A502 – Teoría de Sistemas y Señales

Problemas resueltos – Series 2, 3 y 4

Problema 1: Dado un sistema lineal y estacionario caracterizado por la siguiente respuesta al impulso:

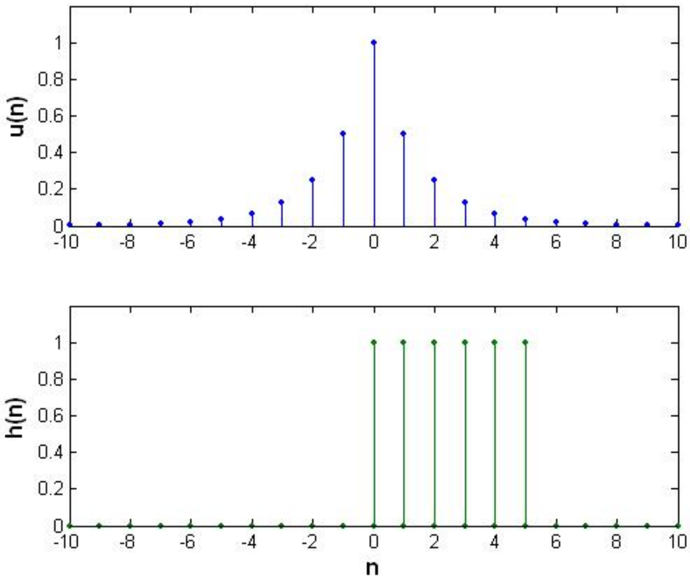
$$h(n) = \mu(n) - \mu(n-6)$$

Calcule la respuesta a la siguiente entrada: $u(n) = (\frac{1}{2})^{|n|}$

Si rescribimos la señal de entrada como:

$$u(n) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^{-n} & n \geq 0 \\ (\frac{1}{2})^{n} & n < 0 \end{cases}$$

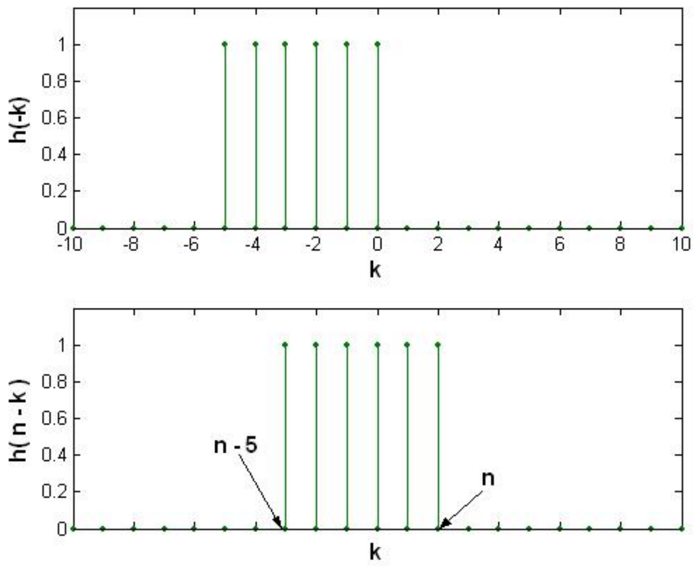
y graficamos ambas señales:



Ahora bien, como ya sabemos la respuesta a la entrada especificada puede calcularse como:

$$y(n) = u(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) \,.\, h(n-k)$$

Aplicando el método gráfico (invirtiendo y desplazando), veamos como será la señal *h(n–k)*



A partir de esta última gráfica resulta sencillo ver que habrá diferentes intervalos para el cálculo de la salida. En particular:

- Si n < 0

$$y(n) = \sum_{k=n-5}^{n} u(k) = \sum_{k=n-5}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k}$$

- Si $0 \le n \le 4$

$$y(n) = \sum_{k=n-5}^{n} u(k) = \sum_{k=n-5}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$

- Si n ≥ 5

$$y(n) = \sum_{k=n-5}^{n} u(k) = \sum_{k=n-5}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$

<u>Problema 2</u>: Un Sistema lineal y estacionario se caracteriza por la siguiente respuesta al impulso:

$$h(t) = e^{-t} \cdot \mu(t)$$

a. Calcule y grafique la respuesta al escalón unitario.

b. Utilizando dicho Sistema, se construye uno nuevo de acuerdo al Diagrama de Bloques de la Figura 1.

