(5t)y_1'(t) + 10y_1(t) = 3\sqrt{u_1(t)} \qquad (1)$$
   - Para una entrada $u_2(t)$, la ecuación diferencial resulta:
   $$y_2''(t) + \sin(5t)y_2'(t) + 10y_2(t) = 3\sqrt{u_2(t)} \qquad (2)$$
   - Finalmente, para una entrada $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, la ecuación diferencial resulta:
   $$y''(t) + \sin(5t)y'(t) + 10y(t) = 3\sqrt{u(t)} = 3\sqrt{u_1(t) + u_2(t)} \qquad (3)$$

   Es evidente que la suma de las ecuaciones (1) y (2) es distinta de (3) debido al término $\sqrt{u(t)}$. Luego, el sistema no verifica superposición.
3. El sistema es inestacionario debido al término $\sin(5t)y'(t)$ que hace que la estructura del sistema cambie con el tiempo.
4. El sistema es **causal**, ya que depende de valores pasados de la salida.

ii. $y(n) = \begin{cases} u(n+1) & si\ u(n) \geq 0 \\ u(n-1) & si\ u(n) < 0 \end{cases}$

1. El sistema es **dinámico**, ya que la salida y(n) depende de valores pasados y futuros de la entrada.
2. Haciendo el mismo análisis que en el ítem i, se puede verificar que el sistema es **lineal**, ya que verifica el Principio de Superposición.
3. El sistema es **inestacionario** debido a que la estructura del sistema cambia según el valor de la entrada que se aplique (en particular, depende del signo de la entrada aplicada).
4. El sistema es **no causal**, ya que depende de valores futuros de la entrada.

Problema 4: Obtenga un Diagrama de Bloques del circuito eléctrico que se muestra a continuación, tomando como salida la corriente en la bobina, i_L.



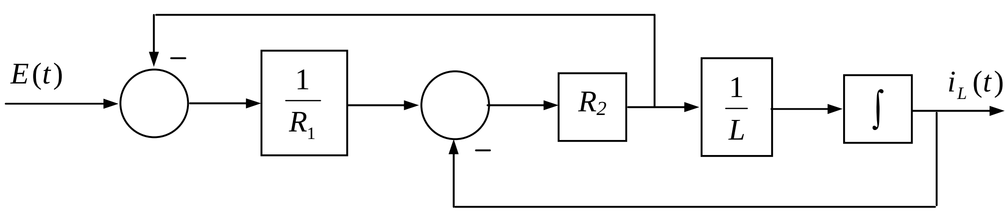
Las ecuaciones que describen al sistema son las siguientes:

$$v_L(t) = L\frac{di_L}{dt}\,, \qquad i_1(t) = i_L(t) + i_2(t)\,, \qquad v_L(t) = R_2\, i_2(t)\,, \qquad E(t) = R_1\, i_1(t) + v_L(t)$$

que escritas en forma causal resultan:

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int v_L(\tau)\ d\tau\,, \qquad v_L(t) = R_2\, i_2(t)\,, \qquad i_2(t) = i_1(t) - i_L(t)\,, \qquad i_1(t) = \frac{E(t) - v_L(t)}{R_1}$$

Siguiendo las ecuaciones anteriores, se obtiene Diagrama de Bloques siguiente:



Problema 2

iii. $x(t) = e^{at}\mu(t) \quad , \quad a > 0$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 dt = \int_{0}^{\infty} e^{2at} dt = \frac{1}{2a} e^{2at}\Big|_0^{\infty} \to \infty$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left|x(t)\right|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} e^{2at} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \frac{1}{2a} e^{2at}\Big|_0^{T}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \frac{1}{2a}\left(e^{2aT} - 1\right) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \frac{1}{2a} e^{2aT} \underset{\substack{\uparrow \\ L'Hopital}}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2} e^{2aT} \to \infty$$

Luego, *x(t)* no es señal ni de potencia ni de energía.