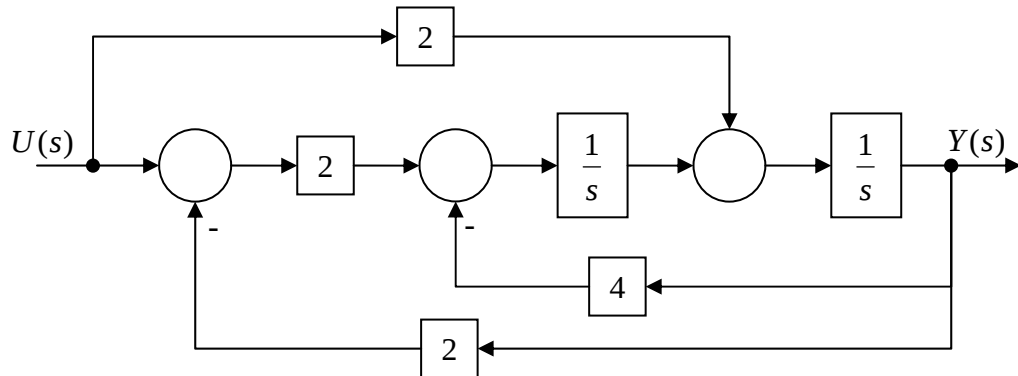


A502 – Teoría de Sistemas y Señales

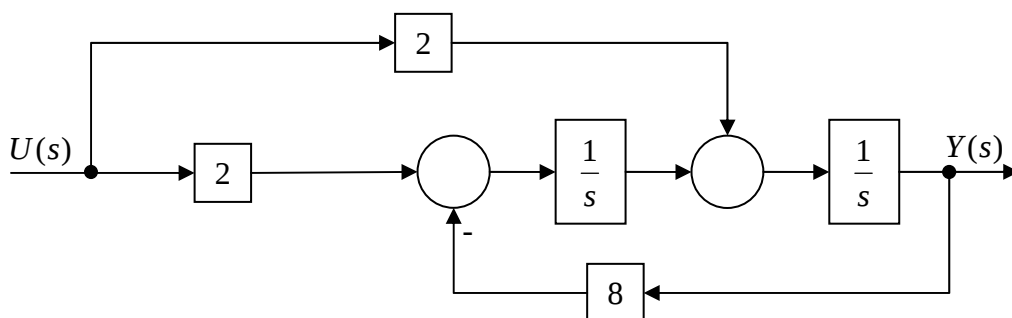
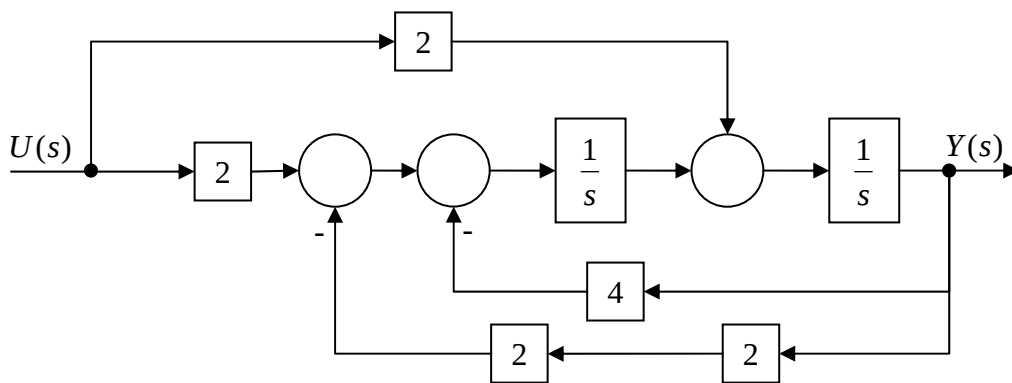
Problemas resueltos – Serie 5