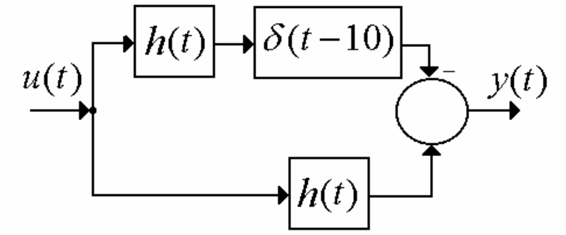


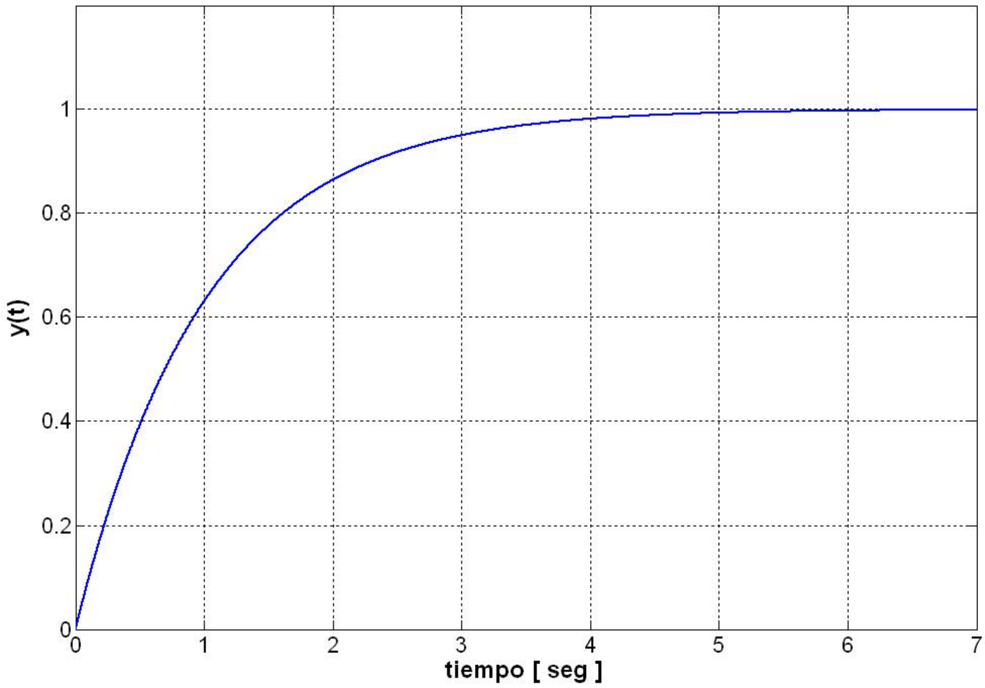
Figura 1. Diagrama de Bloques del nuevo Sistema.

Calcule y grafique la respuesta al impulso $g(t)$ del nuevo sistema.

c. Calcule y grafique la respuesta del sistema de la Figura 1 a la señal de tipo pulso de duración finita $u(t) = \mu(t) - \mu(t-100)$.