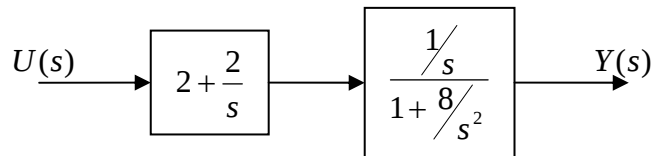
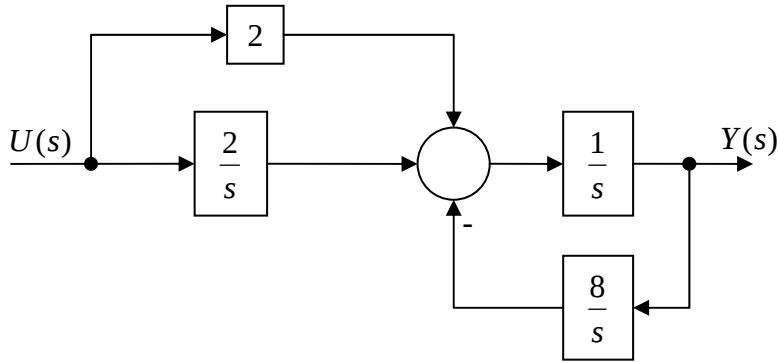
Problema 1: Dado el siguiente DB, calcule



- A partir del DB hallar la función transferencia y escribirla en forma normalizada (cociente de polinomios mónicos). Analizar la BIBO estabilidad del sistema.
- Realizar el Diagrama de Bode de Amplitud y Fase del sistema.
- Hallar la EDO que describe el comportamiento entrada-salida del sistema.
- Hallar la respuesta del sistema a un escalón a partir de las siguientes condiciones iniciales.
 - condiciones iniciales nulas.
 - $y(0) = 1$; $\dot{y}(0) = 0$

a)





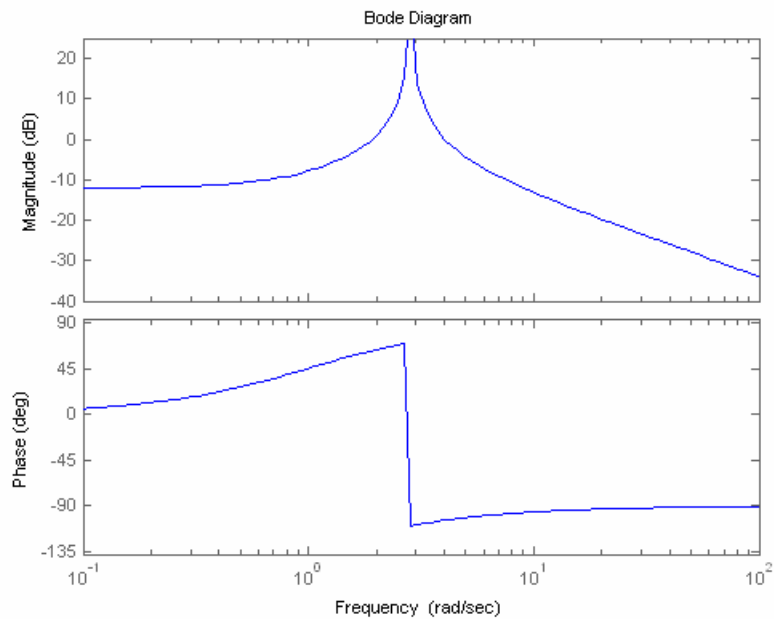
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{2(s+1)}{s^2}}{\frac{s^2+8}{s^2}} = \frac{2(s+1)}{s^2+8}$$

Los polos están ubicados en $p_{1,2} = \pm j\sqrt{8} \Rightarrow$ El sistema no es BIBO estable.

b) El sistema tiene:

- Un cero en $s = -1$.
- Un par de polos conjugados en $s = \pm j\sqrt{8}$ con $\xi = 0$ y $\omega_0 = \sqrt{8}$.

Por lo tanto, el diagrama de Bode es el siguiente



c) Dada la función transferencia

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2(s+1)}{s^2+8} \Rightarrow Y(s)(s^2+8) = 2(s+1)U(s)$$

Antitransformando se tiene

$$\boxed{\ddot{y}(t) + 8y(t) = 2\dot{u}(t) + u(t)}$$

d1) Respuesta al escalón con condiciones iniciales nulas

$$G(s) = \frac{2(s+1)}{s^2+8}$$

$$u(t) : \text{escalón unitario} \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2(s+1)}{s^2+8} \frac{1}{s}$$

Aplicando fracciones simples se tiene

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+8} = \frac{As^2+8A+Bs^2+Cs}{s(s^2+8)}$$

Igualando coeficientes

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=2 \\ 8A=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0,25 \\ B=-0,25 \\ C=2 \end{cases}$$

Entonces

$$Y(s) = \frac{1}{4s} + \frac{-\cancel{s}/4 + 2}{s^2+8} = \frac{1}{4s} - \frac{1}{4} \frac{s}{s^2+8} + \frac{2}{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{8}}{s^2+8}$$

Antitransformando se tiene

$$y(t) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos \sqrt{8} t + \frac{2}{\sqrt{8}} \operatorname{sen} \sqrt{8} t \right) \mu(t)$$

d2) Respuesta al escalón a partir de las siguientes con condiciones iniciales

$$y(0)=1 \quad ; \quad \dot{y}(0)=0$$

Tenemos

$$\ddot{y}(t) + 8y(t) = 2\dot{u}(t) + u(t)$$

Transformando se tiene

$$s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 8Y(s) = 2(s+1)U(s)$$

$$(s^2+8)Y(s) = sy(0) + \dot{y}(0) + 2(s+1)U(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{2(s+1)}{s^2+8} U(s) + \frac{sy(0)}{s^2+8} + \frac{\dot{y}(0)}{s^2+8}$$

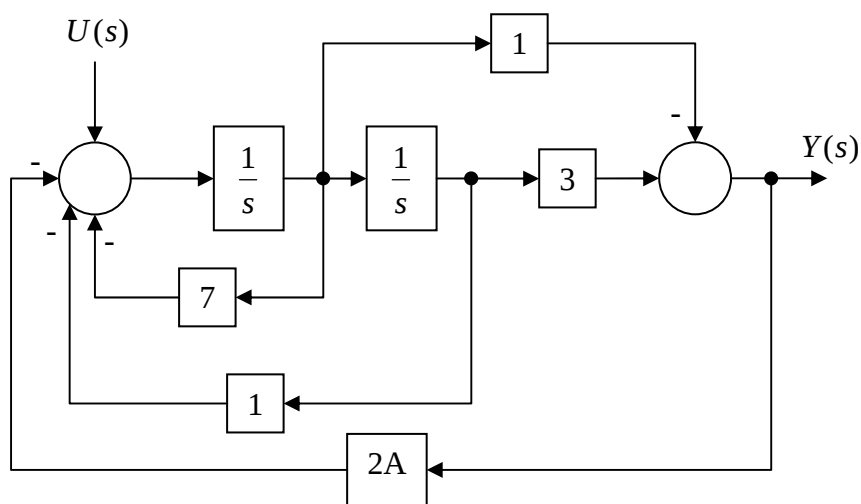
Para $U(s) = \frac{1}{s}$, resulta

$$Y(s) = \frac{2(s+1)}{s^2+8} \frac{1}{s} + \frac{sy(0)}{s^2+8}$$

La transformada del primer término de $Y(s)$ es igual a la calculada anteriormente en el apartado c1) y el segundo corresponde a un coseno. Por lo tanto la respuesta queda

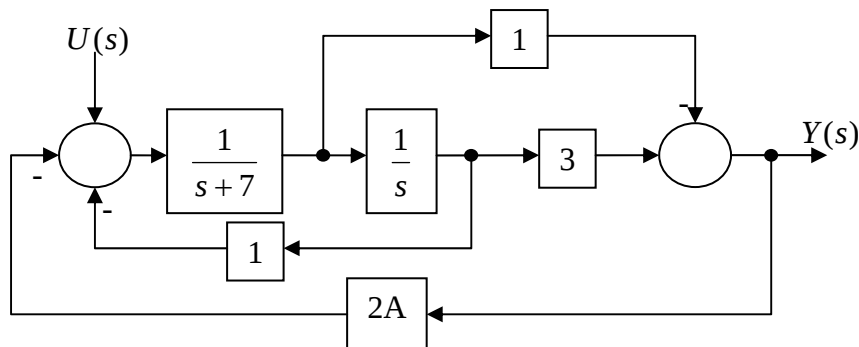
$$y(t) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos \sqrt{8} t + \frac{2}{\sqrt{8}} \sin \sqrt{8} t + \cos \sqrt{8} t \right) \mu(t)$$