a. La respuesta al escalón puede calcularse como:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= u(t) * h(t) = h(t) * u(t) = \left(e^{-t} \cdot \mu(t)\right) * \mu(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} \cdot \mu(\tau) \cdot \mu(t-\tau)\, d\tau = \left[\int_{0}^{t} e^{-\tau}\, d\tau\right] \mu(t) \\
&= \left[\left(-e^{-\tau}\right)\Big|_{0}^{t}\right] \mu(t) = \left(1-e^{-t}\right)\mu(t)
\end{aligned}
$$



b. Aplicando álgebra de bloques sabemos que la respuesta al impulso de la rama superior es la convolución de los 2 bloques, en este caso es $h(t-10)$. Luego la respuesta al impulso total es:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= u(t) * h(t) - u(t) * h(t-10) \\
&= u(t) * [\ h(t) - h(t-10)\ ] \\
\therefore\ g(t) &= h(t) - h(t-10)
\end{aligned}
$$

siendo *g(t)* la respuesta al impulso del sistema total

c. Existen varias formas de calcular la respuesta a la entrada dada. Una sería aprovechar las características de linealidad y estacionariedad del sistema y aplicar superposición, es decir, calcular la respuesta al escalón unitario $\mu(t)$ y luego sumarle/restarle esa misma señal desplazada en (*t – 100)*.

Analíticamente:

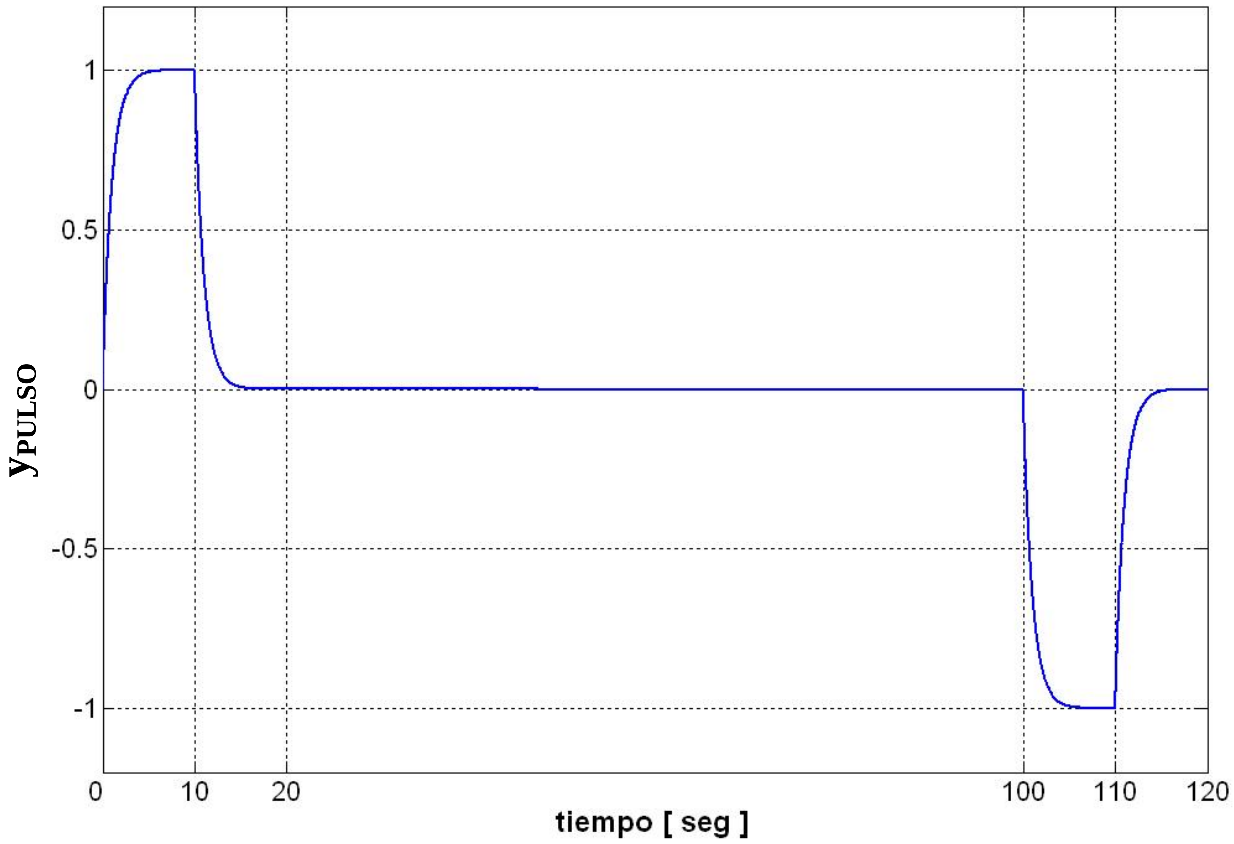
$$y_{PULSO}(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