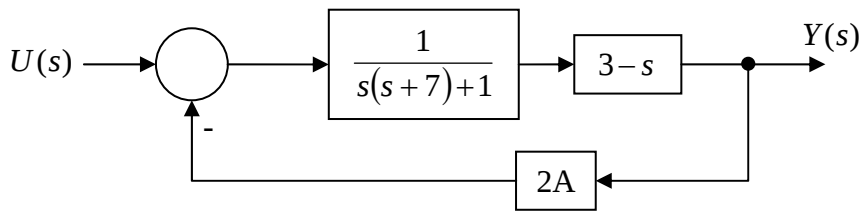
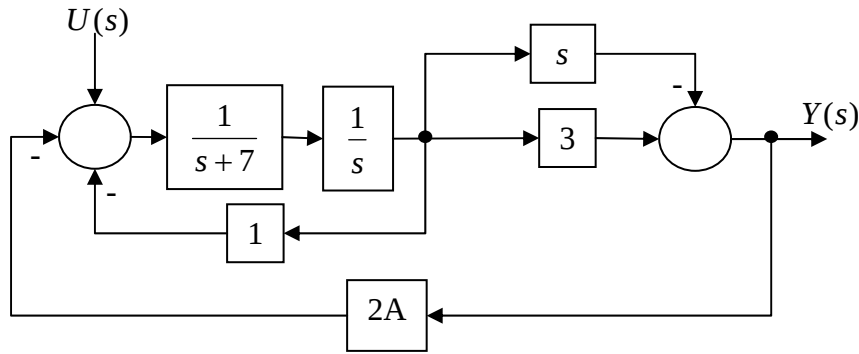
Problema 2: Dado el siguiente DB, calcule



- A partir del DB hallar la función transferencia y escribirla en forma normalizada (cociente de polinomios mónicos). Determinar los valores de A que hacen que el sistema sea BIBO estable.
- Asumiendo que $A=1$, hallar la EDO que describe el comportamiento entrada-salida del sistema.
- Hallar la respuesta del sistema a un escalón a partir de las siguientes condiciones iniciales.
 $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 2$

a)





$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{-s+3}{s^2+7s+1}}{1+2A\frac{-s+3}{s^2+7s+1}} = \frac{-s+3}{s^2+s(7-2A)+4}$$

Dado que el polinomio del denominador es de segundo orden, solo basta con que cada uno de sus coeficientes sean mayores que cero para que el sistema sea BIBO estable. Entonces

$$7-2A > 0 \Rightarrow A < \frac{7}{2}$$

b) Para $A=1$ se tiene que

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-s+3}{s^2+5s+4} \Rightarrow Y(s)(s^2+5s+4) = U(s)(3-s)$$

Antitransformando se tiene

$$\boxed{\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = 3u(t) - \dot{u}(t)} \quad \text{EDO}$$

c) Respuesta al impulso a partir de las siguientes condiciones iniciales

$$y(0) = 0 \quad ; \quad \dot{y}(0) = 2$$

Transformando la EDO se tiene

$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 5sY(s) - 5y(0) + 4Y(s) = U(s)(3-s)$$

$$Y(s)(s^2+5s+4) = U(s)(3-s) + y(0)(s+5) + \dot{y}(0)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{3-s}{s^2+5s+4}U(s) + \frac{y(0)(s+5)}{s^2+5s+4} + \frac{\dot{y}(0)}{s^2+5s+4}$$

Dado que $U(s) = 1$, la ecuación anterior queda

$$Y(s) = \frac{3-s}{s^2+5s+4} + \frac{2}{s^2+5s+4} = \frac{5-s}{s^2+5s+4}$$

Dividiendo en fracciones simples se tiene

$$Y(s) = \frac{5-s}{s^2+5s+4} = \frac{5-s}{(s+1)(s+4)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+4} = \frac{A(s+4) + B(s+1)}{(s+1)(s+4)}$$

Igualando coeficientes

$$\begin{cases} A+B=-1 \\ 4A+B=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+4}$$

Entonces, se obtiene la siguiente respuesta

$$y(t) = [2e^{-t} - 3e^{-4t}] \mu(t)$$