donde $y_1(t)$ es la respuesta al escalón unitario, $\mu(t)$, del sistema con respuesta al impulso $g(t)$ y $y_2(t)$ es la respuesta al escalón unitario desplazado, - $\mu(t-100)$. Pero como el sistema es estacionario si aplico la misma entrada en el instante $t=100$ obtengo la salida en el instante $t=0$ desplazada. Así, si:

$$y_1(t) = \mu(t) * [\ h(t) - h(t-10)\ ] = (\mu(t) * h(t)) - (\mu(t) * h(t-10))$$
$$= y(t) - y(t-10)$$

donde $y(t)$ es la señal calculada en el apartado **a.** Luego $y_2(t)$ por estacionariedad es:7

$$y_2(t) = -y_1(t-100) = -y(t-100) + y(t-110)$$



Problema 3: Una técnica utilizada para detectar el lugar exacto en el que se halla una pérdida en una cañería consiste en hallar la correlación entre el sonido que se escucha en dos puntos distantes conectados a dicho caño, como muestra la Figura 2. [1]

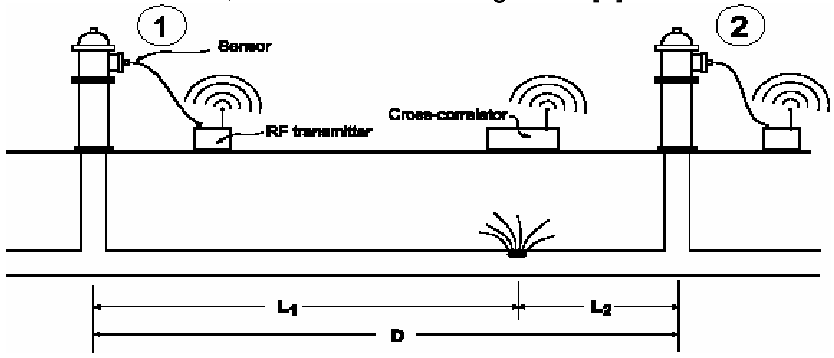


Figura 2. Esquema para detección de pérdidas en cañerías.

En efecto, si el sonido de la pérdida viaja a una velocidad c , el retardo con el que llegará al primer sensor será $\Delta t_1 = \frac{L_1}{c}$, mientras que llegará al segundo con un retardo igual a $\Delta t_2 = \frac{L_2}{c}$. Si las señales de sonido son muestreadas a una frecuencia *F*, los retardos discretos pueden escribirse como $N_1 = \frac{L_1 \cdot F}{c}$ y $N_2 = \frac{L_2 \cdot F}{c}$ respectivamente. Asumiendo entonces que ambas señales contienen el sonido de la pérdida *x*(*n*) y ruido blanco aditivo, resulta que las señales transmitidas por los sensores son, respectivamente

$$x_1(n) = x(n - N_1) + w_1(n)$$
$$x_2(n) = x(n - N_2) + w_2(n)$$

El Cross-correlator puede entonces, a partir de estas señales, determinar la diferencia $D = N_1 - N_2$ y luego se puede calcular $L_1 = \frac{1}{2}\left[D + (N_1 - N_2)\cdot\frac{c}{F}\right]$, determinándose así la posición de la pérdida en la cañería.

a. Explique y justifique como funciona el Cross-correlator, es decir, como hace para determinar la diferencia $N_1 - N_2$.

b. La utilización del equipo descripto brinda, en un caso real, el resultado que se muestra en la Figura 3. Calcule aproximadamente la diferencia de retardo $N_1 - N_2$.

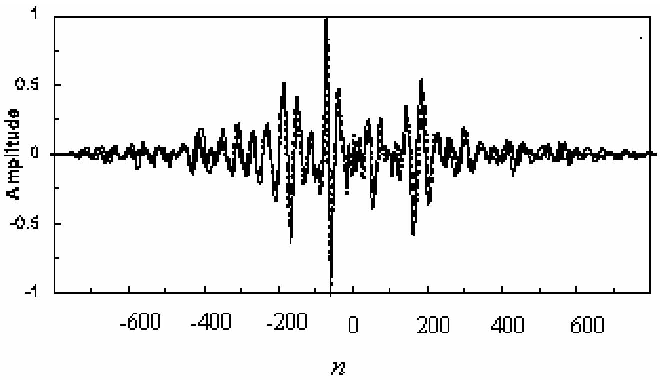


Figura 3. Resultado en un experimento real.

[1] Osama Hunaidi and Alex Wang. *PC Multimedia Based Leak Detection System for Water Distribution Networks*. 15th World Conference on Nondestructive Testing. Roma (Italy) 15-21 October 2000.

a. Planteando la correlación cruzada (*cross-correlation*) entre la señales $x_1(n)$ y $x_2(n)$ tenemos:

$$\begin{aligned}
r_{x_1 x_2}(\ell) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n+\ell)\, x_2(n) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\ x(n+\ell-N_1) + w_1(n+\ell)\ \right]\left[\ x(n-N_2) + w_2(n)\ \right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+\ell-N_1)\, x(n-N_2) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+\ell-N_1)\, w_2(n) + \\
&\qquad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_1(n+\ell)\, x(n-N_2) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_1(n+\ell)\, w_2(n)
\end{aligned} \tag{1}$$

donde el primer término de está expresión puede simplificarse efectuando un cambio de variable,

$$u=\ell-N_1 \quad \rightarrow \quad \left(1^{er}\,term\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(n+\ell-N_1\right)x\left(n-N_2\right)=\sum_{u=-\infty}^{\infty} x\left(u+\ell\right)x\left(u+N_1-N_2\right)$$

$$=\sum_{u=-\infty}^{\infty} x\left(u+\ell\right)x\left(u+D\right)=r_{xx}\left(\ell-D\right)$$

A partir de un razonamiento análogo sobre el segundo y tercer término de (1), llegamos a:

$$r_{x_1 x_2}\left(\ell\right)=r_{x\,x}\left(\ell-D\right)+\ r_{x\,w_2}\left(\ell-N_1\right)+r_{w_1\,x}\left(\ell+N_2\right)\ +r_{w_1\,w_2}\left(\ell\right)$$

Pero considerando que las señales de ruido son de tipo ruido blanco gaussiano, no existe ninguna relación entre la señal x(n) y las señales de ruido y entonces podemos descartar el segundo y el tercer término de la ecuación anterior y así obtenemos:

$$r_{x_1 x_2}\left(\ell\right)\ \approx\ r_{x\,x}\left(\ell-(N_1-N_2)\right)+\ r_{w_1\,w_2}\left(\ell\right)$$

Más aún, si evaluamos la correlación cruzada en (N_1 - N_2) y si éste es un número relativamente grande podemos despreciar el término $r_{w_1\,w_2}\left(N_1-N_2\right)$ y tenemos:

$$r_{x_1 x_2}\left(N_1-N_2\right)\ \approx\ r_{x\,x}\left(\ (N_1-N_2)-(N_1-N_2)\ \right)=r_{x\,x}\left(0\right)$$

b. A partir de la gráfica anterior podemos medir el pico máximo que será el valor $D = N_1 - N_2$